Vivons-nous dans un trisp coloré ?

Ariane Carrance (ICJ, Lyon)

Journée Cartes - 6 octobre 2017

Contexte

- Gravité quantique : l'espace-temps comme objet géométrique aléatoire
- Pour construire cet objet : passer par discrétisation
- Distribution de probabilité sur des structures discrètes : théorie quantique des champs (QFT)

Contexte

- QFT : théorie physique décrite par un champ $\varphi : X \to \mathbb{C}$, et une action $S[\varphi]$ (perturbation polynomiale d'une mesure gaussienne $D\varphi$) :

$$Z(\varphi) = \int D\varphi e^{-S[\varphi]}$$

- La théorie est caractérisée par ses fonctions de corrélation :

$$\langle \varphi_{x_\mathbf{1}} \cdots \varphi_{x_\mathbf{t}} \bar{\varphi}_{\bar{x}_\mathbf{1}} \cdots \bar{\varphi}_{\bar{x}_{\bar{\mathbf{t}}}} \rangle = \frac{1}{Z} \int D\varphi \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} (S[\varphi])^p \cdot \varphi_{x_\mathbf{1}} \cdots \varphi_{x_\mathbf{t}} \bar{\varphi}_{\bar{x}_\mathbf{1}} \cdots \bar{\varphi}_{\bar{x}_{\bar{\mathbf{t}}}}$$

- Série perturbative : interversion formelle série $\longleftrightarrow$ intégrale
- Termes non nuls dans cette série : correspondent à des appariements de facteurs φ_i avec des $\bar{\varphi}_i$ (théorème de Wick)
  $\to$ représentation par des **graphes de Feynman**, dont les arêtes portent des indices φ_i, et où les demi-arêtes autour des sommets sont donnés par les facteurs dans $S[\varphi]$:

$$Z(\varphi) = \sum_G A(G)$$

- Champs matriciels NxN: $\rightarrow$ les graphes de Feynman sont des graphes à rubans (cartes)
- Modèle type :

$$Z(M) = \sum_G |\lambda|^{V(G)} N^{\chi(G)}$$

- Cette pondération correspond à une discrétisation de l'**action d'Einstein-Hilbert** sur les cartes
- Cartes dominantes = cartes planaires
- Limite à grand N : carte planaire uniforme (dans une certaine classe selon le modèle) $\rightarrow$ CV vers la carte brownienne, sphérique

Modèles de tenseurs

- $D+1$ tenseurs $T_0, \ldots, T_D$ **colorés** de taille $N \to$ les graphes de Feynman sont des graphes $(D+1)$-colorés, qui encodent des **trisps colorés**
- Modèle type :

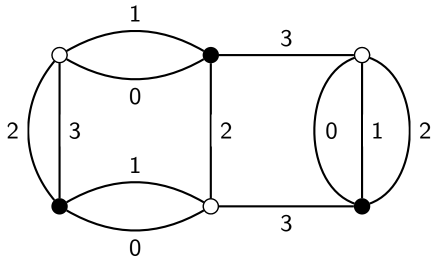
$$Z(\{T_i\}) = \sum_G |\lambda|^{V(G)} N^{D - \frac{2}{(D-1)!}\omega(G)}$$

- Au lieu du genre : le **degré** $\omega(G)$ (non topologique)
- Espace = **trisp coloré** aléatoire
- Trisps dominants = **melons** ; structure récursive, CV vers l'*arbre* brownien

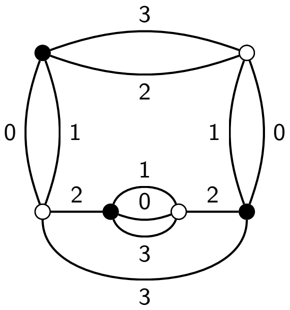
Définition

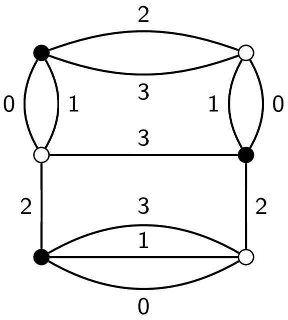
Un **graphe $(D+1)$-coloré** est un graphe $(D+1)$-régulier G, muni d'une coloration propre de ses arêtes $c : E(G) \to \{0, 1, \ldots, D\}$ (telle qu'il y ait exactement une arête de chaque couleur atour de chaque sommet).

- Dans la suite : graphes colorés **bipartis**



Degré

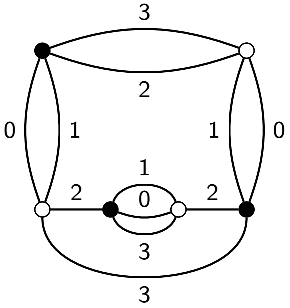


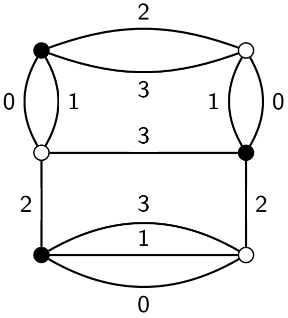


Définition

Soit G un graphe $(D+1)$-coloré. Un plongement (cellulaire) de G dans une surface S est **régulier** s'il existe un $(D+1)$-cycle $\tau \in \mathfrak{S}_{D+1}$, tel que toute face du plongement soit bordée par un cycle bicoloré, de couleurs $\{i, \tau(i)\}$, pour un certain $i \in \{0, 1, \ldots, D\}$.

Degré





Définition

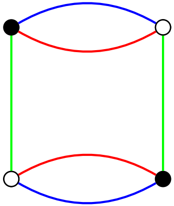
Le **degré** $\omega(G)$ d'un graphe $(D+1)$-coloré (connexe) G est la somme des genres de ses plongements réguliers :

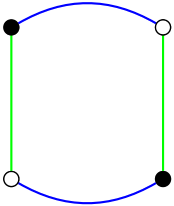
$$\omega(G) = \frac{1}{2} \sum_{\tau \ (D+1)\text{-cycle}} g_\tau .$$

Définition

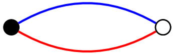
Soit G un graphe $(D+1)$-coloré, et $i_1 < \cdots < i_d$ des couleurs de G. Considérons le sous-graphe G' de G dans lequel on a uniquement gardé les arêtes de couleur $i_1, \ldots, i_d$. Les composