Percolation sur les cartes uniformes infinies du demi-plan

Loïc Richier

UMPA, École Normale Supérieure de Lyon

Journée Cartes - 14 Avril 2016

Plan

But : étudier quelques aspects de la percolation de Bernoulli sur de grandes triangulations et quadrangulations à bord uniformes.

Questions :

- Peut-on calculer les seuils de percolation ?
- La limite d'échelle des probabilités de croisement est-elle universelle ?
- À quoi ressemble la carte découpée le long d'une interface de percolation ?
- À quoi ressemble une carte avec un grand cluster critique ?

Topologie locale

$\mathcal{M}^f = \{$cartes planaires **enracinées** (finies)$\}$.

Topologie locale

$\mathcal{M}^f = \{$cartes planaires **enracinées** (finies)$\}$.

Définition

La topologie locale sur $\mathcal{M}^f$ est induite par la distance d_{loc} définie pour tout $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}' \in \mathcal{M}^f$ par :

$$d_{loc}\left(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}'\right) := \left(1 + \sup\left\{r \geq 0 \mid B_r(\boldsymbol{m}) \simeq B_r(\boldsymbol{m}')\right\}\right)^{-1}.$$

Topologie locale

$\mathcal{M}^f = \{$cartes planaires **enracinées** (finies)$\}$.

Définition

La topologie locale sur $\mathcal{M}^f$ est induite par la distance d_{loc} définie pour tout $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}' \in \mathcal{M}^f$ par :

$$d_{loc}\left(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}'\right) := \left(1 + \sup\left\{r \geq 0 \mid B_r(\boldsymbol{m}) \simeq B_r(\boldsymbol{m}')\right\}\right)^{-1}.$$

- $B_r(\boldsymbol{m})$ = boule de rayon r dans $\boldsymbol{m}$ pour la distance de graphe.

Topologie locale

$\mathcal{M}^f = \{$cartes planaires **enracinées** (finies)$\}$.

Définition

La topologie locale sur $\mathcal{M}^f$ est induite par la distance d_{loc} définie pour tout $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}' \in \mathcal{M}^f$ par :

$$d_{loc}\left(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}'\right) := \left(1 + \sup\left\{r \geq 0 \mid B_r(\boldsymbol{m}) \simeq B_r(\boldsymbol{m}')\right\}\right)^{-1}.$$

- $B_r(\boldsymbol{m})$ = boule de rayon r dans $\boldsymbol{m}$ pour la distance de graphe.
- $\mathcal{M}$ = complété de $\mathcal{M}^f$ pour d_{loc}.

Topologie locale

$\mathcal{M}^f = \{$cartes planaires **enracinées** (finies)$\}$.

Définition

La topologie locale sur $\mathcal{M}^f$ est induite par la distance d_{loc} définie pour tout $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}' \in \mathcal{M}^f$ par :

$$d_{loc}\left(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}'\right) := \left(1 + \sup\left\{r \geq 0 \mid B_r(\boldsymbol{m}) \simeq B_r(\boldsymbol{m}')\right\}\right)^{-1}.$$

- $B_r(\boldsymbol{m})$ = boule de rayon r dans $\boldsymbol{m}$ pour la distance de graphe.
- $\mathcal{M}$ = complété de $\mathcal{M}^f$ pour d_{loc}.
- Les éléments de $\mathcal{M}^\infty := \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}^f$ sont des "cartes infinies".

Cartes uniformes infinies du plan

- p-angulation $=$ carte dont toutes les faces ont degré p.

Cartes uniformes infinies du plan

- p-angulation = carte dont toutes les faces ont degré p.
- $* \in \{\triangle, \square\}$
  - $\triangle$-angulations = triangulations 2-connexes.
  - $\square$-angulations = quadrangulations.

Cartes uniformes infinies du plan

- p-angulation = carte dont toutes les faces ont degré p.
- $* \in \{\triangle, \square\}$
  - $\triangle$-angulations = triangulations 2-connexes.
  - $\square$-angulations = quadrangulations.
- $\mathcal{M}_n^* = \{*$-angulations enracinées à n sommets$\}$.

Cartes uniformes infinies du plan

- p-angulation $=$ carte dont toutes les faces ont degré p.
- $* \in \{\triangle, \square\}$
  - $\triangle$-angulations $=$ triangulations 2-connexes.
  - $\square$-angulations $=$ quadrangulations.
- $\mathcal{M}_n^* = \{*$-angulations enracinées à n sommets$\}$.
- $\mathbf{P}_n^* =$ **mesure uniforme** sur $\mathcal{M}_n^*$.

Cartes uniformes infinies du plan

- p-angulation $=$ carte dont toutes les faces ont degré p.
- $* \in \{\triangle, \square\}$
  - $\triangle$-angulations $=$ triangulations 2-connexes.
  - $\square$-angulations $=$ quadrangulations.
- $\mathcal{M}_n^* = \{*\text{-angulations enracinées à } n \text{ sommets}\}$.
- $\mathbf{P}_n^* =$ **mesure uniforme** sur $\mathcal{M}_n^*$.

Théorème (Angel, Schramm '03 ($\triangle$), Krikun '05 ($\square$))

Au sens faible (pour la topologie locale),

$$\mathbf{P}_n^* \underset{n \to +\infty}{\Longrightarrow} \mathbf{P}_\infty^* = \textit{loi de l'UIP-}*.$$

Cartes uniformes infinies du plan

- p-angulation = carte dont toutes les faces ont degré p.
- $* \in \{\triangle, \square\}$
  - $\triangle$-angulations = triangulations 2-connexes.
  - $\square$-angulations = quadrangulations.
- $\mathcal{M}_n^* = \{*\text{-angulations enracinées à } n \text{ sommets}\}$.
- $\mathbf{P}_n^*$ = **mesure uniforme** sur $\mathcal{M}_n^*$.

Théorème (Angel, Schramm '03 ($\triangle$), Krikun '05 ($\square$))

Au sens faible (pour la topologie locale),

$$\mathbf{P}_n^* \underset{n \to +\infty}{\Longrightarrow} \mathbf{P}_\infty^* = \textit{loi de l'UIP-}*.$$

$* = \triangle$: UIPT="Uniform Infinite Planar Triangulation".

$* = \square$: UIPQ="Uniform Infinite Planar Quadrangulation".

Plongement

$\mathbf{P}^*_\infty$ est supportée par les $*$-angulations du **plan**.

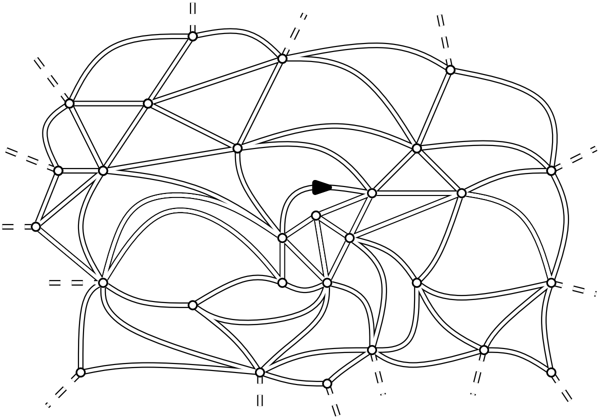


Figure: Un plongement de l'UIPT dans le plan.

Cartes uniformes infinies du demi-plan

- p-angulation du m-gone $=$ carte dont toutes les faces ont degré p sauf une, la face externe, de degré m et à **bord simple**.

Cartes uniformes infinies du demi-plan

- p-angulation du m-gone $=$ carte dont toutes les faces ont degré p sauf une, la face externe, de degré m et à **bord simple**.

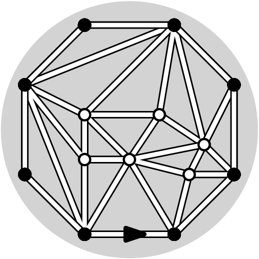


Figure: Une triangulation de l'octogone avec 6 sommets internes.

Cartes uniformes infinies du demi-plan

- p-angulation du m-gone $=$ carte dont toutes les faces ont degré p sauf une, la face externe, de degré m et à **bord simple**.
- $\mathcal{M}^*_{n,m} = \{*$-angulations du m-gone avec n sommets internes, **enracinées sur le bord**$\}$.

Cartes uniformes infinies du demi-plan

- p-angulation du m-gone $=$ carte dont toutes les faces ont degré p sauf une, la face externe, de degré m et à **bord simple**.
- $\mathcal{M}^*_{n,m} = \{*$-angulations du m-gone avec n sommets internes, **enracinées sur le bord**$\}$.
- $\mathbf{P}^*_{n,m} =$ **mesure uniforme** sur $\mathcal{M}^*_{n,m}$.

Cartes uniformes infinies du demi-plan

Théorème (Angel '04)

Au sens faible (pour la topologie locale),

- $\mathbf{P}^*_{n,m} \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \mathbf{P}^*_{\infty,m}$ = *loi de l'UIP-$*$ du m-gone.*

Cartes uniformes infinies du demi-plan

Théorème (Angel '04)

Au sens faible (pour la topologie locale),

- $\mathbf{P}^*_{n,m} \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \mathbf{P}^*_{\infty,m}$ = *loi de l'UIP-$*$ du m-gone.*

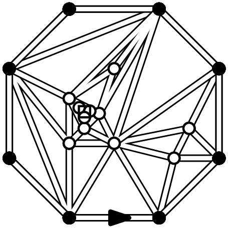


Figure: Un plongement de l'UIPT de l'octogone dans un disque épointé.

Cartes uniformes infinies du demi-plan

Théorème (Angel '04)

Au sens faible (pour la topologie locale),

- $\mathbf{P}^*_{n,m} \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \mathbf{P}^*_{\infty,m}$ = *loi de l'UIP-$*$ du m-gone.*
- $\mathbf{P}^*_{\infty,m} \underset{m\to+\infty}{\Longrightarrow} \mathbf{P}^*_{\infty,\infty}$= *loi de l'UIP-$*$ du demi-plan ou UIHP-$*$.*

Cartes uniformes infinies du demi-plan

Théorème (Angel '04)

Au sens faible (pour la topologie locale),

- $\mathbf{P}^*_{n,m} \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \mathbf{P}^*_{\infty,m}$ = *loi de l'UIP-$*$ du m-gone.*
- $\mathbf{P}^*_{\infty,m} \underset{m\to+\infty}{\Longrightarrow} \mathbf{P}^*_{\infty,\infty}$= *loi de l'UIP-$*$ du demi-plan ou UIHP-$*$.*

$* = \triangle$: UIHPT="Uniform Infinite Half-Planar Triangulation".
$* = \square$: UIHPQ="Uniform Infinite Half-Planar Quadrangulation".

Plongement

$\mathbf{P}^*_{\infty,\infty}$ est supportée par les $*$-angulations du **demi-plan** à bord infini.

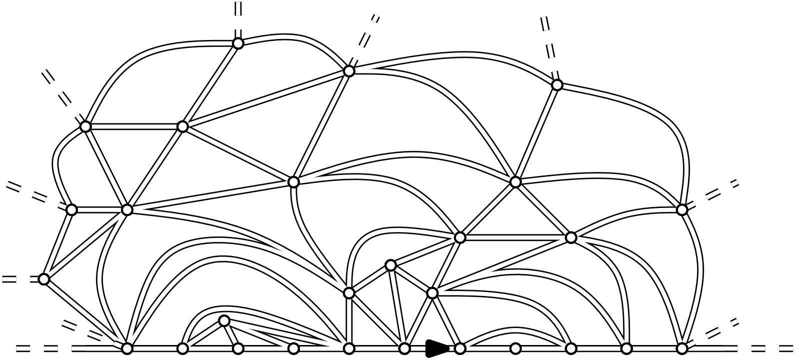


Figure: Un plongement de l'UIHPT dans le demi-plan.

Invariance par ré-enracinement

$\mathbf{P}^*_{\infty,\infty}$ est invariante par **ré-enracinement** sur le bord.

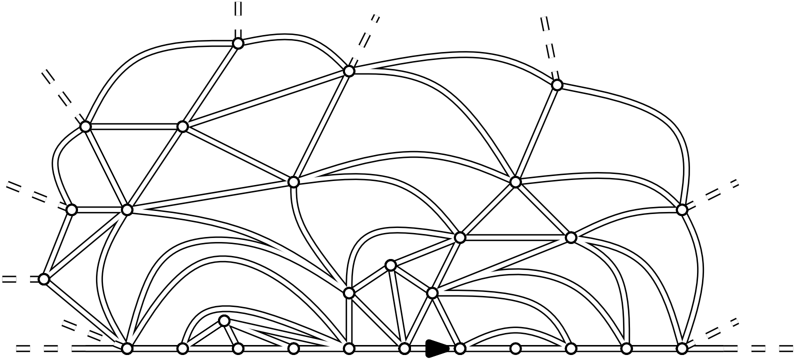


Figure: Ré-enracinement de l'UIHPT sur son bord.

Invariance par ré-enracinement

$\mathbf{P}^*_{\infty,\infty}$ est invariante par **ré-enracinement** sur le bord.

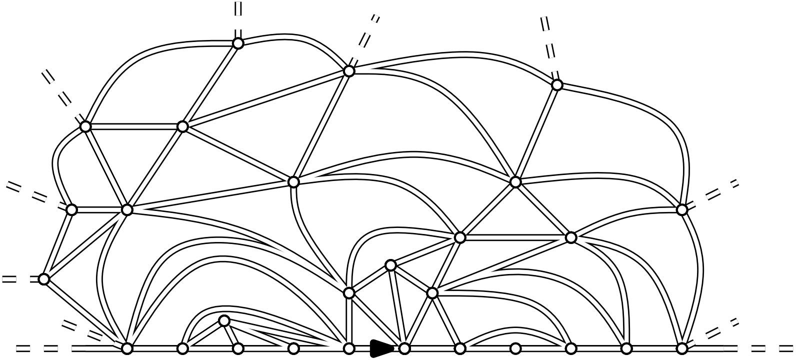


Figure: Ré-enracinement de l'UIHPT sur son bord.

Invariance par ré-enracinement

$\mathbf{P}^*_{\infty,\infty}$ est invariante par **ré-enracinement** sur le bord.

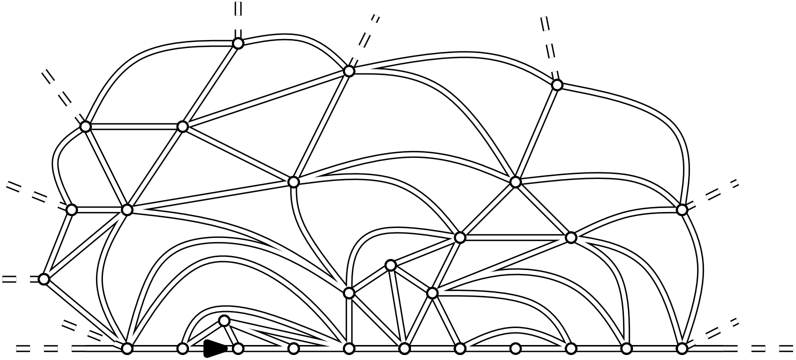


Figure: Ré-enracinement de l'UIHPT sur son bord.

Mesure de Boltzmann

On introduit la série génératrice des $*$-angulations du m-gone,

$$F_m^*(z) := \sum_{n \geq 0} \# \mathcal{M}_{n,m}^* z^n,$$

de rayon de convergence $\rho_\triangle = 2/27$, $\rho_\square = 1/12$.

Mesure de Boltzmann

On introduit la série génératrice des $*$-angulations du m-gone,

$$F_m^*(z) := \sum_{n\geq 0} \#\mathcal{M}_{n,m}^* z^n,$$

de rayon de convergence $\rho_\triangle = 2/27$, $\rho_\square = 1/12$.

La fonction de partition est définie par

$$Z_m^* := F_m^*(\rho_*) = \sum_{n\geq 0} \#\mathcal{M}_{n,m}^* \rho_*^n < \infty.$$

Mesure de Boltzmann

Définition

La $*$-**mesure de Boltzmann** *(ou* $*$*-mesure libre)* $\mathbf{Q}_m^*$ *sur les* $*$*-angulations du m-gone est définie par :*

$$\forall \boldsymbol{m} \in \mathcal{M}_{n,m}^*,\ \mathbf{Q}_m^*(\boldsymbol{m}) := \frac{\rho_*^{\boldsymbol{n}}}{Z_m^*}.$$

Mesure de Boltzmann

Définition

La $*$-**mesure de Boltzmann** *(ou* $*$*-mesure libre)* $\mathbf{Q}_m^*$ *sur les* $*$*-angulations du m-gone est définie par :*

$$\forall \boldsymbol{m} \in \mathcal{M}_{n,m}^*,\ \mathbf{Q}_m^*(\boldsymbol{m}) := \frac{\rho_*^n}{Z_m^*}.$$

Théorème (Angel '04)

Au sens faible (pour la topologie locale),

$$\mathbf{Q}_m^* \underset{m \to +\infty}{\Longrightarrow} \mathbf{P}_{\infty,\infty}^*.$$

Configurations

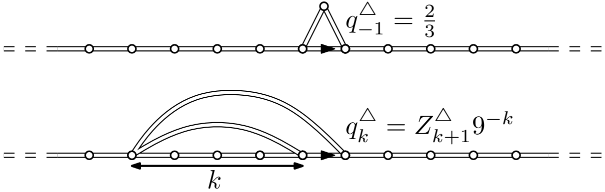


Figure: Configurations de la face incidente à la racine dans l'UIHPT.

Configurations

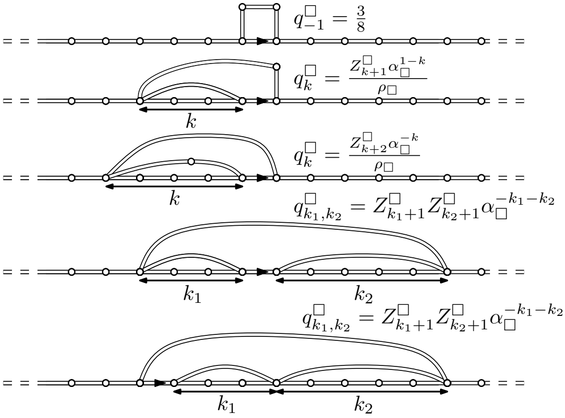


Figure: Configurations de la face incidente à la racine dans l'UIHPQ.

Propriété de Markov spatiale

Théorème (Angel '04)

Soit M *de loi* $\mathbf{P}^*_{\infty,\infty}$*, et* A *la face incidente à la racine. Alors* $\mathrm{M} \setminus \mathsf{A}$ *a une unique composante connexe infinie* M'*, et au plus une* $(\triangle)$ *ou deux* $(\square)$ *finies,* $\tilde{\mathrm{M}}_1$ *et* $\tilde{\mathrm{M}}_2$*.*

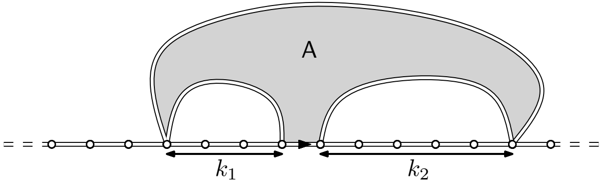


Figure: La propriété de Markov spatiale.

Propriété de Markov spatiale

Théorème (Angel '04)

Soit M *de loi* $\mathbf{P}^*_{\infty,\infty}$, *et* A *la face incidente à la racine. Alors* $\mathrm{M} \setminus$ A *a une unique composante connexe infinie* M', *et au plus une* $(\triangle)$ *ou deux* $(\square)$ *finies,* $\tilde{\mathrm{M}}_1$ *et* $\tilde{\mathrm{M}}_2$. *De plus,* M' *a loi* $\mathbf{P}^*_{\infty,\infty}$

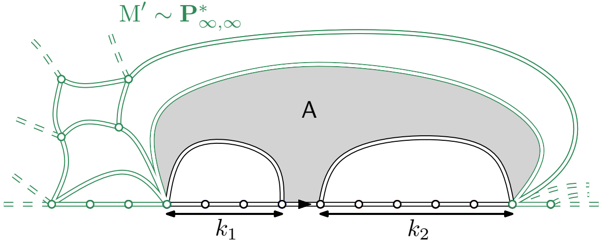


Figure: La propriété de Markov spatiale.

Propriété de Markov spatiale

Théorème (Angel '04)

Soit M *de loi* $\mathbf{P}^*_{\infty,\infty}$, *et* A *la face incidente à la racine. Alors* $\mathrm{M} \setminus$ A *a une unique composante connexe infinie* M', *et au plus une* ($\triangle$) *ou deux* ($\square$) *finies,* $\tilde{\mathrm{M}}_1$ *et* $\tilde{\mathrm{M}}_2$. *De plus,* M' *a loi* $\mathbf{P}^*_{\infty,\infty}$, $\tilde{\mathrm{M}}_1$ *et* $\tilde{\mathrm{M}}_2$ *sont des* $*$*-angulations de Boltzmann*

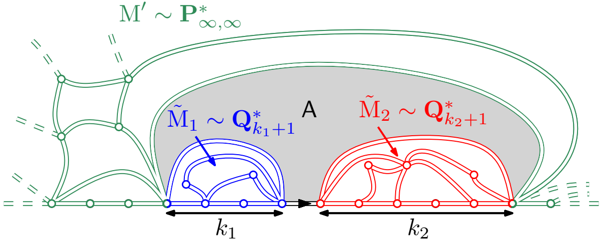


Figure: La propriété de Markov spatiale.

Propriété de Markov spatiale

Théorème (Angel '04)

Soit M *de loi* $\mathbf{P}^*_{\infty,\infty}$*, et* A *la face incidente à la racine. Alors* $\mathrm{M} \setminus$ A *a une unique composante connexe infinie* M'*, et au plus une* $(\triangle)$ *ou deux* $(\square)$ *finies,* $\tilde{\mathrm{M}}_1$ *et* $\tilde{\mathrm{M}}_2$*. De plus,* M' *a loi* $\mathbf{P}^*_{\infty,\infty}$*,* $\tilde{\mathrm{M}}_1$ *et* $\tilde{\mathrm{M}}_2$ *sont des* $*$*-angulations de Boltzmann et* M'*,* $\tilde{\mathrm{M}}_1$ *et* $\tilde{\mathrm{M}}_2$ *sont indépendantes.*

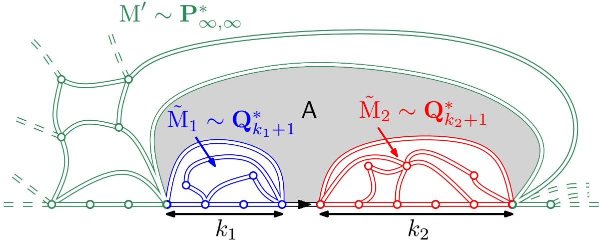


Figure: La propriété de Markov spatiale.

Percolation

Percolation de Bernoulli sur l'UIHP-$*$: chaque site, arête ou face est ouvert (colorié en noir) avec probabilité $p \in [0,1]$ et fermé (colorié en blanc) sinon, indépendamment des autres sites, arêtes ou faces.

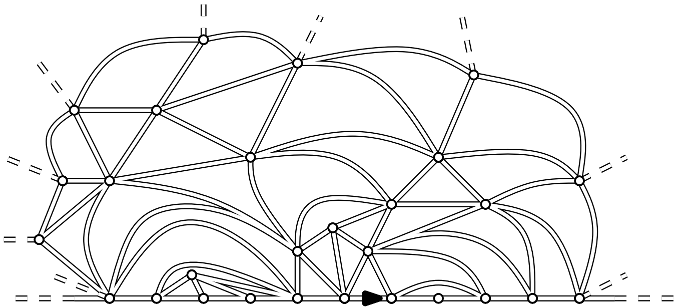


Figure: L'UIHPT.

Percolation

Percolation de Bernoulli sur l'UIHP-$*$: chaque **site**, arête ou face est ouvert (colorié en noir) avec probabilité $p \in [0, 1]$ et fermé (colorié en blanc) sinon, indépendamment des autres sites, arêtes ou faces.

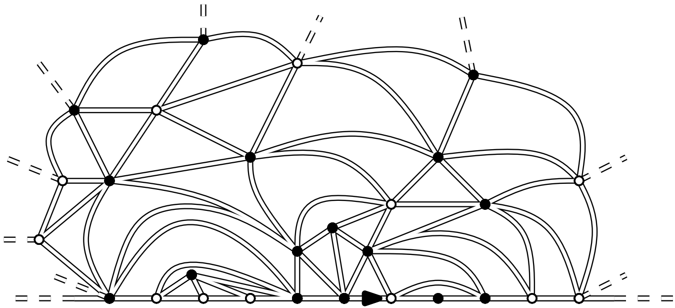


Figure: Percolation par site sur l'UIHPT.

Percolation

Percolation de Bernoulli sur l'UIHP-$*$: chaque site, **arête** ou face est ouvert (colorié en noir) avec probabilité $p \in [0, 1]$ et fermé (colorié en blanc) sinon, indépendamment des autres sites, arêtes ou faces.

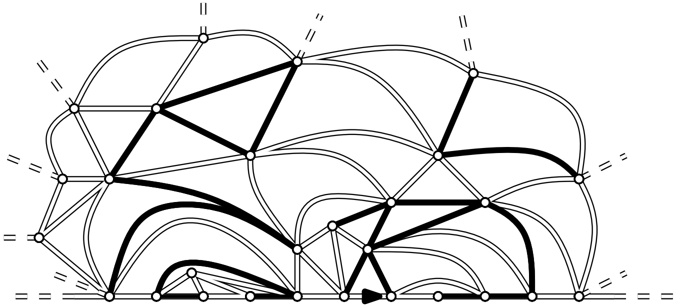


Figure: Percolation par arête sur l'UIHPT.

Percolation

Percolation de Bernoulli sur l'UIHP-$*$: chaque site, arête ou **face** est ouvert (colorié en noir) avec probabilité $p \in [0, 1]$ et fermé (colorié en blanc) sinon, indépendamment des autres sites, arêtes ou faces.

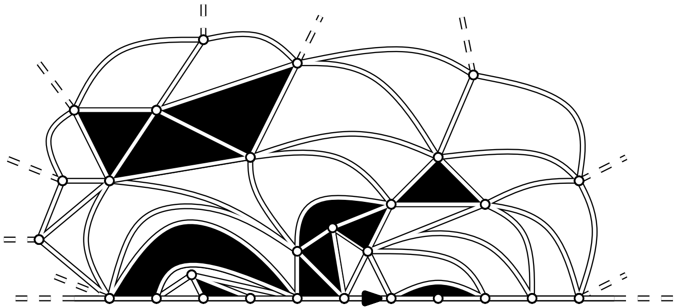


Figure: Percolation par face sur l'UIHPT.

Percolation

Percolation de Bernoulli sur l'UIHP-$*$: chaque site, arête ou face est ouvert (colorié en noir) avec probabilité $p \in [0,1]$ et fermé (colorié en blanc) sinon, indépendamment des autres sites, arêtes ou faces.

Pour une carte $\boldsymbol{m} \in \mathcal{M}$ fixée, on définit la mesure sur $\{0,1\}^{e(\boldsymbol{m})}$

$$\mathcal{P}_p^{e(\boldsymbol{m})} := (p\delta_1 + (1-p)\delta_0)^{\otimes e(\boldsymbol{m})}.$$

Percolation

Percolation de Bernoulli sur l'UIHP-$*$: chaque site, arête ou face est ouvert (colorié en noir) avec probabilité $p \in [0,1]$ et fermé (colorié en blanc) sinon, indépendamment des autres sites, arêtes ou faces.

Pour une carte $\boldsymbol{m} \in \mathcal{M}$ fixée, on définit la mesure sur $\{0,1\}^{e(\boldsymbol{m})}$

$$\mathcal{P}_p^{e(\boldsymbol{m})} := (p\delta_1 + (1-p)\delta_0)^{\otimes e(\boldsymbol{m})}.$$

La mesure $\mathbb{P}_p$ sur $\left\{(\boldsymbol{m}, c) \mid \boldsymbol{m} \in \mathcal{M}, c \in \{0,1\}^{e(\boldsymbol{m})}\right\}$ induite par le modèle de percolation est définie par

$$\mathbb{P}_p(\mathrm{d}\boldsymbol{m}, \mathrm{d}c) := \mathbf{P}^*_{\infty,\infty}(\mathrm{d}\boldsymbol{m})\mathcal{P}_p^{e(\boldsymbol{m})}(\mathrm{d}c).$$

Percolation

$\mathcal{C}$:= cluster de percolation ouvert issu de l'origine.

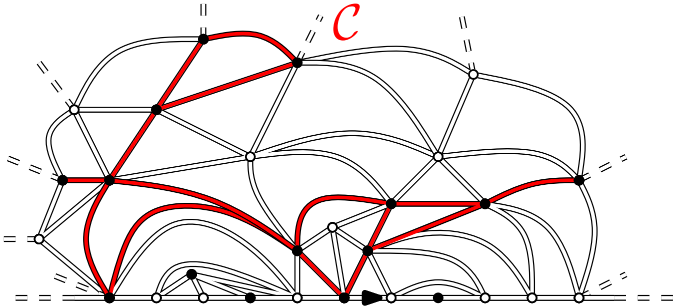


Figure: Cluster de percolation par site ouvert sur l'UIHPT.

Percolation

$\mathcal{H} :=$ enveloppe (hull) du cluster de percolation issu de l'origine.

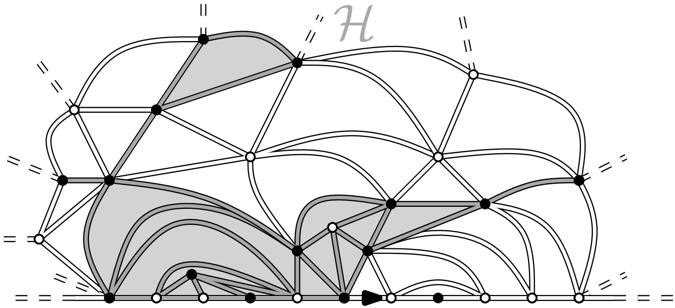


Figure: Enveloppe (Hull) du cluster de percolation $\mathcal{C}$.

Percolation

$\partial\mathcal{H}$:= bord de l'enveloppe du cluster de percolation issu de l'origine.

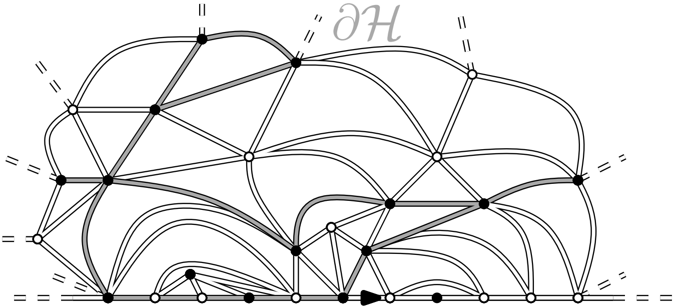


Figure: Bord de l'enveloppe du cluster de percolation $\mathcal{C}$.

Question

“Peut-on calculer les seuils de percolation ?”

Transition de phase

Le modèle de percolation admet une transition de phase.

Transition de phase

Le modèle de percolation admet une transition de phase.

- $\mathcal{C} :=$ cluster de percolation ouvert issu de l'origine.

Transition de phase

Le modèle de percolation admet une transition de phase.

- $\mathcal{C} :=$ cluster de percolation ouvert issu de l'origine.
- Percolation : $\{|\mathcal{C}| = \infty\}$.

Transition de phase

Le modèle de percolation admet une transition de phase.

- $\mathcal{C} :=$ cluster de percolation ouvert issu de l'origine.
- Percolation : $\{|\mathcal{C}| = \infty\}$.
- Probabilité de percolation : $\Theta(p) := \mathbb{P}_p(|\mathcal{C}| = \infty)$.

Transition de phase

Le modèle de percolation admet une transition de phase.

- $\mathcal{C} :=$ cluster de percolation ouvert issu de l'origine.
- Percolation : $\{|\mathcal{C}| = \infty\}$.
- Probabilité de percolation : $\Theta(p) := \mathbb{P}_p(|\mathcal{C}| = \infty)$.

Il existe un point critique p_c appelé **seuil de percolation** tel que

$$\begin{cases} \Theta(p) = 0 & \text{si} \quad p < p_c \\ \Theta(p) > 0 & \text{si} \quad p > p_c \end{cases} .$$

Transition de phase

Le modèle de percolation admet une transition de phase.

- $\mathcal{C}$:= cluster de percolation ouvert issu de l'origine.
- Percolation : $\{|\mathcal{C}| = \infty\}$.
- Probabilité de percolation : $\Theta(p) := \mathbb{P}_p(|\mathcal{C}| = \infty)$.

Il existe un point critique p_c appelé **seuil de percolation** tel que

$$\begin{cases} \Theta(p) = 0 & \text{si} \quad p < p_c \\ \Theta(p) > 0 & \text{si} \quad p > p_c \end{cases} .$$

Remarque : $p > p_c \Longrightarrow \mathbf{P}^*_{\infty,\infty}(\mathrm{d}\boldsymbol{m})$-p.s., $\mathcal{P}_p^{e(\boldsymbol{m})}(|\mathcal{C}| = \infty) > 0$.

Panorama

La plupart des seuils de percolation dans l'UIHP-$*$ sont connus.

Panorama

La plupart des seuils de percolation dans l'UIHP-$*$ sont connus.

Théorème (Angel '04, Angel et Curien '13)

Les seuils de percolation dans l'UIHPT sont donnés par

$$p_{c,\mathrm{site}}^{\triangle} = \frac{1}{2}, \quad p_{c,\mathrm{arête}}^{\triangle} = \frac{1}{4} \quad \textit{et} \quad p_{c,\mathrm{face}}^{\triangle} = \frac{4}{5}.$$

Les seuils de percolation dans l'UIHPQ sont donnés par

$$p_{c,\mathrm{arête}}^{\square} = \frac{1}{3} \quad \textit{et} \quad p_{c,\mathrm{face}}^{\square} = \frac{3}{4}.$$

Panorama

La plupart des seuils de percolation dans l'UIHP-$*$ sont connus.

Théorème (Angel '04, Angel et Curien '13)

Les seuils de percolation dans l'UIHPT sont donnés par

$$p_{c,\mathrm{site}}^{\triangle} = \frac{1}{2}, \quad p_{c,\mathrm{arête}}^{\triangle} = \frac{1}{4} \quad \textit{et} \quad p_{c,\mathrm{face}}^{\triangle} = \frac{4}{5}.$$

Les seuils de percolation dans l'UIHPQ sont donnés par

$$p_{c,\mathrm{arête}}^{\square} = \frac{1}{3} \quad \textit{et} \quad p_{c,\mathrm{face}}^{\square} = \frac{3}{4}.$$

Quid de $p_{c,\mathrm{site}}^{\square}$?

Panorama

La plupart des seuils de percolation dans l'UIHP-$*$ sont connus.

Théorème (Angel '04, Angel et Curien '13)

Les seuils de percolation dans l'UIHPT sont donnés par

$$p_{c,\mathrm{site}}^{\triangle} = \frac{1}{2}, \quad p_{c,\mathrm{arête}}^{\triangle} = \frac{1}{4} \quad \textit{et} \quad p_{c,\mathrm{face}}^{\triangle} = \frac{4}{5}.$$

Les seuils de percolation dans l'UIHPQ sont donnés par

$$p_{c,\mathrm{arête}}^{\square} = \frac{1}{3} \quad \textit{et} \quad p_{c,\mathrm{face}}^{\square} = \frac{3}{4}.$$

Quid de $p_{c,\mathrm{site}}^{\square}$?

Björnberg et Stefánsson '15 : $0.5511 \leq p_{c,\mathrm{site}}^{\square} \leq 0.5581$.

Processus d'exploration

Idée clé : explorer l'UIHP-$*$ face par face.

Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Processus d'exploration

Idée clé : explorer l'UIHP-$*$ face par face.

Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Processus d'exploration

Idée clé : explorer l'UIHP-$*$ face par face.

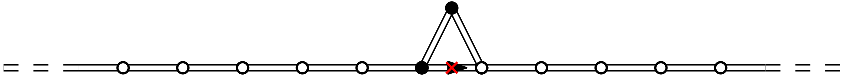


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Processus d'exploration

Idée clé : explorer l'UIHP-$*$ face par face.

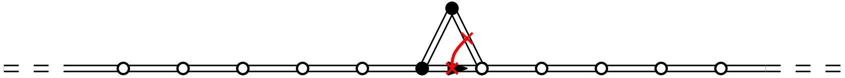


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Processus d'exploration

Idée clé : explorer l'UIHP-$*$ face par face.

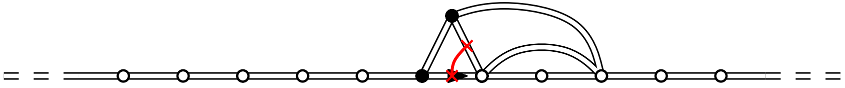


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Processus d'exploration

Idée clé : explorer l'UIHP-$*$ face par face.

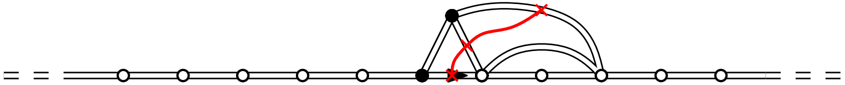


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Processus d'exploration

Idée clé : explorer l'UIHP-$*$ face par face.

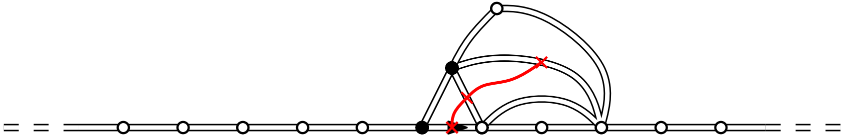


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Processus d'exploration

Idée clé : explorer l'UIHP-$*$ face par face.

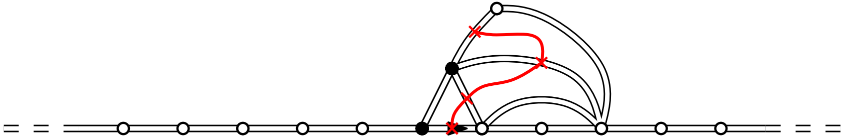


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Processus d'exploration

Idée clé : explorer l'UIHP-$*$ face par face.

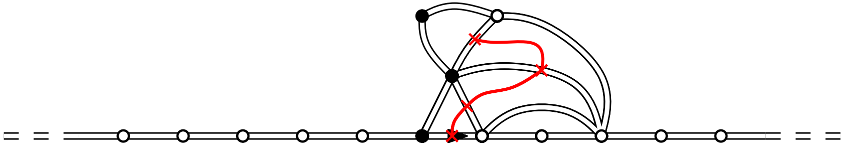


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Processus d'exploration

Idée clé : explorer l'UIHP-$*$ face par face.

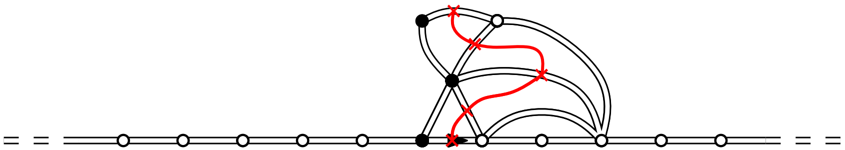


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Processus d'exploration

Idée clé : explorer l'UIHP-$*$ face par face.

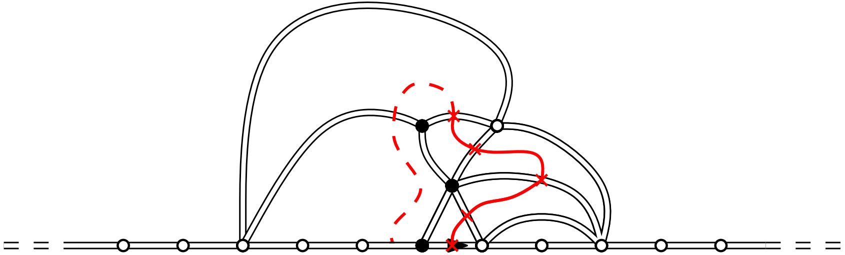


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Processus d'exploration

Le processus d'exploration pour la percolation par site sur l'UIHPQ est mal défini.

Processus d'exploration

Le processus d'exploration pour la percolation par site sur l'UIHPQ est mal défini.

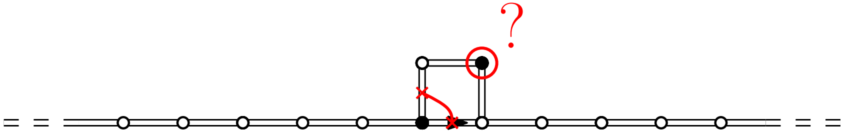


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Résultat

Théorème

Pour la percolation de Bernoulli par site sur l'UIHPQ,

$$p_{c,\mathrm{site}}^{\square} = \frac{5}{9}.$$

De plus, il n'y a pas percolation au point critique p.s. :

$$\Theta_{\mathrm{site}}^{\square}\left(p_{c,\mathrm{site}}^{\square}\right) = 0.$$

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

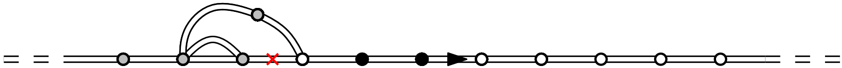


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

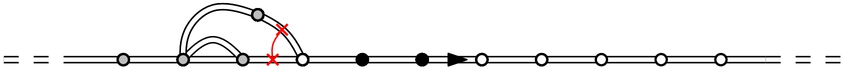


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

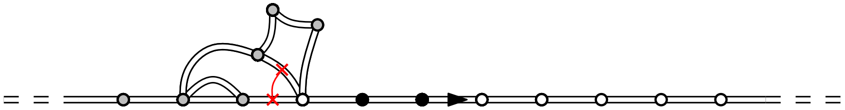


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

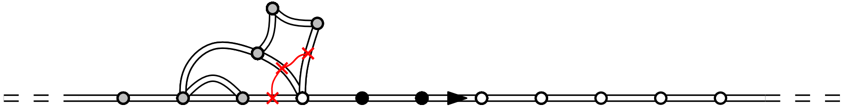


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

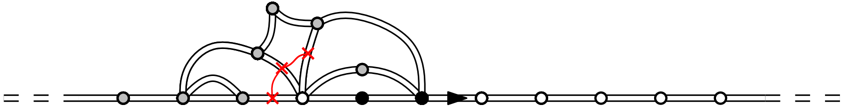


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

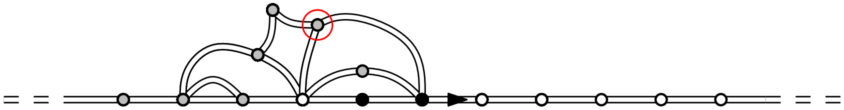


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

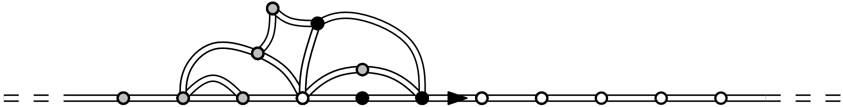


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

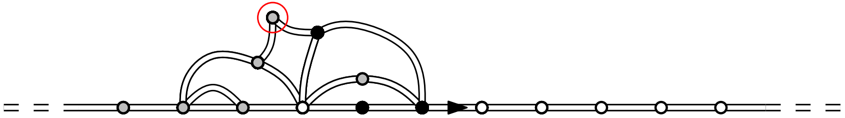


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

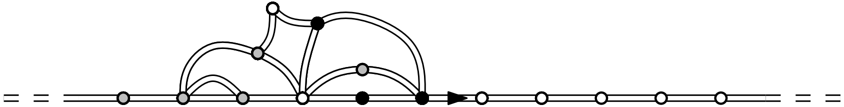


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

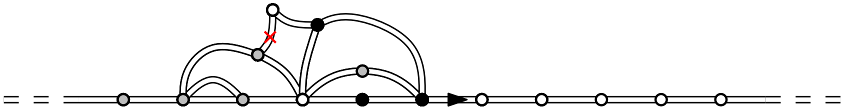


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

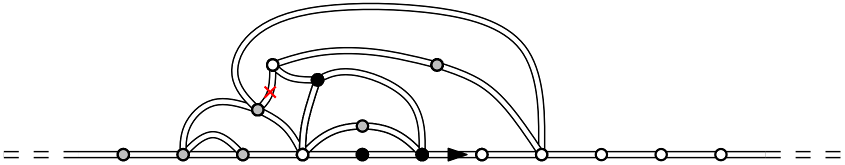


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

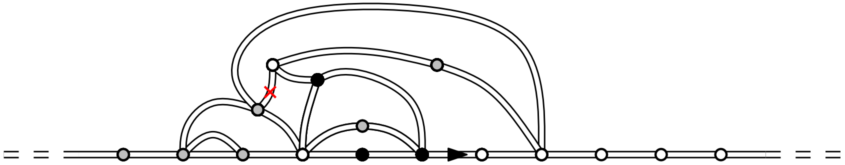


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

- Le processus est bien défini.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

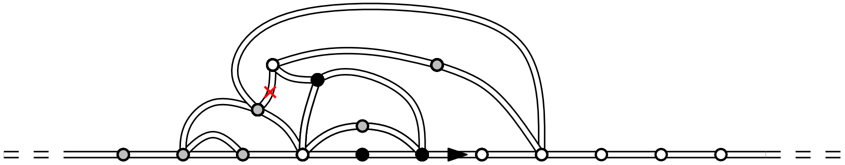


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

- Le processus est bien défini.
- Les étapes du processus sont i.i.d. (propriété de Markov spatiale).

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

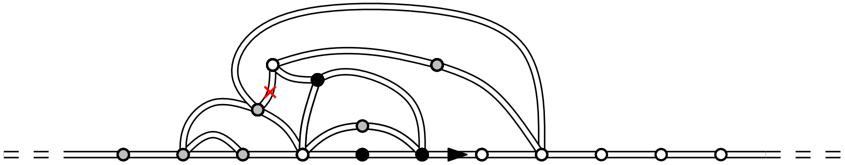


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

- Le processus est bien défini.
- Les étapes du processus sont i.i.d. (propriété de Markov spatiale).
- Le processus termine $\Longrightarrow |\mathcal{C}| < \infty$.

Éléments de preuve

1. Le processus d'exploration.

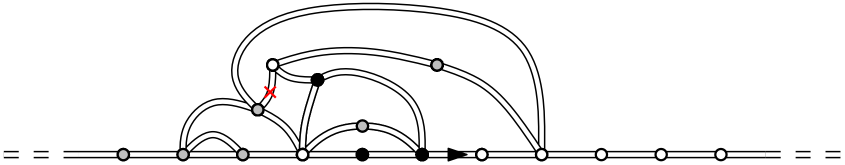


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

- Le processus est bien défini.
- Les étapes du processus sont i.i.d. (propriété de Markov spatiale).
- Le processus termine $\Longrightarrow |\mathcal{C}| < \infty$.
- Le processus révèle une infinité de sommets noirs $\Longrightarrow |\mathcal{C}| = \infty$.

Éléments de preuve

2. Propriétés du processus d'exploration.

Éléments de preuve

2. Propriétés du processus d'exploration.

$B_n :=$ longueur du segment noir sur le bord à l'étape n.

Éléments de preuve

2. Propriétés du processus d'exploration.

$B_n :=$ longueur du segment noir sur le bord à l'étape n.

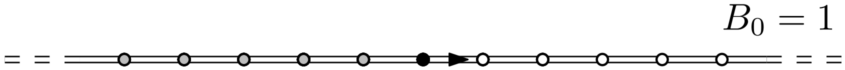


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

$$B_{n+1} - B_n = \left\{ \right.$$

Éléments de preuve

2. Propriétés du processus d'exploration.

$B_n :=$ longueur du segment noir sur le bord à l'étape n.

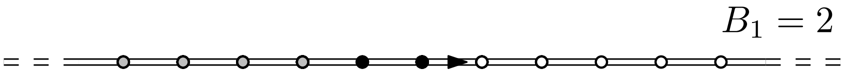


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

$$B_{n+1} - B_n = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité} \quad p. \\ & \end{cases}$$

Éléments de preuve

2. Propriétés du processus d'exploration.

$B_n :=$ longueur du segment noir sur le bord à l'étape n.

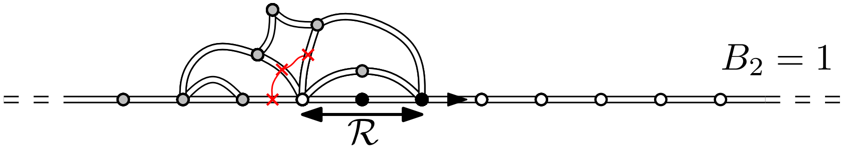


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPQ.

$$B_{n+1} - B_n = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité} \quad p. \\ -\mathcal{R} + 1 & \text{avec probabilité} \quad 1 - p. \end{cases}$$

Éléments de preuve

3. Calcul de $p^{\square}_{c,\mathrm{site}}$.

Éléments de preuve

3. Calcul de $p_{c,\mathrm{site}}^{\square}$.

- $(B_n)_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire de pas X (tuée dans $\mathbb{Z}_-$).

Éléments de preuve

3. Calcul de $p_{c,\mathrm{site}}^{\square}$.

- $(B_n)_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire de pas X (tuée dans $\mathbb{Z}_-$).
- $\mathbb{E}_p(X) = p + (1-p)(1-\mathbb{E}_p(\mathcal{R})) = \frac{9}{4}p - \frac{5}{4}$.

Éléments de preuve

3. Calcul de $p_{c,\mathrm{site}}^{\square}$.

- $(B_n)_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire de pas X (tuée dans $\mathbb{Z}_-$).
- $\mathbb{E}_p(X) = p + (1-p)(1-\mathbb{E}_p(\mathcal{R})) = \frac{9}{4}p - \frac{5}{4}$.

Par les propriétés standard des marches aléatoires,

Éléments de preuve

3. Calcul de $p_{c,\mathrm{site}}^{\square}$.

- $(B_n)_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire de pas X (tuée dans $\mathbb{Z}_-$).
- $\mathbb{E}_p(X) = p + (1-p)(1-\mathbb{E}_p(\mathcal{R})) = \frac{9}{4}p - \frac{5}{4}$.

Par les propriétés standard des marches aléatoires,

- $p \leq 5/9 \Longrightarrow \mathbb{P}_p\left(\exists n \geq 0 \mid B_n = 0\right) = 1$.

Éléments de preuve

3. Calcul de $p^{\square}_{c,\mathrm{site}}$.

- $(B_n)_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire de pas X (tuée dans $\mathbb{Z}_-$).
- $\mathbb{E}_p(X) = p + (1-p)(1-\mathbb{E}_p(\mathcal{R})) = \frac{9}{4}p - \frac{5}{4}$.

Par les propriétés standard des marches aléatoires,

- $p \leq 5/9 \implies \mathbb{P}_p\left(\exists n \geq 0 \mid B_n = 0\right) = 1$.
- $p > 5/9 \implies \mathbb{P}_p\left(B_n \to +\infty,\ B_n > 0\ \forall n \geq 0\right) > 0$.

Éléments de preuve

3. Calcul de $p_{c,\mathrm{site}}^{\square}$.

- $(B_n)_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire de pas X (tuée dans $\mathbb{Z}_-$).
- $\mathbb{E}_p(X) = p + (1-p)(1 - \mathbb{E}_p(\mathcal{R})) = \frac{9}{4}p - \frac{5}{4}$.

Par les propriétés standard des marches aléatoires,

- $p \leq 5/9 \Longrightarrow \mathbb{P}_p\left(\exists n \geq 0 \mid B_n = 0\right) = 1$.
- $p > 5/9 \Longrightarrow \mathbb{P}_p\left(B_n \to +\infty,\ B_n > 0\ \forall n \geq 0\right) > 0$.

Conclusion : $p_{c,\mathrm{site}}^{\square} = 5/9$.

Question

"La limite d'échelle des probabilités de croisement est-elle universelle ?"

Probabilités de croisement

On s'intéresse aux propriétés des modèles **au point critique**.

Probabilités de croisement

On s'intéresse aux propriétés des modèles **au point critique**.

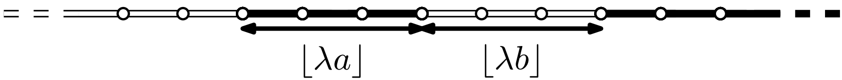


Figure: La condition au bord.

Probabilités de croisement

On s'intéresse aux propriétés des modèles **au point critique**.

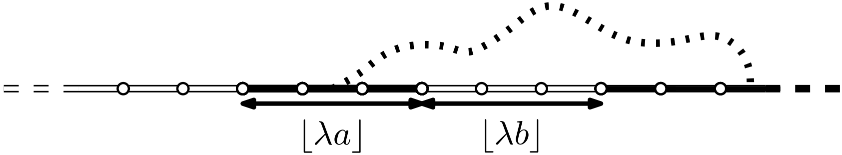


Figure: L'évènement de croisement $\mathsf{C}(\lambda a, \lambda b)$.

- $\mathsf{C}(\lambda a, \lambda b) =$ "les deux segments noirs sont dans le même cluster".

Probabilités de croisement

On s'intéresse aux propriétés des modèles **au point critique**.

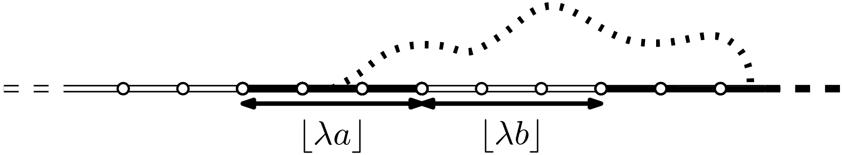


Figure: L'évènement de croisement $C(\lambda a, \lambda b)$.

- $C(\lambda a, \lambda b) =$ "les deux segments noirs sont dans le même cluster".
- Limite d'échelle : $\lim_{\lambda \to +\infty} \mathbb{P}(C(\lambda a, \lambda b))$.

Probabilités de croisement

Théorème (Angel '04)

Pour la percolation critique par site sur l'UIHPT,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mathbb{P}\left(\mathsf{C}^{\triangle}_{\mathrm{site}}(\lambda a, \lambda b)\right) = \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{b-a}{a+b}\right).$$

Probabilités de croisement

Théorème (Angel '04)

Pour la percolation critique par site sur l'UIHPT,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \mathbb{P}\left(\mathsf{C}^{\triangle}_{\mathrm{site}}(\lambda a, \lambda b)\right) = \frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{b-a}{a+b}\right).$$

- Analogue de la formule de Cardy-Smirnov.

Probabilités de croisement

Théorème (Angel '04)

Pour la percolation critique par site sur l'UIHPT,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \mathbb{P}\left(\mathsf{C}^{\triangle}_{\mathrm{site}}(\lambda a, \lambda b)\right) = \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{b-a}{a+b}\right).$$

- Analogue de la formule de Cardy-Smirnov.
- Conjecture d'universalité de Cardy : $\lim_{\lambda\to+\infty} \mathbb{P}(\mathsf{C}(\lambda a, \lambda b))$ ne dépend pas du modèle de percolation, ni du degré des faces.

Résultat

Théorème

Pour la percolation critique par site, arête et face sur l'UIHPT et l'UIHPQ,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mathbb{P}\left(\mathsf{C}(\lambda a, \lambda b)\right) = \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{b-a}{a+b}\right).$$

La limite d'échelle des probabilités de croisement est universelle.

Question

"À quoi ressemble la carte découpée le long d'une interface de percolation ?"

Cadre

Modèle de percolation **critique** par **site** sur l'**UIHPT**.

Cadre

Modèle de percolation **critique** par **site** sur l'**UIHPT**.

Rappel : $p_{c,\mathrm{site}}^{\triangle} = \frac{1}{2}$

Cadre

Modèle de percolation **critique** par **site** sur l'**UIHPT**.

Rappel : $p_{c,\mathrm{site}}^{\triangle} = \frac{1}{2}$

Figure: La condition au bord.

Cadre

Modèle de percolation **critique** par **site** sur l'**UIHPT**.

Rappel : $p_{c,\mathrm{site}}^{\triangle} = \frac{1}{2}$

Figure: La condition au bord.

- $\mathcal{H}_\bullet$, $\mathcal{H}_\circ$ = enveloppes des clusters du bord gauche et droit.

Cadre

Modèle de percolation **critique** par **site** sur l'**UIHPT**.

Rappel : $p^{\triangle}_{c,\mathrm{site}} = \frac{1}{2}$

Figure: La condition au bord.

- $\mathcal{H}_\bullet$, $\mathcal{H}_\circ$ = enveloppes des clusters du bord gauche et droit.
- $\partial\mathcal{H}_\bullet$, $\partial\mathcal{H}_\circ$ = bord des enveloppes $\mathcal{H}_\bullet$ et $\mathcal{H}_\circ$.

Processus d'exploration

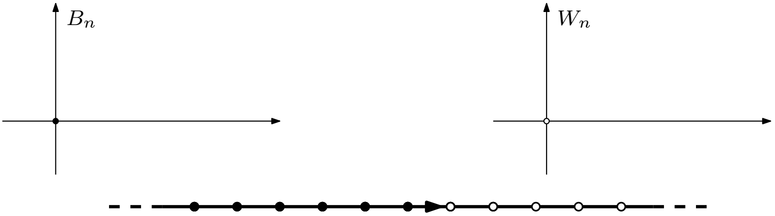


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B_n = taille (relative) du segment noir révélé sur le bord.
- W_n = taille (relative) du segment blanc révélé sur le bord.

Processus d'exploration

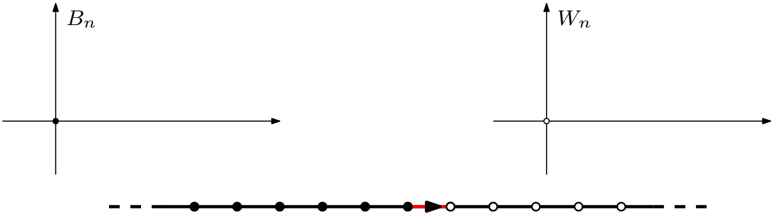


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B_n = taille (relative) du segment noir révélé sur le bord.
- W_n = taille (relative) du segment blanc révélé sur le bord.

Processus d'exploration

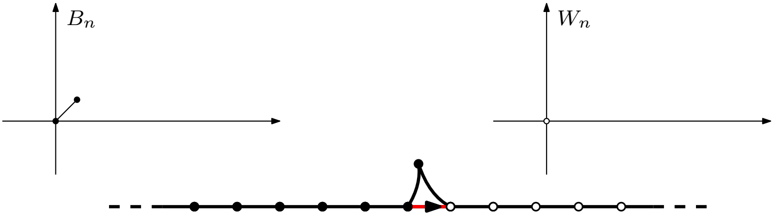


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B_n = taille (relative) du segment noir révélé sur le bord.
- W_n = taille (relative) du segment blanc révélé sur le bord.

Processus d'exploration

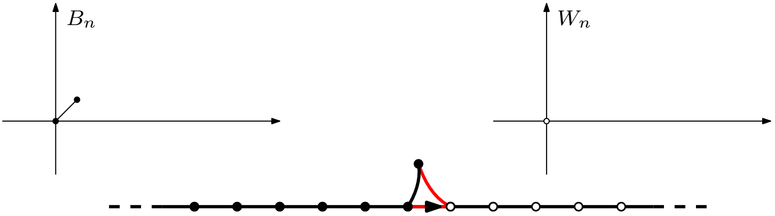


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B_n = taille (relative) du segment noir révélé sur le bord.
- W_n = taille (relative) du segment blanc révélé sur le bord.

Processus d'exploration

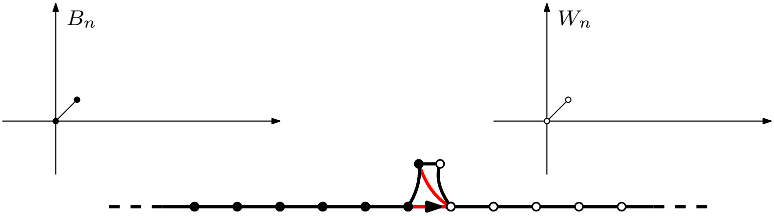


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B_n = taille (relative) du segment noir révélé sur le bord.
- W_n = taille (relative) du segment blanc révélé sur le bord.

Processus d'exploration

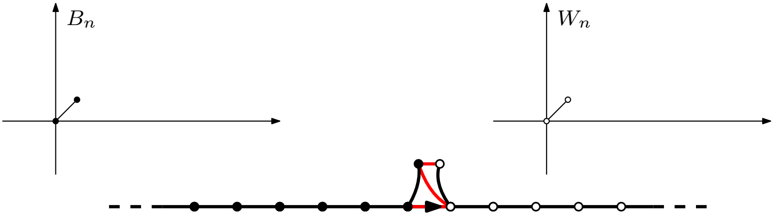


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B_n = taille (relative) du segment noir révélé sur le bord.
- W_n = taille (relative) du segment blanc révélé sur le bord.

Processus d'exploration

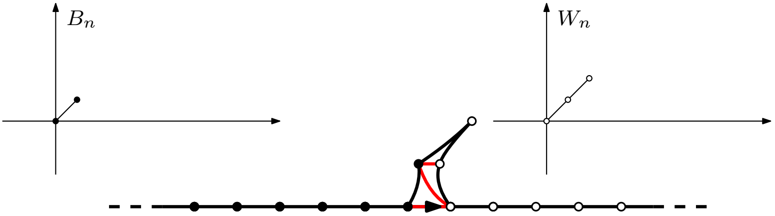


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B_n = taille (relative) du segment noir révélé sur le bord.
- W_n = taille (relative) du segment blanc révélé sur le bord.

Processus d'exploration

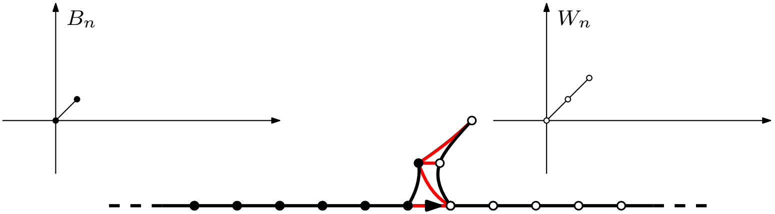


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B_n = taille (relative) du segment noir révélé sur le bord.
- W_n = taille (relative) du segment blanc révélé sur le bord.

Processus d'exploration

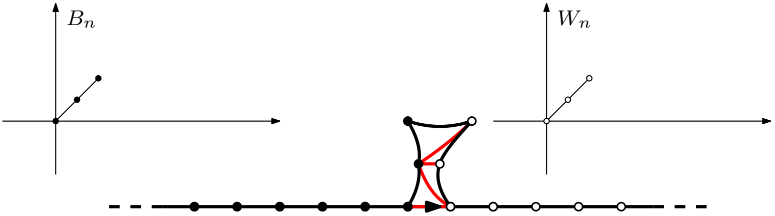


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B_n = taille (relative) du segment noir révélé sur le bord.
- W_n = taille (relative) du segment blanc révélé sur le bord.

Processus d'exploration

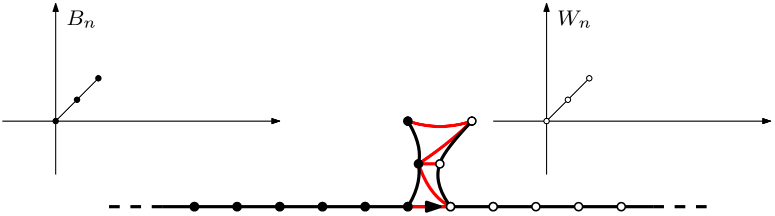


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B_n = taille (relative) du segment noir révélé sur le bord.
- W_n = taille (relative) du segment blanc révélé sur le bord.

Processus d'exploration

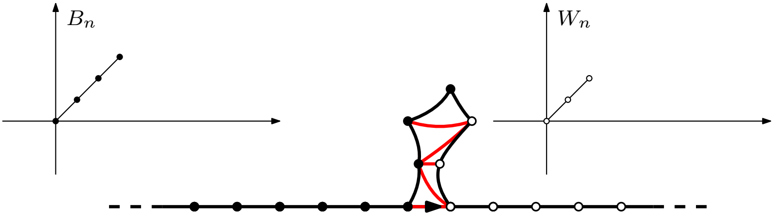


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B_n = taille (relative) du segment noir révélé sur le bord.
- W_n = taille (relative) du segment blanc révélé sur le bord.

Processus d'exploration

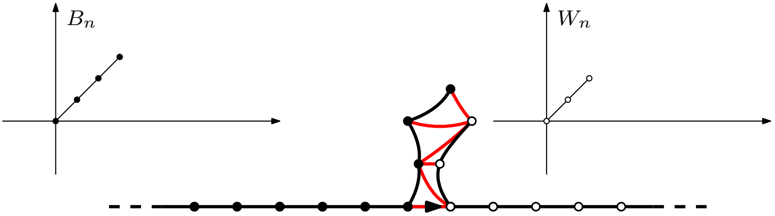


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B_n = taille (relative) du segment noir révélé sur le bord.
- W_n = taille (relative) du segment blanc révélé sur le bord.

Processus d'exploration

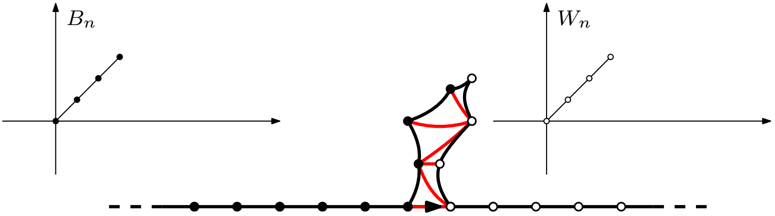


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B_n = taille (relative) du segment noir révélé sur le bord.
- W_n = taille (relative) du segment blanc révélé sur le bord.

Processus d'exploration

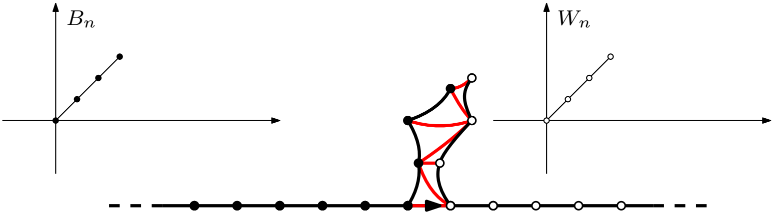


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B_n = taille (relative) du segment noir révélé sur le bord.
- W_n = taille (relative) du segment blanc révélé sur le bord.

Processus d'exploration

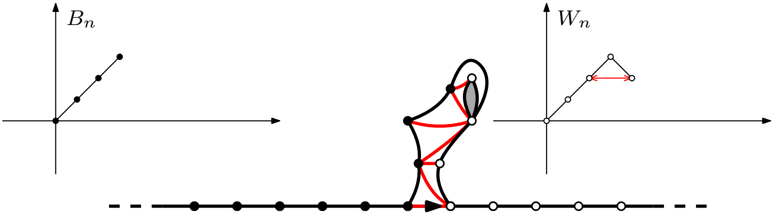


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B_n = taille (**relative**) du segment noir révélé sur le bord.
- W_n = taille (**relative**) du segment blanc révélé sur le bord.

Processus d'exploration

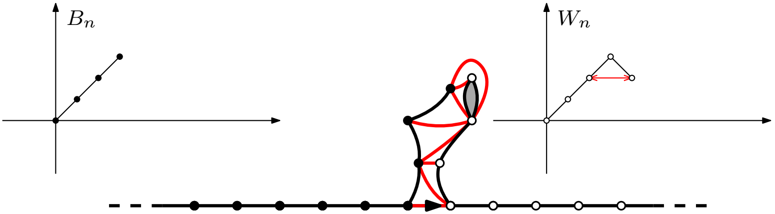


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B et W évoluent alternativement.
- Le sommet révélé est noir ou blanc avec probabilité $1/2$, indépendamment de B et W.

Processus d'exploration

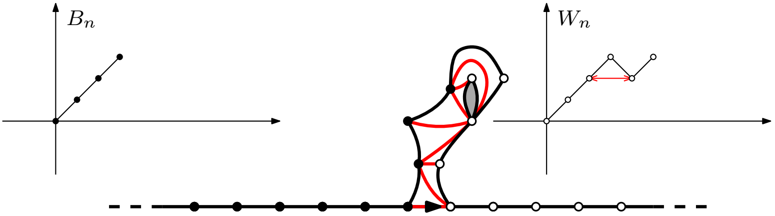


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B et W évoluent alternativement.
- Le sommet révélé est noir ou blanc avec probabilité $1/2$, indépendamment de B et W.

Processus d'exploration

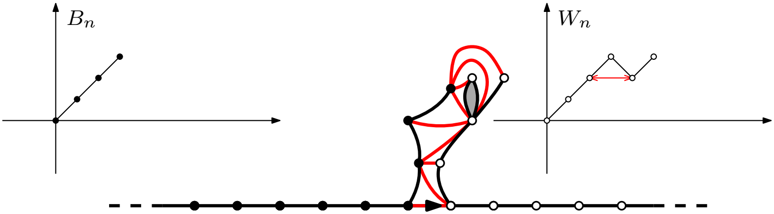


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B et W évoluent alternativement.
- Le sommet révélé est noir ou blanc avec probabilité $1/2$, indépendamment de B et W.

Processus d'exploration

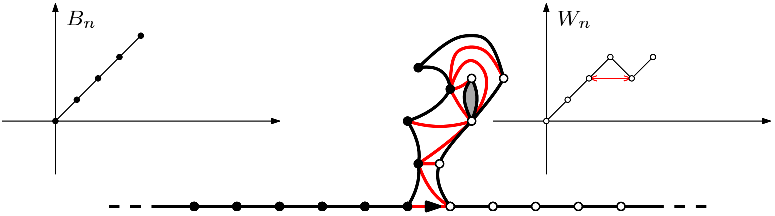


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B et W évoluent alternativement.
- Le sommet révélé est noir ou blanc avec probabilité $1/2$, indépendamment de B et W.

Processus d'exploration

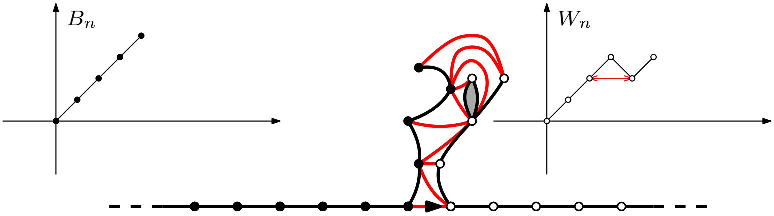


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B et W sont deux marches aléatoires indépendantes de même loi.
- Incréments de loi μ : $\mu(1) = 2/3$ et $\mu(-k) = 2q_k$
  $\hookrightarrow \mu((-\infty, -k]) \sim C \cdot k^{-\mathbf{3/2}}$.

Processus d'exploration

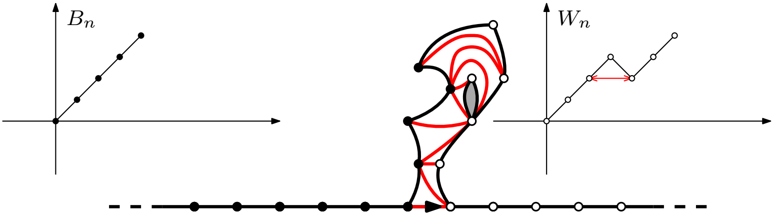


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B et W sont deux marches aléatoires indépendantes de même loi.
- Incréments de loi μ : $\mu(1) = 2/3$ et $\mu(-k) = 2q_k$
  $\hookrightarrow \mu((-\infty, -k]) \sim C \cdot k^{-\mathbf{3/2}}$.

Processus d'exploration

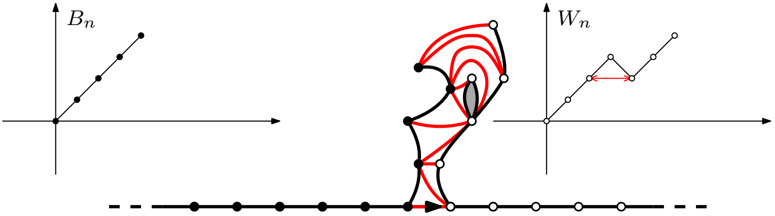


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B et W sont deux marches aléatoires indépendantes de même loi.
- Incréments de loi μ : $\mu(1) = 2/3$ et $\mu(-k) = 2q_k$
  $\hookrightarrow \mu((-\infty, -k]) \sim C \cdot k^{-\mathbf{3/2}}$.

Processus d'exploration

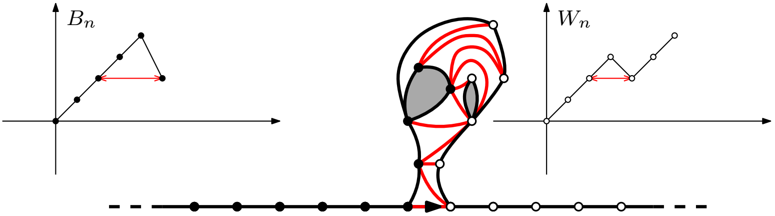


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- Taille des boucles $\leftrightarrow$ sauts négatifs de B ou W $(+1)$.

Processus d'exploration

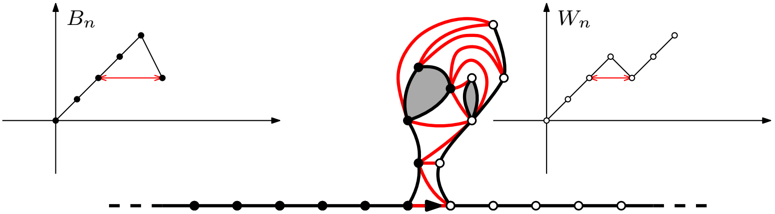


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- Taille des boucles $\leftrightarrow$ sauts négatifs de B ou W $(+1)$.

Processus d'exploration

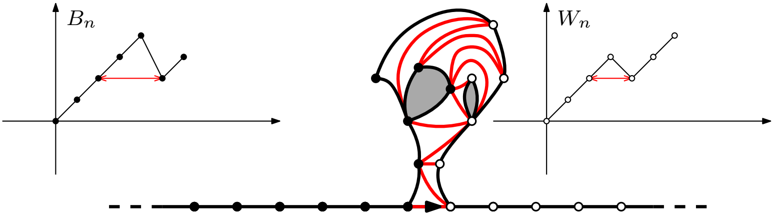


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- Taille des boucles $\leftrightarrow$ sauts négatifs de B ou W $(+1)$.

Processus d'exploration

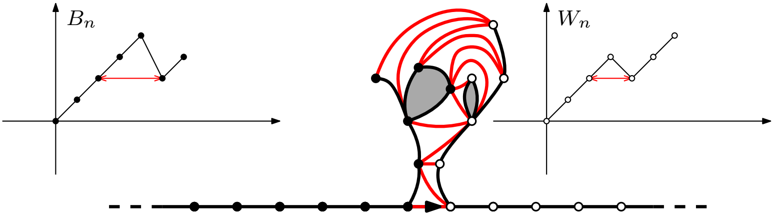


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- Les boucles contiennent des cartes de Boltzmann indépendantes.

Processus d'exploration

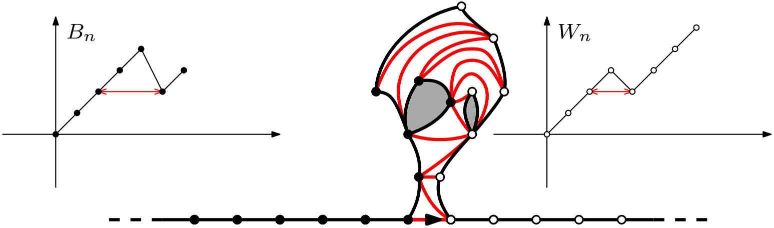


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- Les boucles contiennent des cartes de Boltzmann indépendantes.

Processus d'exploration

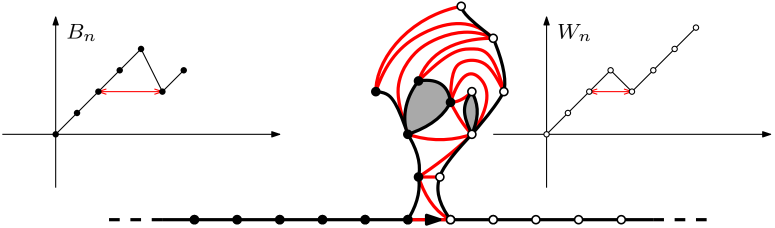


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- Les boucles contiennent des cartes de Boltzmann indépendantes.

Processus d'exploration

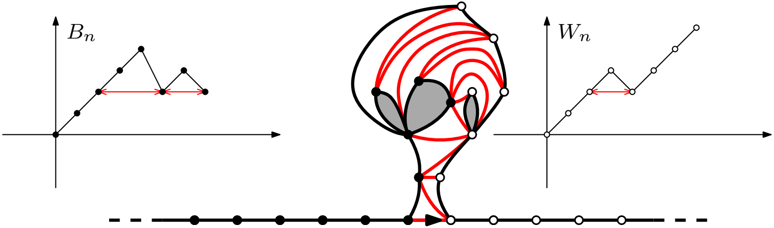


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- Boucles incidentes à un sommet $\leftrightarrow$ excursions de B ou W $(+1)$
$\hookrightarrow$ loi géométrique.

Processus d'exploration

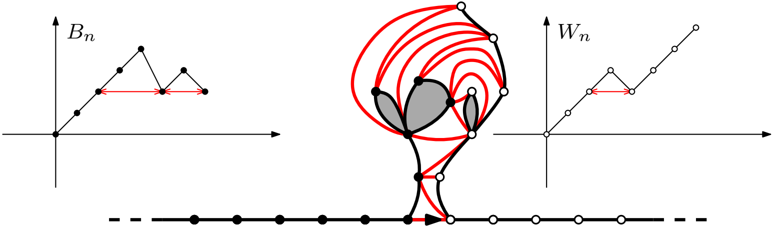


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- Boucles incidentes à un sommet $\leftrightarrow$ excursions de B ou W $(+1)$
  $\hookrightarrow$ loi géométrique.

Processus d'exploration

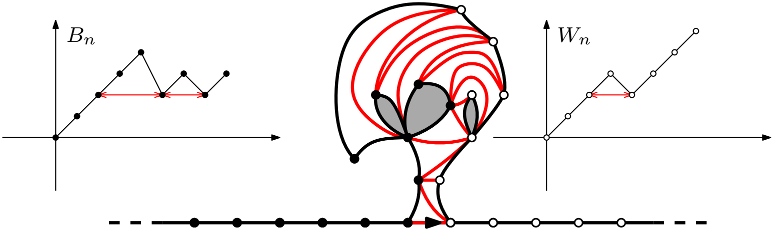


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- Boucles incidentes à un sommet $\leftrightarrow$ excursions de B ou W $(+1)$
  $\hookrightarrow$ loi géométrique.

Processus d'exploration

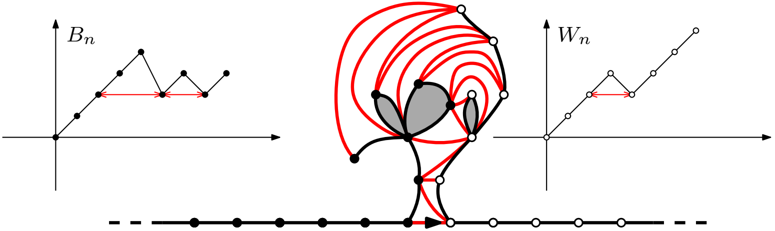


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- Boucles incidentes à un sommet $\leftrightarrow$ excursions de B ou W $(+1)$
$\hookrightarrow$ loi géométrique.

Processus d'exploration

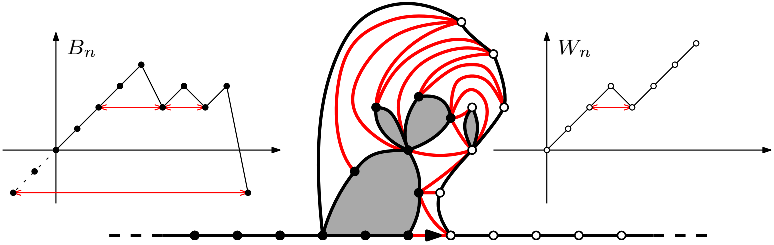


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- Boucles incidentes au bord $\leftrightarrow$ nouveaux minima de B et W
  $\hookrightarrow$ loi biaisée par la taille.

Processus d'exploration

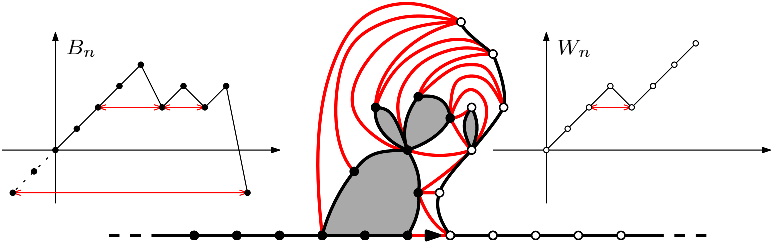


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- Boucles incidentes au bord $\leftrightarrow$ nouveaux minima de B et W
  $\hookrightarrow$ loi biaisée par la taille.

Processus d'exploration

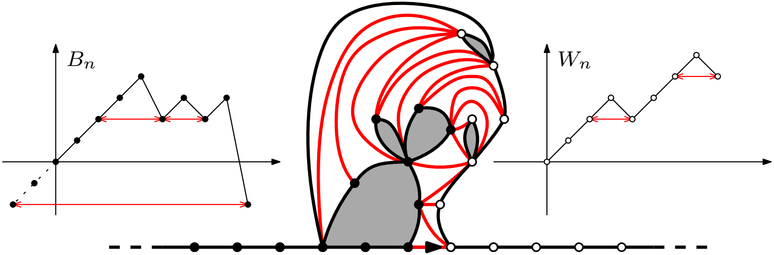


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B code le bord de l'enveloppe du cluster noir $\partial\mathcal{H}_\bullet$.
- W code le bord de l'enveloppe du cluster blanc $\partial\mathcal{H}_\circ$.

Processus d'exploration

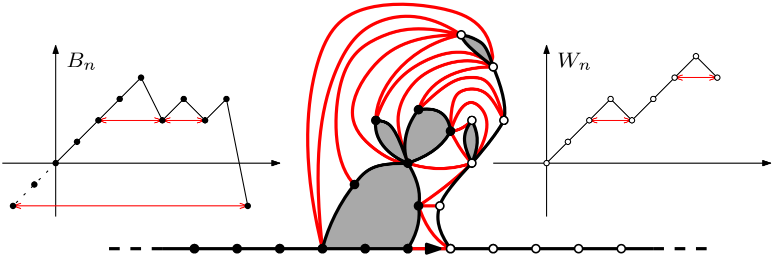


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B code le bord de l'enveloppe du cluster noir $\partial\mathcal{H}_\bullet$.
- W code le bord de l'enveloppe du cluster blanc $\partial\mathcal{H}_\circ$.

Processus d'exploration

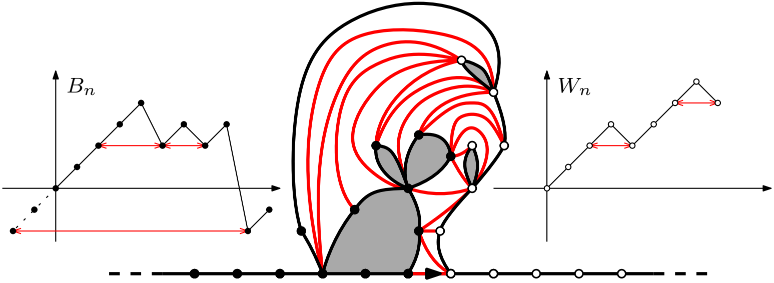


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- B code le bord de l'enveloppe du cluster noir $\partial\mathcal{H}_\bullet$.
- W code le bord de l'enveloppe du cluster blanc $\partial\mathcal{H}_\circ$.

Processus d'exploration

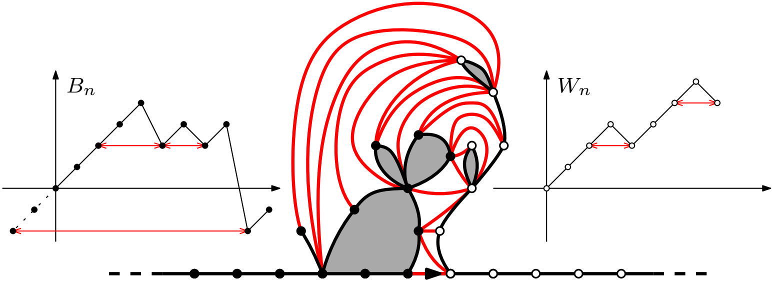


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- $\partial\mathcal{H}_\bullet =$ quotient de $\mathbb{Z}$ par la relation d'équivalence

$$i \sim_\bullet j \quad \text{ssi} \quad B_i = B_j = \inf_{i\wedge j \leq k \leq i \vee j} B_k.$$

Arbres à boucles

$\partial\mathcal{H}_\bullet$ et $\partial\mathcal{H}_\circ$ sont des arbres à boucles infinis.

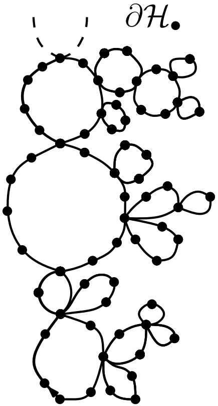


Figure: Le bord de l'enveloppe du cluster noir $\partial\mathcal{H}_\bullet$.

Arbres à boucles

$\partial\mathcal{H}_\bullet$ et $\partial\mathcal{H}_\circ$ sont décrits par leurs **arbres de composantes**.

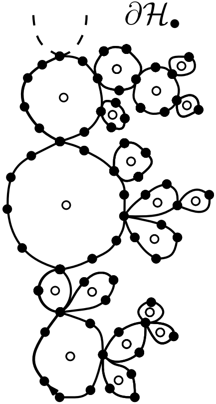


Figure: Le bord de l'enveloppe du cluster noir $\partial\mathcal{H}_\bullet$.

Arbres à boucles

$\partial\mathcal{H}_\bullet$ et $\partial\mathcal{H}_\circ$ sont décrits par leurs arbres de composantes.

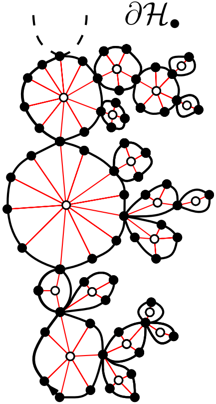


Figure: $\partial\mathcal{H}_\bullet$ et son arbre de composantes.

Arbres à boucles

$\partial\mathcal{H}_\bullet$ et $\partial\mathcal{H}_\circ$ sont décrits par leurs arbres de composantes.

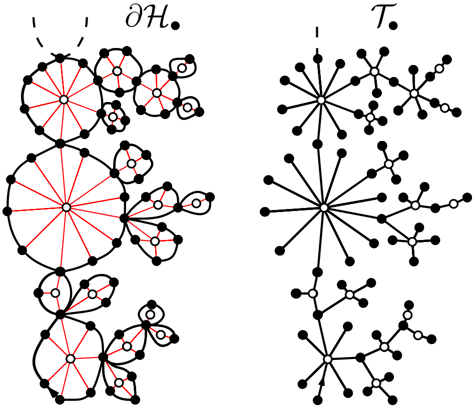


Figure: $\partial\mathcal{H}_\bullet$ et son arbre de composantes $\mathcal{T}_\bullet$.

Arbres à boucles

$\partial\mathcal{H}_\bullet$ et $\partial\mathcal{H}_\circ$ sont décrits par leurs arbres de composantes.

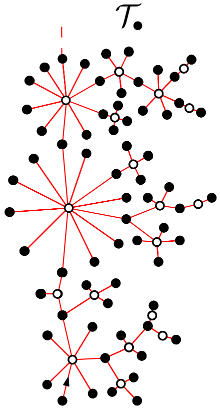


Figure: L'arbre de composantes $\mathcal{T}_\bullet$ de $\partial\mathcal{H}_\bullet$.

Arbres à boucles

$\partial\mathcal{H}_\bullet$ et $\partial\mathcal{H}_\circ$ sont décrits par leurs arbres de composantes.

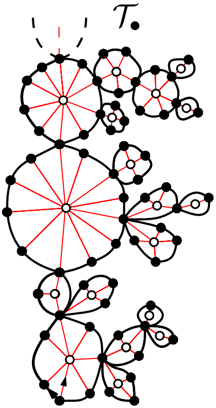


Figure: $\partial\mathcal{H}_\bullet$ et son arbre de composantes $\mathcal{T}_\bullet$.

Arbres à boucles

$\partial\mathcal{H}_\bullet$ et $\partial\mathcal{H}_\circ$ sont décrits par leurs arbres de composantes.

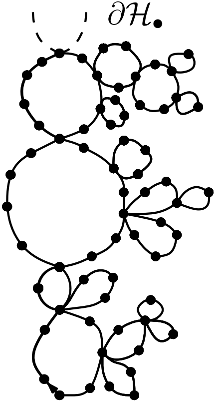


Figure: Le bord de l'enveloppe du cluster noir $\partial\mathcal{H}_\bullet$.

Arbres à boucles

$\partial\mathcal{H}_\bullet$ et $\partial\mathcal{H}_\circ$ sont décrits par leurs arbres de composantes.

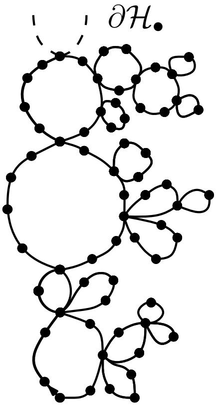


Figure: Le bord de l'enveloppe du cluster noir $\partial\mathcal{H}_\bullet$.

Arbres à deux types infinis

On introduit les mesures de probabilité

$$\mu_\bullet(k) := \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k \quad \text{et} \quad \mu_\circ(k) := \frac{\mu(-k)}{1-\mu(1)}.$$

Arbres à deux types infinis

On introduit les mesures de probabilité

$$\mu_\bullet(k) := \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k \quad \text{et} \quad \mu_\circ(k) := \frac{\mu(-k)}{1-\mu(1)}.$$

On note $m_\bullet$ la moyenne de $\mu_\bullet$, $m_\circ$ la moyenne de $\mu_\circ$

$$\longrightarrow \quad m_\bullet m_\circ = 1 \quad (\text{“loi critique”}).$$

Arbres à deux types infinis

On introduit les mesures de probabilité

$$\mu_\bullet(k) := \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k \quad \text{et} \quad \mu_\circ(k) := \frac{\mu(-k)}{1-\mu(1)}.$$

On note $m_\bullet$ la moyenne de $\mu_\bullet$, $m_\circ$ la moyenne de $\mu_\circ$

$$\longrightarrow \quad m_\bullet m_\circ = 1 \quad (\text{“loi critique”}).$$

Les lois biaisées par la taille sont définies par

$$\bar{\mu}_\bullet(k) := \frac{k\mu_\bullet(k)}{m_\bullet} \quad \text{et} \quad \bar{\mu}_\circ(k) := \frac{k\mu_\circ(k)}{m_\circ}.$$

Arbres à deux types infinis

Figure: Construction d'un arbre à deux types infini.

Arbres à deux types infinis

Sur l'épine dorsale ($\bullet \to \circ$) : loi biaisée par la taille $\bar{\mu}_\bullet$.

Figure: Construction d'un arbre à deux types infini.

Arbres à deux types infinis

Choix uniforme du sommet de l'épine dorsale parmi les descendants.

Figure: Construction d'un arbre à deux types infini.

Arbres à deux types infinis

Choix uniforme du sommet de l'épine dorsale parmi les descendants.

Figure: Construction d'un arbre à deux types infini.

Arbres à deux types infinis

Choix uniforme du sommet de l'épine dorsale parmi les descendants.

Figure: Construction d'un arbre à deux types infini.

Arbres à deux types infinis

Sur l'épine dorsale ($\circ \to \bullet$): loi biaisée par la taille $\bar{\mu}_\circ$.

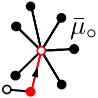


Figure: Construction d'un arbre à deux types infini.

Arbres à deux types infinis

Choix uniforme du sommet de l'épine dorsale parmi les descendants.

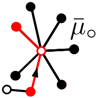


Figure: Construction d'un arbre à deux types infini.

Arbres à deux types infinis

Choix uniforme du sommet de l'épine dorsale parmi les descendants.

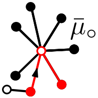


Figure: Construction d'un arbre à deux types infini.

Arbres à deux types infinis

Choix uniforme du sommet de l'épine dorsale parmi les descendants.

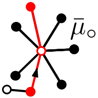


Figure: Construction d'un arbre à deux types infini.

Arbres à deux types infinis

L'épine dorsale est infinie.

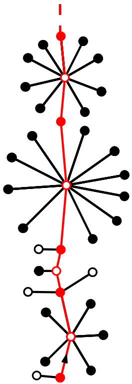


Figure: Construction d'un arbre à deux types infini.

Arbres à deux types infinis

Hors de l'épine : lois standard $\mu_\bullet$ et $\mu_\circ$ $\Rightarrow$ unique épine infinie.

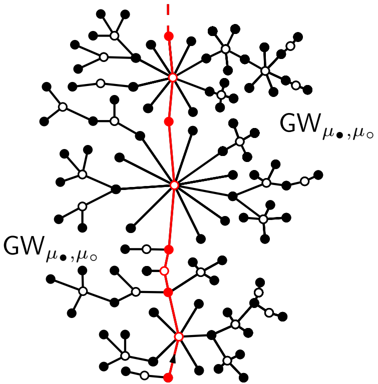


Figure: Construction d'un arbre à deux types infini.

Arbres à deux types infinis

$\mathsf{GW}^{(\infty)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$ est l'arbre de Galton-Watson conditionné à survivre.

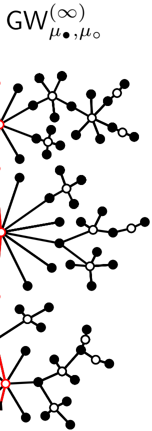


Figure: Construction d'un arbre à deux types infini.

Arbres à deux types infinis

$\mathsf{GW}^{(\infty,l)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$ est obtenue par élagage à gauche de l'épine.

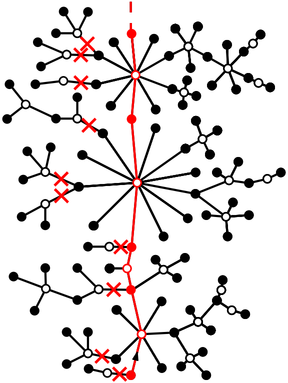


Figure: Construction d'un arbre à deux types infini.

Arbres à deux types infinis

$\mathsf{GW}^{(\infty,l)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$ est obtenue par élagage à gauche de l'épine.

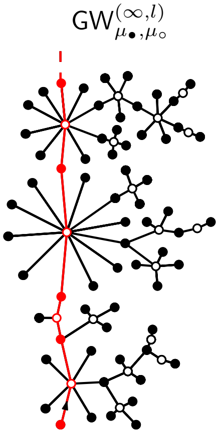


Figure: Construction d'un arbre à deux types infini.

Arbres à deux types infinis

$\mathsf{GW}^{(\infty)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$ est l'arbre de Galton-Watson conditionné à survivre.

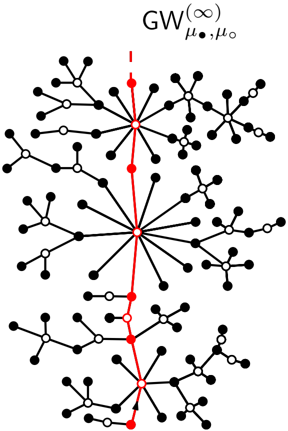


Figure: Construction d'un arbre à deux types infini.

Arbres à deux types infinis

$\mathrm{GW}^{(\infty,r)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$ est obtenue par élagage à droite de l'épine.

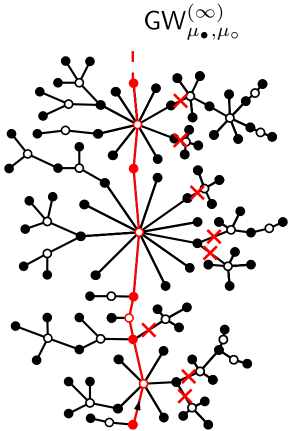


Figure: Construction d'un arbre à deux types infini.

Arbres à deux types infinis

$\mathsf{GW}^{(\infty,r)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$ est obtenue par élagage à droite de l'épine.

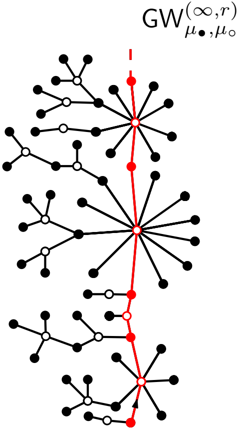


Figure: Construction d'un arbre à deux types infini.

Collier uniforme infini

Le collier uniforme infini est une triangulation à bord qui connecte deux copies de $\mathbb{N}$.

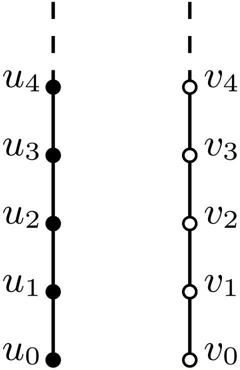


Figure: Construction du collier uniforme infini.

Collier uniforme infini

Le collier uniforme infini est une triangulation à bord qui connecte deux copies de $\mathbb{N}$.

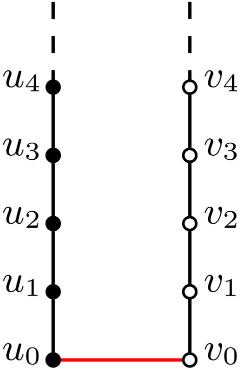


Figure: Construction du collier uniforme infini.

Collier uniforme infini

Le collier uniforme infini est une triangulation à bord qui connecte deux copies de $\mathbb{N}$.

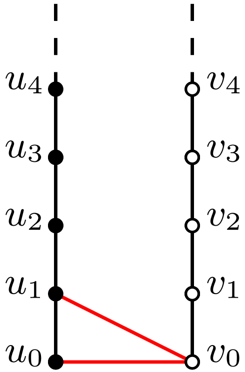


Figure: Construction du collier uniforme infini.

Collier uniforme infini

Le collier uniforme infini est une triangulation à bord qui connecte deux copies de $\mathbb{N}$.

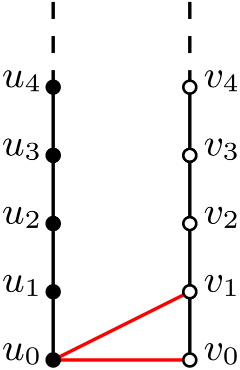


Figure: Construction du collier uniforme infini.

Collier uniforme infini

Le collier uniforme infini est une triangulation à bord qui connecte deux copies de $\mathbb{N}$.

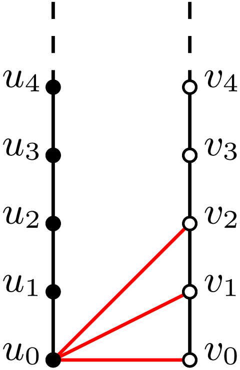


Figure: Construction du collier uniforme infini.

Collier uniforme infini

Le collier uniforme infini est une triangulation à bord qui connecte deux copies de $\mathbb{N}$.

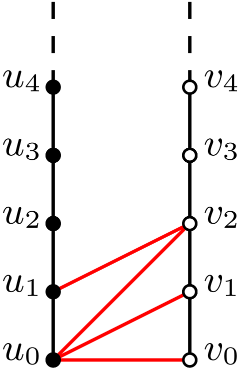


Figure: Construction du collier uniforme infini.

Collier uniforme infini

Le collier uniforme infini est une triangulation à bord qui connecte deux copies de $\mathbb{N}$.

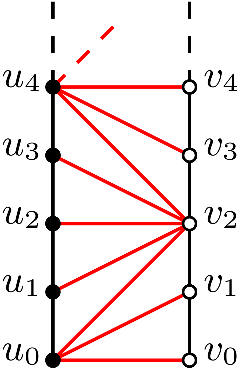


Figure: Construction du collier uniforme infini.

Collier uniforme infini

Le collier uniforme infini est une triangulation à bord qui connecte deux copies de $\mathbb{N}$.

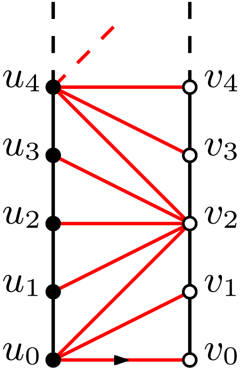
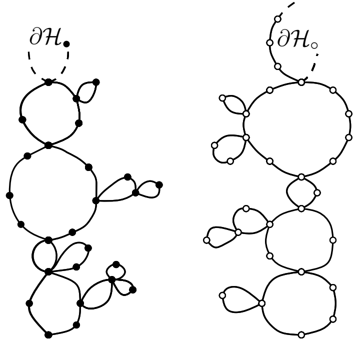


Figure: Construction du collier uniforme infini.

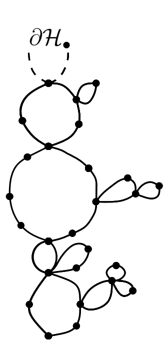
Décomposition de l'UIHPT

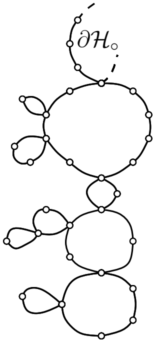


Théorème

- *$\partial\mathcal{H}_\bullet$ et $\partial\mathcal{H}_\circ$ sont des arbres à boucles infinis indépendants.*

Décomposition de l'UIHPT

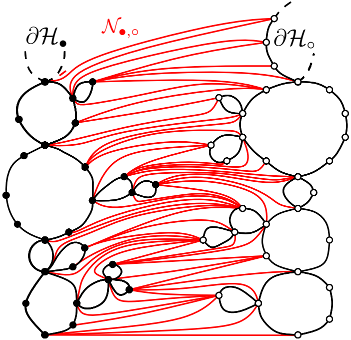




Théorème

- *$\partial\mathcal{H}_\bullet$ et $\partial\mathcal{H}_\circ$ sont des arbres à boucles infinis indépendants.*
- *Leurs arbres de composantes ont loi $\mathrm{GW}^{(\infty,l)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$ et $\mathrm{GW}^{(\infty,r)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$.*

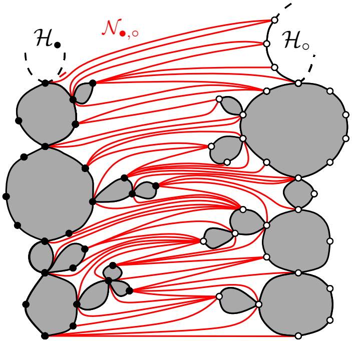
Décomposition de l'UIHPT



Théorème

- *$\partial\mathcal{H}_\bullet$ et $\partial\mathcal{H}_\circ$ sont des arbres à boucles infinis indépendants.*
- *Leurs arbres de composantes ont loi $\mathrm{GW}^{(\infty,l)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$ et $\mathrm{GW}^{(\infty,r)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$.*
- *$\partial\mathcal{H}_\bullet$ et $\partial\mathcal{H}_\circ$ sont connectés par un collier uniforme infini $\mathcal{N}_{\bullet,\circ}$.*

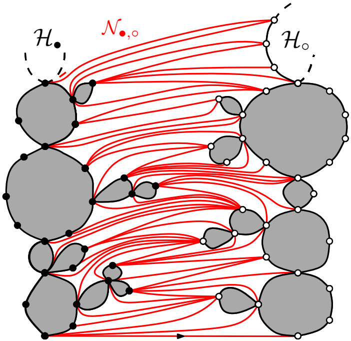
Décomposition de l'UIHPT



Théorème

- *$\partial\mathcal{H}_\bullet$ et $\partial\mathcal{H}_\circ$ sont des arbres à boucles infinis indépendants.*
- *Leurs arbres de composantes ont loi $\mathrm{GW}^{(\infty,l)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$ et $\mathrm{GW}^{(\infty,r)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$.*
- *$\partial\mathcal{H}_\bullet$ et $\partial\mathcal{H}_\circ$ sont connectés par un collier uniforme infini $\mathcal{N}_{\bullet,\circ}$.*
- *Les boucles contiennent des cartes de Boltzmann indépendantes.*

Décomposition de l'UIHPT



Théorème

- *$\partial\mathcal{H}_\bullet$ et $\partial\mathcal{H}_\circ$ sont des arbres à boucles infinis indépendants.*
- *Leurs arbres de composantes ont loi $\mathrm{GW}^{(\infty,l)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$ et $\mathrm{GW}^{(\infty,r)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$.*
- *$\partial\mathcal{H}_\bullet$ et $\partial\mathcal{H}_\circ$ sont connectés par un collier uniforme infini $\mathcal{N}_{\bullet,\circ}$.*
- *Les boucles contiennent des cartes de Boltzmann indépendantes.*

Une construction alternative de l'UIHPT...

On peut interpréter la percolation comme une exploration dynamique de l'UIHPT.

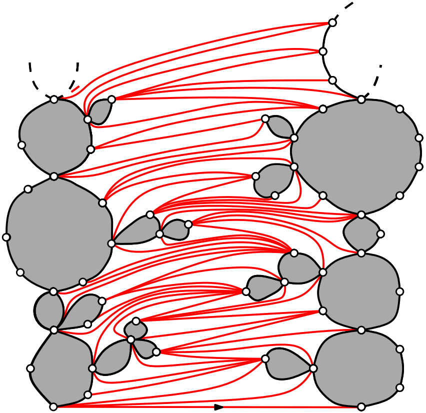


Figure: Construction de l'UIHPT.

Question

"À quoi ressemble une carte avec un grand cluster critique ?"

Limite d'échelle

Ce problème a été étudié par Curien et Kortchemski pour un modèle de percolation critique par site sur l'**UIPT**.

Limite d'échelle

Ce problème a été étudié par Curien et Kortchemski pour un modèle de percolation critique par site sur l'**UIPT**.

$\partial\mathcal{H}_n =$ bord de l'enveloppe du cluster ouvert issu de l'origine **conditionné à avoir périmètre** n.

Limite d'échelle

Ce problème a été étudié par Curien et Kortchemski pour un modèle de percolation critique par site sur l'**UIPT**.

$\partial\mathcal{H}_n =$ bord de l'enveloppe du cluster ouvert issu de l'origine **conditionné à avoir périmètre** n.

Théorème (Curien et Kortchemski '14)

En loi, pour la topologie de Gromov-Hausdorff,

$$n^{-2/3} \cdot \partial\mathcal{H}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} C \cdot \mathcal{L}_{3/2}.$$

$\mathcal{L}_{3/2}$ est l'arbre à boucles stable de paramètre $\mathbf{3/2}$.

Cadre

Modèle de percolation **critique** par **site** sur l'**UIHPT** $\left(p_{c,\mathrm{site}}^{\triangle} = \frac{1}{2}\right)$.

Cadre

Modèle de percolation **critique** par **site** sur l'**UIHPT** $\left(p_{c,\mathrm{site}}^{\triangle} = \frac{1}{2}\right)$.

Figure: La condition au bord.

Cadre

Modèle de percolation **critique** par **site** sur l'**UIHPT** $\left(p_{c,\mathrm{site}}^{\triangle} = \frac{1}{2}\right)$.

Figure: La condition au bord.

- $\mathcal{H}_{\circ}^{(l)}$, $\mathcal{H}_{\circ}^{(r)}$ $=$ enveloppes des clusters du bord gauche et droit.
- $\mathcal{H}_{\bullet}$ $=$ enveloppe du cluster de l'origine.

Cadre

Modèle de percolation **critique** par **site** sur l'**UIHPT** $\left(p_{c,\mathrm{site}}^{\triangle} = \frac{1}{2}\right)$.

Figure: La condition au bord.

- $\mathcal{H}_\circ^{(l)}$, $\mathcal{H}_\circ^{(r)}$ = enveloppes des clusters du bord gauche et droit.
- $\mathcal{H}_\bullet$ = enveloppe du cluster de l'origine.
- $\partial\mathcal{H}_\bullet$, $\partial\mathcal{H}_\circ^{(l)}$, $\partial\mathcal{H}_\circ^{(r)}$ = bord des enveloppes $\mathcal{H}_\bullet$, $\mathcal{H}_\circ^{(l)}$ et $\mathcal{H}_\circ^{(r)}$.

Notation

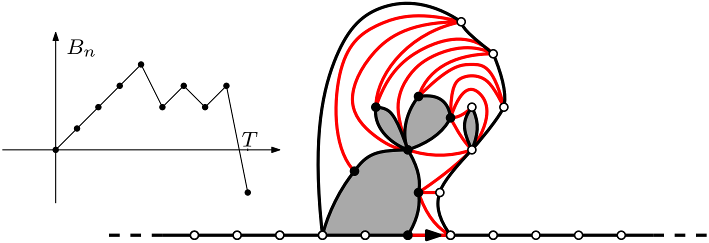


Figure: Le processus d'exploration.

Notation

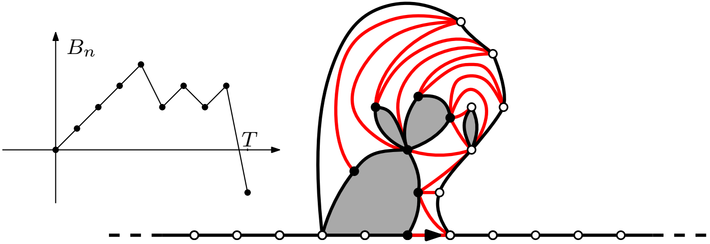


Figure: Le processus d'exploration.

- $T := \inf\{n \geq 0 : B_n < 0\}$ (fin de l'exploration).

Notation

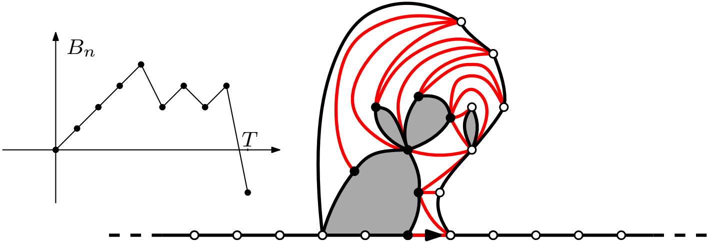


Figure: Le processus d'exploration.

- $T := \inf \{n \geq 0 : B_n < 0\}$ (fin de l'exploration).
- $|B| := \sup \{B_n : 0 \leq n \leq T\}$ ("taille" de $\partial\mathcal{H}_\bullet$).

Incipient Infinite Cluster

Théorème (Kesten '86)

Pour la percolation par site sur $\mathbb{Z}^2$,

Incipient Infinite Cluster

Théorème (Kesten '86)

Pour la percolation par site sur $\mathbb{Z}^2$,

$$\lim_{n \to +\infty} P_{p_c}\left(\cdot \mid 0 \leftrightarrow \mathbb{Z}^2 \backslash [-n, n]^2\right)$$

Incipient Infinite Cluster

Théorème (Kesten '86)

Pour la percolation par site sur $\mathbb{Z}^2$*,*

$$\lim_{n\to+\infty} P_{p_c}\left(\cdot \mid 0 \leftrightarrow \mathbb{Z}^2 \backslash [-n,n]^2\right) = \lim_{p\downarrow p_c} P_p\left(\cdot \mid |\mathcal{C}| = +\infty\right)$$

Incipient Infinite Cluster

Théorème (Kesten '86)

Pour la percolation par site sur $\mathbb{Z}^2$,

$$\lim_{n\to+\infty} P_{p_c}\left(\cdot \mid 0 \leftrightarrow \mathbb{Z}^2\setminus[-n,n]^2\right) = \lim_{p\downarrow p_c} P_p\left(\cdot \mid |\mathcal{C}| = +\infty\right) =: P_{\mathrm{IIC}}.$$

Incipient Infinite Cluster

Théorème (Kesten '86)

Pour la percolation par site sur $\mathbb{Z}^2$*,*

$$\lim_{n\to+\infty} P_{p_c}\left(\cdot \mid 0 \leftrightarrow \mathbb{Z}^2\backslash[-n,n]^2\right) = \lim_{p\downarrow p_c} P_p\left(\cdot \mid |\mathcal{C}| = +\infty\right) =: P_{\mathrm{IIC}}.$$

$P_{\mathrm{IIC}} =$ "amas critique émergent" (Incipient Infinite Cluster).

Incipient Infinite Cluster

Théorème (Kesten '86)

Pour la percolation par site sur $\mathbb{Z}^2$,

$$\lim_{n \to +\infty} P_{p_c}\left(\cdot \mid 0 \leftrightarrow \mathbb{Z}^2 \backslash [-n, n]^2\right) = \lim_{p \downarrow p_c} P_p\left(\cdot \mid |\mathcal{C}| = +\infty\right) =: P_{\mathrm{IIC}}.$$

Théorème

Pour la percolation critique par site sur l'UIHPT, au sens faible (pour la topologie locale),

Incipient Infinite Cluster

Théorème (Kesten '86)

Pour la percolation par site sur $\mathbb{Z}^2$,

$$\lim_{n\to+\infty} P_{p_c}\left(\cdot \mid 0 \leftrightarrow \mathbb{Z}^2\backslash[-n,n]^2\right) = \lim_{p\downarrow p_c} P_p\left(\cdot \mid |\mathcal{C}| = +\infty\right) =: P_{\mathrm{IIC}}.$$

Théorème

Pour la percolation critique par site sur l'UIHPT, au sens faible (pour la topologie locale),

$$\mathbb{P}(\cdot \mid |B| \geq n) \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \mathbb{P}_{\mathrm{IIC}}.$$

Incipient Infinite Cluster

Théorème (Kesten '86)

Pour la percolation par site sur $\mathbb{Z}^2$,

$$\lim_{n \to +\infty} P_{p_c}\left(\cdot \mid 0 \leftrightarrow \mathbb{Z}^2 \backslash [-n, n]^2\right) = \lim_{p \downarrow p_c} P_p\left(\cdot \mid |\mathcal{C}| = +\infty\right) =: P_{\mathrm{IIC}}.$$

Théorème

Pour la percolation critique par site sur l'UIHPT, au sens faible (pour la topologie locale),

$$\mathbb{P}(\cdot \mid |B| \geq n) \underset{n \to +\infty}{\Longrightarrow} \mathbb{P}_{\mathrm{IIC}}.$$

$\mathbb{P}_{\mathrm{IIC}}$ = "amas critique émergent" (Incipient Infinite Cluster)

Incipient Infinite Cluster

Théorème (Kesten '86)

Pour la percolation par site sur $\mathbb{Z}^2$,

$$\lim_{n\to+\infty} P_{p_c}\left(\cdot \mid 0 \leftrightarrow \mathbb{Z}^2\backslash[-n,n]^2\right) = \lim_{p\downarrow p_c} P_p\left(\cdot \mid |\mathcal{C}| = +\infty\right) =: P_{\mathrm{IIC}}.$$

Théorème

Pour la percolation critique par site sur l'UIHPT, au sens faible (pour la topologie locale),

$$\mathbb{P}(\cdot \mid |B| \geq n) \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \mathbb{P}_{\mathrm{IIC}}.$$

$\mathbb{P}_{\mathrm{IIC}} =$ "amas critique émergent" (Incipient Infinite Cluster) **annealed**.

Incipient Infinite Cluster

Théorème (Kesten '86)

Pour la percolation par site sur $\mathbb{Z}^2$,

$$\lim_{n\to+\infty} P_{p_c}\left(\cdot \mid 0 \leftrightarrow \mathbb{Z}^2\backslash[-n,n]^2\right) = \lim_{p\downarrow p_c} P_p\left(\cdot \mid |\mathcal{C}| = +\infty\right) =: P_{\mathrm{IIC}}.$$

Théorème

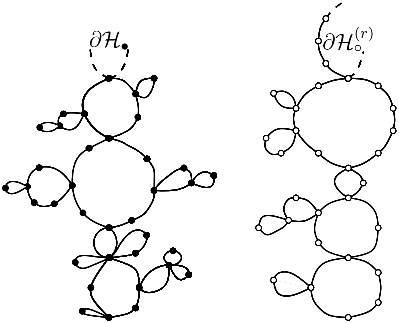
Pour la percolation critique par site sur l'UIHPT, au sens faible (pour la topologie locale),

$$\mathbb{P}(\cdot \mid |B| \geq n) \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \mathbb{P}_{\mathrm{IIC}}.$$

$\mathbb{P}_{\mathrm{IIC}}$ = "amas critique émergent" (Incipient Infinite Cluster) **annealed**.

$\mathbb{P}_{\mathrm{IIC}}$ est supportée par les triangulations du demi-plan coloriées (avec la même condition au bord).

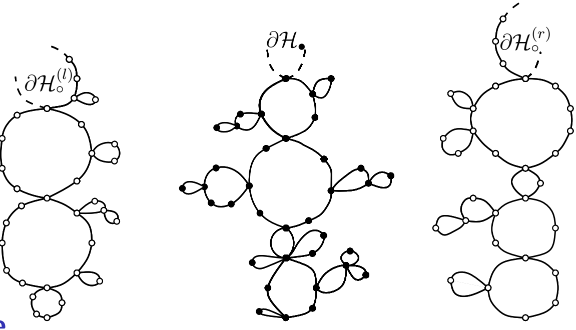
Décomposition de l'IIC



Théorème

- *$\partial\mathcal{H}_\bullet$, $\partial\mathcal{H}_\circ^{(l)}$ et $\partial\mathcal{H}_\circ^{(r)}$ sont des arbres à boucles infinis indépendants.*

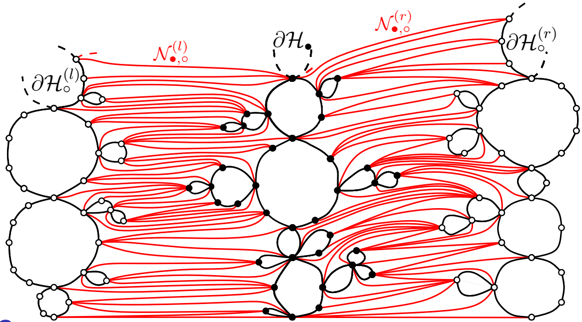
Décomposition de l'IIC



Théorème

- *$\partial\mathcal{H}_\bullet$, $\partial\mathcal{H}_\circ^{(l)}$ et $\partial\mathcal{H}_\circ^{(r)}$ sont des arbres à boucles infinis indépendants.*
- *Leurs arbres de composantes ont loi $\mathsf{GW}^{(\infty)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$, $\mathsf{GW}^{(\infty,l)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$ et $\mathsf{GW}^{(\infty,r)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$.*

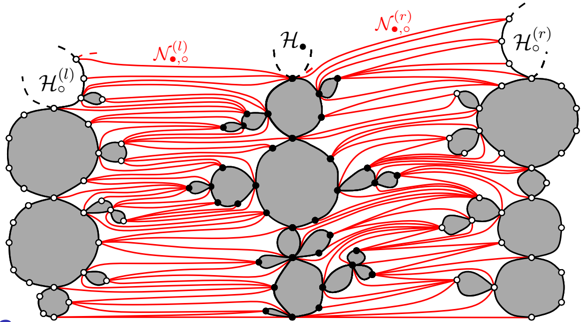
Décomposition de l'IIC



Théorème

- *$\partial\mathcal{H}_\bullet$, $\partial\mathcal{H}^{(l)}_\circ$ et $\partial\mathcal{H}^{(r)}_\circ$ sont des arbres à boucles infinis indépendants.*
- *Leurs arbres de composantes ont loi $\mathrm{GW}^{(\infty)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$, $\mathrm{GW}^{(\infty,l)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$ et $\mathrm{GW}^{(\infty,r)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$.*
- *$\partial\mathcal{H}_\bullet$ est relié à $\partial\mathcal{H}^{(l)}_\circ$ et $\partial\mathcal{H}^{(r)}_\circ$ par des colliers uniformes infinis.*

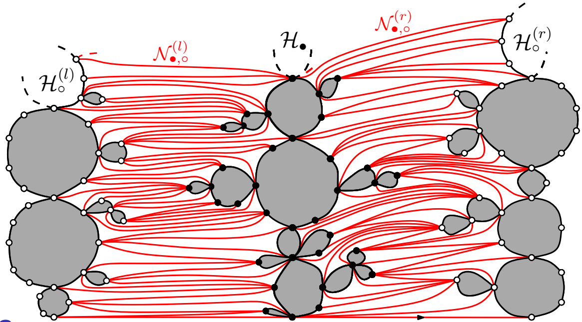
Décomposition de l'IIC



Théorème

- *$\partial\mathcal{H}_\bullet$, $\partial\mathcal{H}^{(l)}_\circ$ et $\partial\mathcal{H}^{(r)}_\circ$ sont des arbres à boucles infinis indépendants.*
- *Leurs arbres de composantes ont loi $\mathrm{GW}^{(\infty)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$, $\mathrm{GW}^{(\infty,l)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$ et $\mathrm{GW}^{(\infty,r)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$.*
- *$\partial\mathcal{H}_\bullet$ est relié à $\partial\mathcal{H}^{(l)}_\circ$ et $\partial\mathcal{H}^{(r)}_\circ$ par des colliers uniformes infinis.*
- *Les boucles contiennent des cartes de Boltzmann indépendantes.*

Décomposition de l'IIC



Théorème

- *$\partial\mathcal{H}_\bullet$, $\partial\mathcal{H}^{(l)}_\circ$ et $\partial\mathcal{H}^{(r)}_\circ$ sont des arbres à boucles infinis indépendants.*
- *Leurs arbres de composantes ont loi $\mathrm{GW}^{(\infty)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$, $\mathrm{GW}^{(\infty,l)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$ et $\mathrm{GW}^{(\infty,r)}_{\mu_\bullet,\mu_\circ}$.*
- *$\partial\mathcal{H}_\bullet$ est relié à $\partial\mathcal{H}^{(l)}_\circ$ et $\partial\mathcal{H}^{(r)}_\circ$ par des colliers uniformes infinis.*
- *Les boucles contiennent des cartes de Boltzmann indépendantes.*

Déformation de la géométrie

L'amas critique émergent peut être obtenu par "chirurgie".

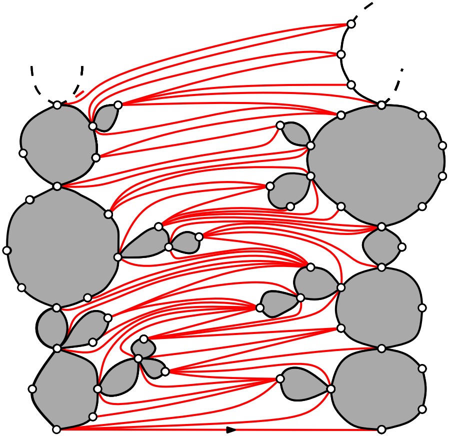


Figure: Décomposition de l'UIHPT.

Déformation de la géométrie

L'amas critique émergent peut être obtenu par "chirurgie".

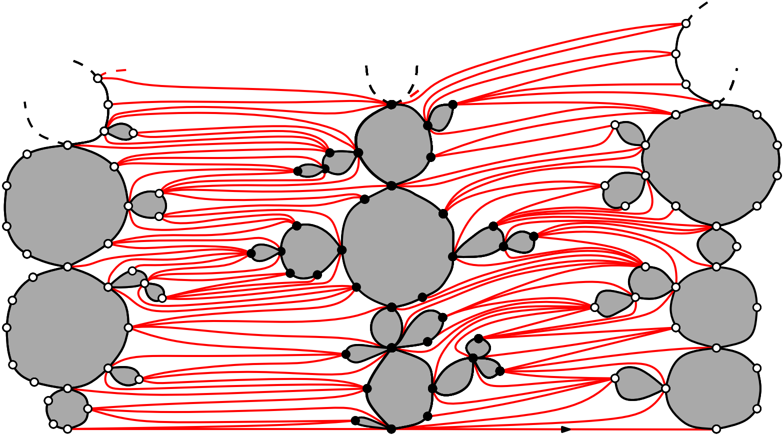
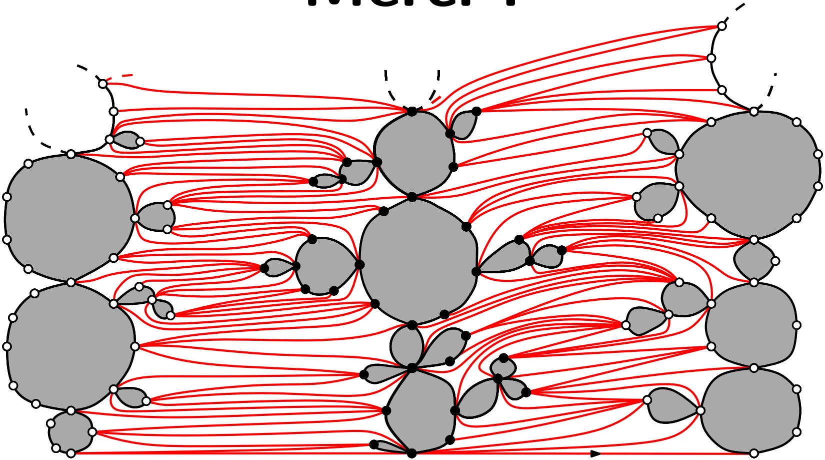


Figure: Décomposition de l'IIC.

Merci !



Éléments de preuve

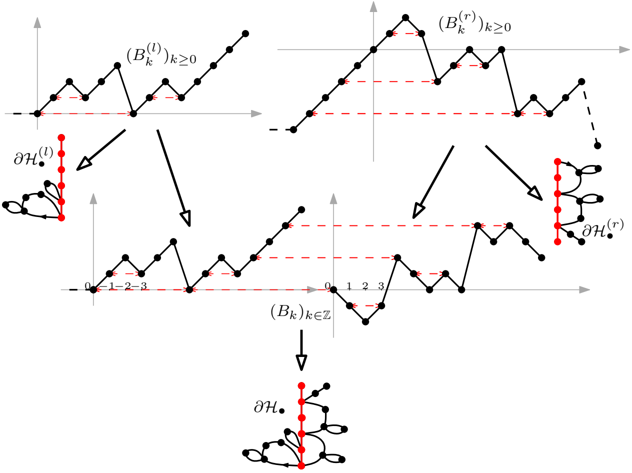


Figure: Codage de $\partial\mathcal{H}_\bullet$.

Éléments de preuve : percolation par site (UIHPT)

1. Le processus d'exploration.

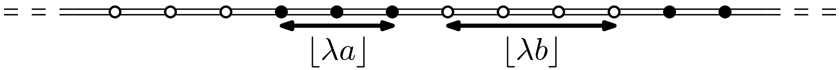


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Éléments de preuve : percolation par site (UIHPT)

1. Le processus d'exploration.

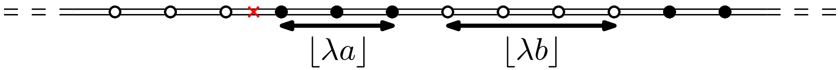


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Éléments de preuve : percolation par site (UIHPT)

1. Le processus d'exploration.

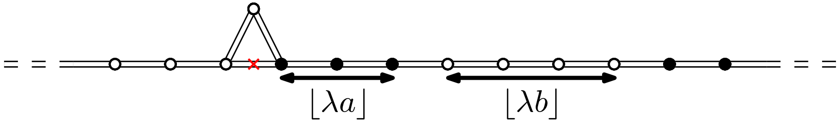


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Éléments de preuve : percolation par site (UIHPT)

1. Le processus d'exploration.

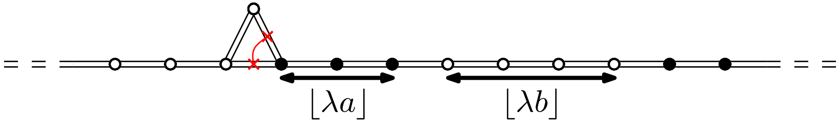


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Éléments de preuve : percolation par site (UIHPT)

1. Le processus d'exploration.

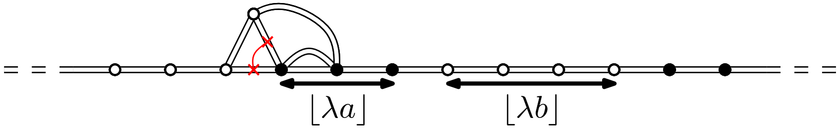


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Éléments de preuve : percolation par site (UIHPT)

1. Le processus d'exploration.

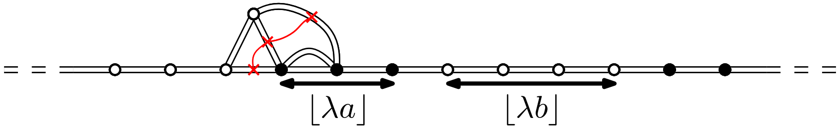


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Éléments de preuve : percolation par site (UIHPT)

1. Le processus d'exploration.

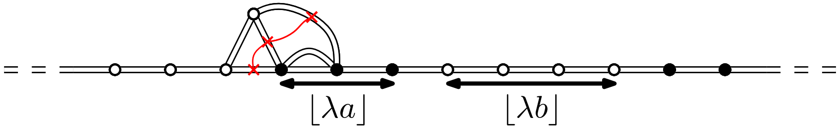


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- Le processus est bien défini.

Éléments de preuve : percolation par site (UIHPT)

1. Le processus d'exploration.

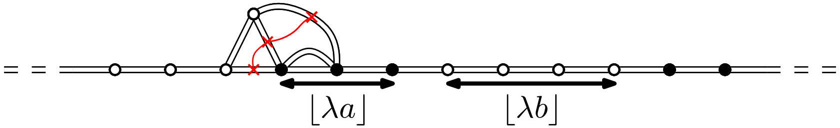


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- Le processus est bien défini.
- Les étapes du processus sont i.i.d. (propriété de Markov spatiale).

Éléments de preuve : percolation par site (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

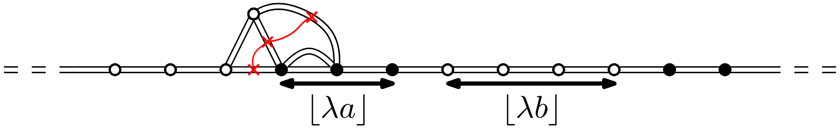


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Éléments de preuve : percolation par site (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

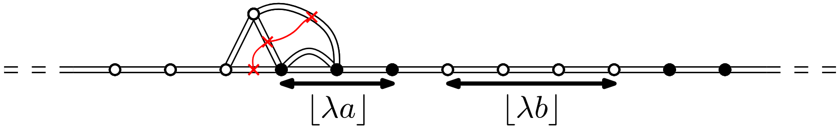


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- $B_n :=$ longueur du segment (fini) noir sur le bord à l'étape n.

Éléments de preuve : percolation par site (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

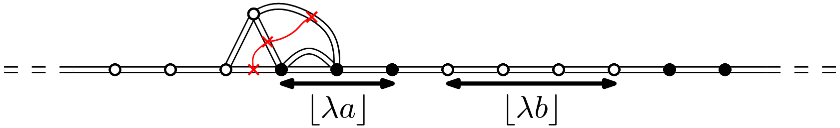


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- $B_n :=$ longueur du segment (fini) noir sur le bord à l'étape n.
- $T := \inf \{n \geq 0 \mid B_n \leq 0\}$ (fin de l'exploration).

Éléments de preuve : percolation par site (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

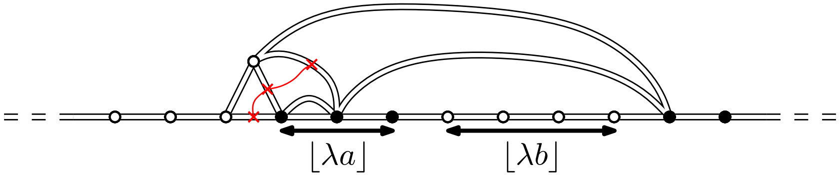


Figure: Le cas $|B_T| \geq \lfloor \lambda b \rfloor$.

Cas 1. $|B_T| \geq \lfloor \lambda b \rfloor$: $\mathrm{C}(\lambda a, \lambda b)$ est réalisé.

Éléments de preuve : percolation par site (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

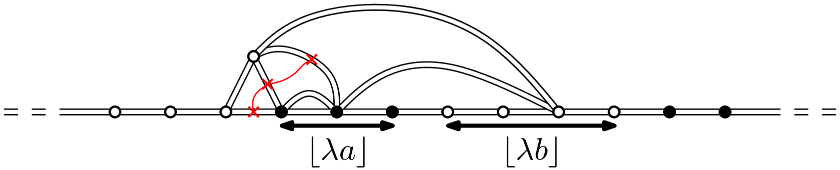


Figure: Le cas $|B_T| < \lfloor \lambda b \rfloor$.

Cas 2. $|B_T| < \lfloor \lambda b \rfloor$: $\mathrm{C}(\lambda a, \lambda b)$ n'est pas réalisé.

Éléments de preuve : percolation par site (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

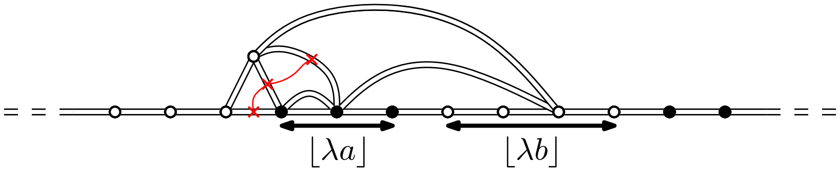


Figure: Le cas $|B_T| < \lfloor \lambda b \rfloor$.

Cas 2. $|B_T| < \lfloor \lambda b \rfloor$: $\mathsf{C}(\lambda a, \lambda b)$ n'est pas réalisé.

Conséquence : $\mathbb{P}\left(\mathsf{C}(\lambda a, \lambda b)\right) = \mathbb{P}\left(|B_T| \geq \lfloor \lambda b \rfloor\right)$.

Éléments de preuve : percolation par site (UIHPT)

3. Calcul de la limite d'échelle.

Éléments de preuve : percolation par site (UIHPT)

3. Calcul de la limite d'échelle.

- $(B_n)_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire de pas X (tuée dans $\mathbb{Z}_-$).

Éléments de preuve : percolation par site (UIHPT)

3. Calcul de la limite d'échelle.

- $(B_n)_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire de pas X (tuée dans $\mathbb{Z}_-$).
- $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{P}(X < -k) = Ck^{-3/2} + o(k^{-3/2})$.

Éléments de preuve : percolation par site (UIHPT)

3. Calcul de la limite d'échelle.

- $(B_n)_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire de pas X (tuée dans $\mathbb{Z}_-$).
- $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{P}(X < -k) = Ck^{-3/2} + o(k^{-3/2})$.

Au sens faible, pour la topologie de Skorokhod,

$$\left(\frac{B_{\lfloor \lambda t \rfloor}}{\lambda^{2/3}}\right)_{t\geq 0} \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{(d)} \kappa(\mathcal{S}_t)_{t\geq 0},$$

où $(\mathcal{S}_t)_{t\geq 0}$ processus de Lévy $3/2$-stable spectralement négatif.

Éléments de preuve : percolation par site (UIHPT)

3. Calcul de la limite d'échelle.

- $(B_n)_{n\geq 0}$ est une marche aléatoire de pas X (tuée dans $\mathbb{Z}_-$).
- $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{P}(X < -k) = Ck^{-3/2} + o(k^{-3/2})$.

Au sens faible, pour la topologie de Skorokhod,

$$\left(\frac{B_{\lfloor \lambda t \rfloor}}{\lambda^{2/3}}\right)_{t\geq 0} \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{(d)} \kappa(\mathcal{S}_t)_{t\geq 0},$$

où $(\mathcal{S}_t)_{t\geq 0}$ processus de Lévy 3/2-stable spectralement négatif.

Conclusion :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \mathbb{P}\left(\mathrm{C}(\lambda a, \lambda b)\right) = P_{\frac{a}{\kappa}}(\kappa|\mathcal{S}_\tau| \geq b) = \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{b-a}{a+b}\right).$$

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

1. Le processus d'exploration.

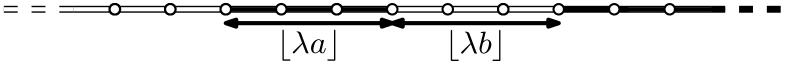


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

1. Le processus d'exploration.

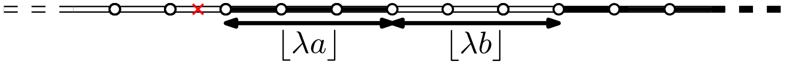


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

1. Le processus d'exploration.

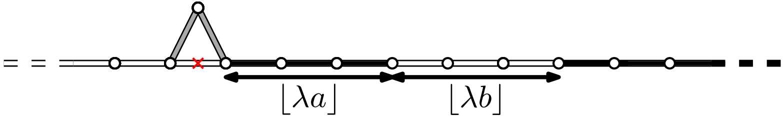


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

1. Le processus d'exploration.

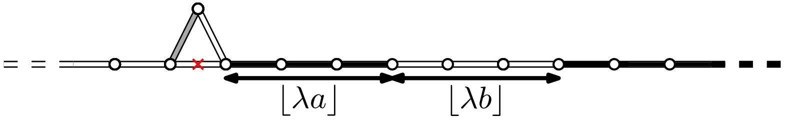


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

1. Le processus d'exploration.

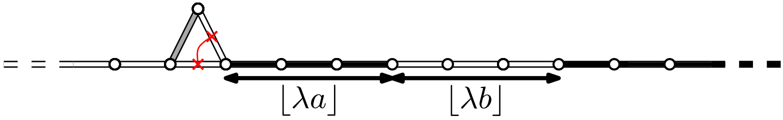


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

1. Le processus d'exploration.

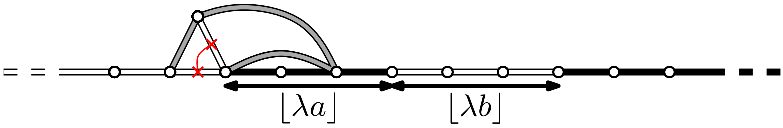


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

1. Le processus d'exploration.

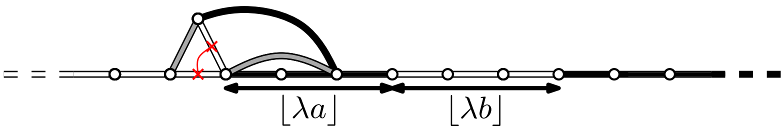


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

1. Le processus d'exploration.

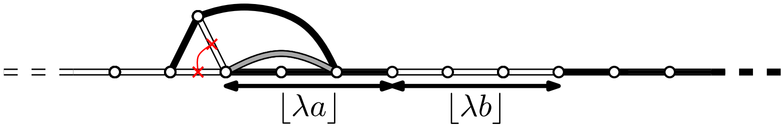


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

1. Le processus d'exploration.

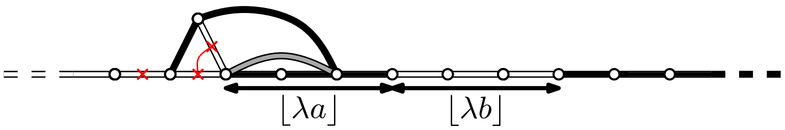


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

1. Le processus d'exploration.

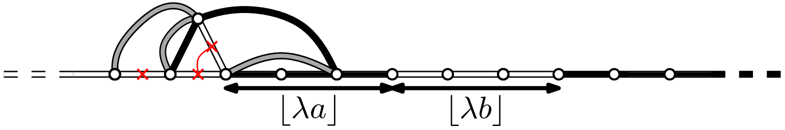


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

1. Le processus d'exploration.

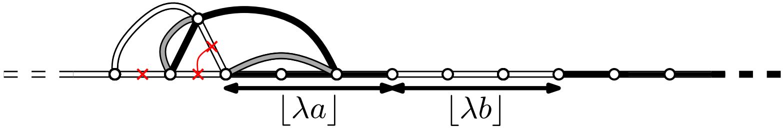


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

1. Le processus d'exploration.

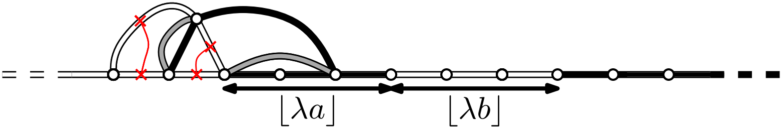


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

1. Le processus d'exploration.

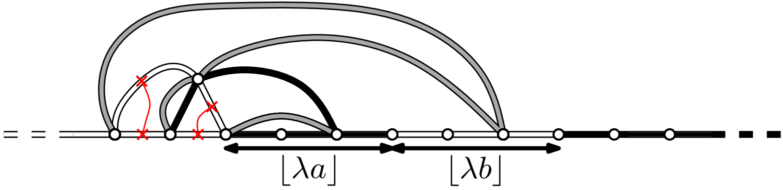


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

1. Le processus d'exploration.

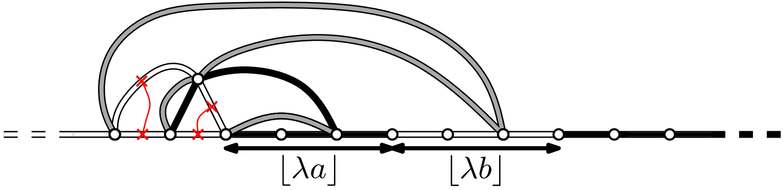


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- Le processus est bien défini.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

1. Le processus d'exploration.

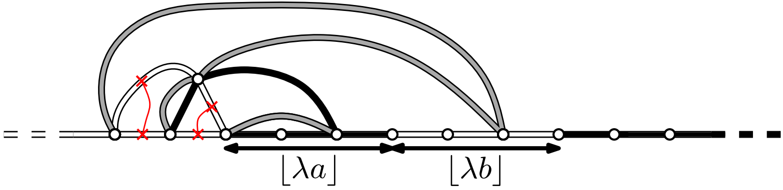


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- Le processus est bien défini.
- Les étapes ne sont **pas indépendantes** et **pas de même loi**.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

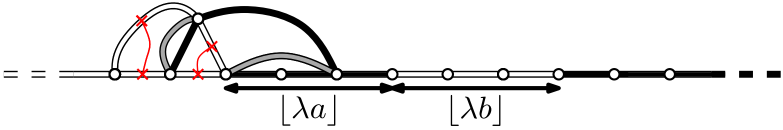


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

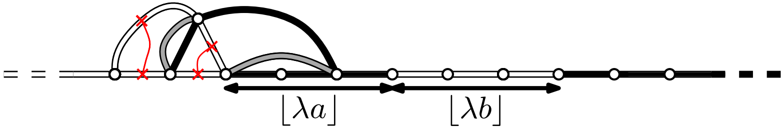


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- $B_n :=$ longueur du segment (fini) noir sur le bord à l'étape n.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

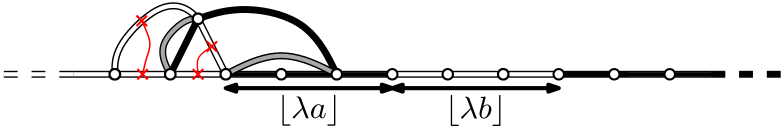


Figure: Processus d'exploration sur l'UIHPT.

- $B_n :=$ longueur du segment (fini) noir sur le bord à l'étape n.
- $T := \inf \{n \geq 0 \mid B_n \leq 0\}$ (fin de l'exploration).

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

Cas 1. $|B_T| > \lfloor \lambda b \rfloor$.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

Cas 1. $|B_T| > \lfloor \lambda b \rfloor$.

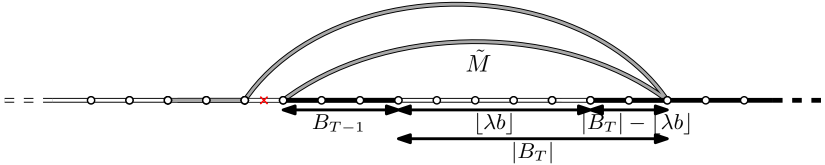


Figure: Le cas $|B_T| > \lfloor \lambda b \rfloor$.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

Cas 1. $|B_T| > \lfloor \lambda b \rfloor$.

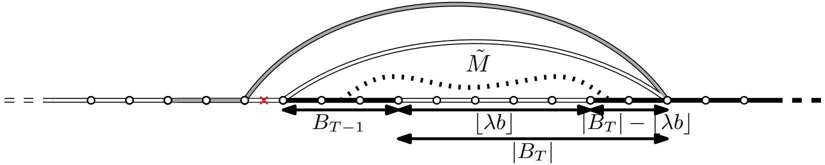


Figure: Le cas $|B_T| > \lfloor \lambda b \rfloor$.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

Cas 1. $|B_T| > \lfloor \lambda b \rfloor$. L'évènement $\mathsf{C}(\lambda a, \lambda b)$ est impliqué par C^1_λ.

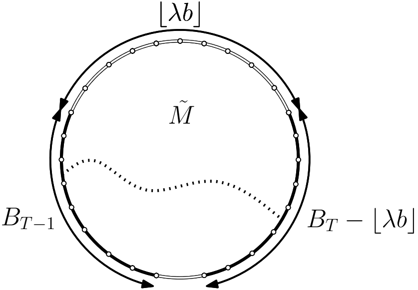


Figure: L'évènement C^1_λ.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

Cas 1. $|B_T| > \lfloor \lambda b \rfloor$. L'évènement $\mathsf{C}(\lambda a, \lambda b)$ est impliqué par C^1_λ.

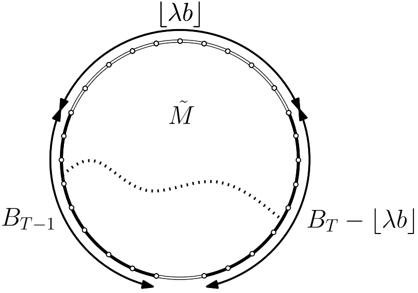


Figure: L'évènement C^1_λ.

De plus, $|B_T| - \lfloor \lambda b \rfloor$, $B_{T-1} \xrightarrow{\mathbb{P}} +\infty$.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

Cas 1. $|B_T| > \lfloor \lambda b \rfloor$. L'évènement $\mathrm{C}(\lambda a, \lambda b)$ est impliqué par C^1_λ.

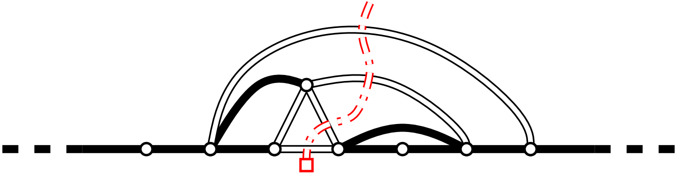


Figure: La configuration asymptotique pour C^1_λ.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

Cas 1. $|B_T| > \lfloor \lambda b \rfloor$. L'évènement $\mathsf{C}(\lambda a, \lambda b)$ est impliqué par C^1_λ.

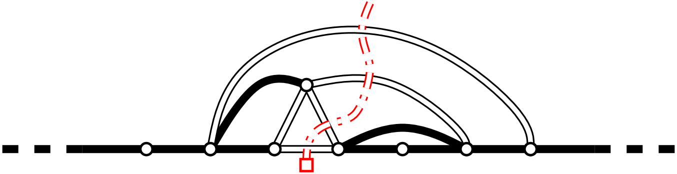


Figure: La configuration asymptotique pour C^1_λ.

- On a $\limsup \mathbb{P}\left(\left(\mathsf{C}^1_\lambda\right)^c\right) \leq \Theta_{\mathrm{dual}}(1 - p_c)$.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

Cas 1. $|B_T| > \lfloor \lambda b \rfloor$. L'évènement $\mathsf{C}(\lambda a, \lambda b)$ est impliqué par C^1_λ.

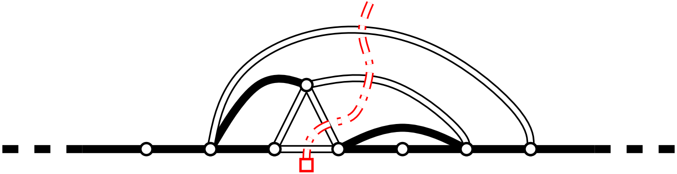


Figure: La configuration asymptotique pour C^1_λ.

- On a $\limsup \mathbb{P}\left(\left(\mathsf{C}^1_\lambda\right)^c\right) \leq \Theta_{\mathrm{dual}}(1 - p_c)$.
- De plus $1 - p_c < p_{c,\mathrm{dual}}$, donc $\mathbb{P}(\mathsf{C}^1_\lambda) \longrightarrow 1$.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

Cas 2. $|B_T| < \lfloor \lambda b \rfloor$.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

Cas 2. $|B_T| < \lfloor \lambda b \rfloor$.

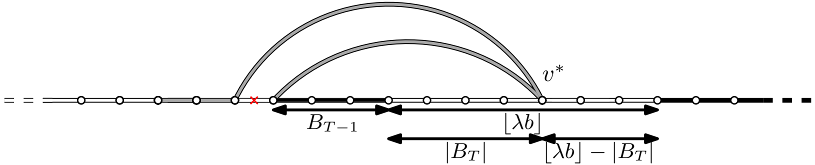


Figure: Le cas $|B_T| < \lfloor \lambda b \rfloor$.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

Cas 2. $|B_T| < \lfloor \lambda b \rfloor$.

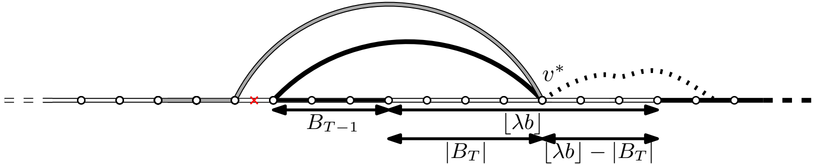


Figure: Le cas $|B_T| < \lfloor \lambda b \rfloor$.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

Cas 2. $|B_T| < \lfloor \lambda b \rfloor$. L'évènement $\mathsf{C}(\lambda a, \lambda b)$ implique C^2_λ.

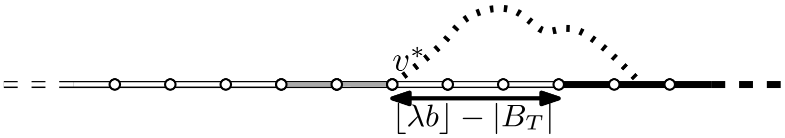


Figure: L'évènement C^2_λ.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

Cas 2. $|B_T| < \lfloor \lambda b \rfloor$. L'évènement $\mathsf{C}(\lambda a, \lambda b)$ implique C^2_λ.

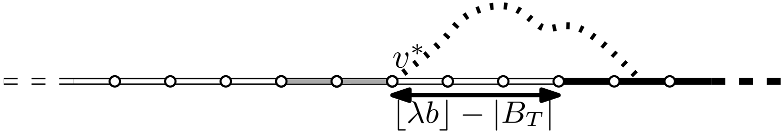


Figure: L'évènement C^2_λ.

De plus, $\lfloor \lambda b \rfloor - |B_T| \xrightarrow{\mathbb{P}} +\infty$.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

Cas 2. $|B_T| < \lfloor \lambda b \rfloor$. L'évènement $\mathsf{C}(\lambda a, \lambda b)$ implique C_λ^2.

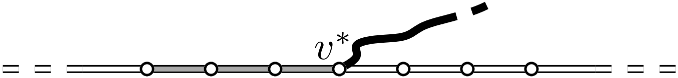


Figure: La configuration asymptotique pour C_λ^2.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

Cas 2. $|B_T| < \lfloor \lambda b \rfloor$.   L'évènement $\mathsf{C}(\lambda a, \lambda b)$ implique C_λ^2.

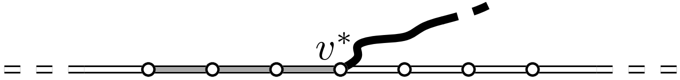


Figure: La configuration asymptotique pour C_λ^2.

- On a $\limsup \mathbb{P}\left(\mathsf{C}_\lambda^2\right) \leq \Theta(p_c)$.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

Cas 2. $|B_T| < \lfloor \lambda b \rfloor$. L'évènement $\mathsf{C}(\lambda a, \lambda b)$ implique C_λ^2.

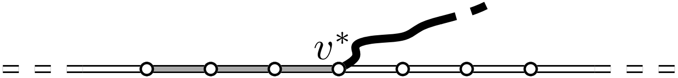


Figure: La configuration asymptotique pour C_λ^2.

- On a $\limsup \mathbb{P}\left(\mathsf{C}_\lambda^2\right) \leq \Theta(p_c)$.
- De plus $\Theta(p_c) = 0$, donc $\mathbb{P}(\mathsf{C}_\lambda^2) \longrightarrow 0$.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

2. Propriétés du processus d'exploration.

Cas 2. $|B_T| < \lfloor \lambda b \rfloor$. L'évènement $\mathrm{C}(\lambda a, \lambda b)$ implique C_λ^2.

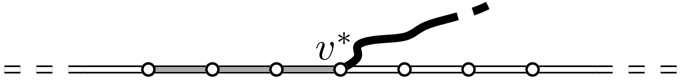


Figure: La configuration asymptotique pour C_λ^2.

- On a $\limsup \mathbb{P}\left(\mathrm{C}_\lambda^2\right) \leq \Theta(p_c)$.
- De plus $\Theta(p_c) = 0$, donc $\mathbb{P}(\mathrm{C}_\lambda^2) \longrightarrow 0$.

Conséquence : $\lim \mathbb{P}\left(\mathrm{C}(\lambda a, \lambda b)\right) = \lim \mathbb{P}\left(|B_T| > \lfloor \lambda b \rfloor\right)$.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

3. Calcul de la limite d'échelle.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

3. Calcul de la limite d'échelle.

- $(B_n)_{n\geq 0}$ se comporte comme une marche aléatoire de pas X (tuée dans $\mathbb{Z}_-$) **lorsque le nombre F_n d'arêtes libres est non-nul**.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

3. Calcul de la limite d'échelle.

- $(B_n)_{n\geq 0}$ se comporte comme une marche aléatoire de pas X (tuée dans $\mathbb{Z}_-$) **lorsque le nombre F_n d'arêtes libres est non-nul**.
- $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{P}(X < -k) = Ck^{-3/2} + o(k^{-3/2})$.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

3. Calcul de la limite d'échelle.

- $(B_n)_{n\geq 0}$ se comporte comme une marche aléatoire de pas X (tuée dans $\mathbb{Z}_-$) **lorsque le nombre F_n d'arêtes libres est non-nul**.
- $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{P}(X < -k) = Ck^{-3/2} + o(k^{-3/2})$.
- $\#\{0 \leq k < n : F_n = 0\} = o\left(n^{1/3+\varepsilon}\right)$ en probabilité.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

3. Calcul de la limite d'échelle.

- $(B_n)_{n\geq 0}$ se comporte comme une marche aléatoire de pas X (tuée dans $\mathbb{Z}_-$) **lorsque le nombre F_n d'arêtes libres est non-nul**.
- $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{P}(X < -k) = Ck^{-3/2} + o(k^{-3/2})$.
- $\#\{0 \leq k < n : F_n = 0\} = o\left(n^{1/3+\varepsilon}\right)$ en probabilité.

On a encore au sens faible, pour la topologie de Skorokhod,

$$\left(\frac{B_{\lfloor \lambda t \rfloor}}{\lambda^{2/3}}\right)_{t\geq 0} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{(d)} \kappa(\mathcal{S}_t)_{t\geq 0},$$

où $(\mathcal{S}_t)_{t\geq 0}$ processus de Lévy 3/2-stable spectralement négatif.

Éléments de preuve : percolation par arête (UIHPT)

3. Calcul de la limite d'échelle.

- $(B_n)_{n\geq 0}$ se comporte comme une marche aléatoire de pas X (tuée dans $\mathbb{Z}_-$) **lorsque le nombre F_n d'arêtes libres est non-nul**.
- $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{P}(X < -k) = Ck^{-3/2} + o(k^{-3/2})$.
- $\#\{0 \leq k < n : F_n = 0\} = o\left(n^{1/3+\varepsilon}\right)$ en probabilité.

On a encore au sens faible, pour la topologie de Skorokhod,

$$\left(\frac{B_{\lfloor \lambda t \rfloor}}{\lambda^{2/3}}\right)_{t\geq 0} \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{(d)} \kappa(\mathcal{S}_t)_{t\geq 0},$$

où $(\mathcal{S}_t)_{t\geq 0}$ processus de Lévy $3/2$-stable spectralement négatif.

Conclusion :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \mathbb{P}\left(\mathrm{C}(\lambda a, \lambda b)\right) = P_{\frac{a}{\kappa}}\left(\kappa|\mathcal{S}_\tau| > b\right) = \frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{b-a}{a+b}\right).$$

Transition de phase annealed et quenched

$p_c = p_c^{\mathrm{A}}$ est le seuil de percolation **annealed**.

Transition de phase annealed et quenched

$p_c = p_c^{\mathrm{A}}$ est le seuil de percolation **annealed**.

Mesure des cartes sur-critiques pour p :

$$\tilde{\Theta}(p) := \mathbf{P}^*_{\infty,\infty}\left(\left\{\mathbf{m} \in \mathcal{M} : \mathcal{P}_p^{e(\mathbf{m})}\left(|\mathcal{C}| = +\infty\right) > 0\right\}\right).$$

Transition de phase annealed et quenched

$p_c = p_c^{\mathrm{A}}$ est le seuil de percolation **annealed**.

Mesure des cartes sur-critiques pour p :

$$\tilde{\Theta}(p) := \mathbf{P}^*_{\infty,\infty}\left(\left\{\mathbf{m} \in \mathcal{M} : \mathcal{P}_p^{e(\mathbf{m})}\left(|\mathcal{C}| = +\infty\right) > 0\right\}\right).$$

- Seuil de percolation **annealed** : $p_c^{\mathrm{A}} := \inf\left\{p \in [0,1] : \tilde{\Theta}(p) > 0\right\}$.

Transition de phase annealed et quenched

$p_c = p_c^{\mathrm{A}}$ est le seuil de percolation **annealed**.

Mesure des cartes sur-critiques pour p :

$$\tilde{\Theta}(p) := \mathbf{P}^*_{\infty,\infty}\left(\left\{\mathbf{m} \in \mathcal{M} : \mathcal{P}_p^{\mathbf{e}(\mathbf{m})}(|\mathcal{C}| = +\infty) > 0\right\}\right).$$

- Seuil de percolation **annealed** : $p_c^{\mathrm{A}} := \inf\left\{p \in [0,1] : \tilde{\Theta}(p) > 0\right\}$.
- Seuil de percolation **quenched** : $p_c^{\mathrm{Q}} := \inf\left\{p \in [0,1] : \tilde{\Theta}(p) = 1\right\}$.

Transition de phase annealed et quenched

$p_c = p_c^{\mathrm{A}}$ est le seuil de percolation **annealed**.

Mesure des cartes sur-critiques pour p :

$$\tilde{\Theta}(p) := \mathbf{P}^*_{\infty,\infty}\left(\left\{\mathbf{m} \in \mathcal{M} : \mathcal{P}_p^{e(\mathbf{m})}\left(|\mathcal{C}| = +\infty\right) > 0\right\}\right).$$

- Seuil de percolation **annealed** : $p_c^{\mathrm{A}} := \inf\left\{p \in [0,1] : \tilde{\Theta}(p) > 0\right\}$.
- Seuil de percolation **quenched** : $p_c^{\mathrm{Q}} := \inf\left\{p \in [0,1] : \tilde{\Theta}(p) = 1\right\}$.

$$\text{Loi du zero-un} \Longrightarrow p_c^{\mathrm{A}} = p_c^{\mathrm{Q}}.$$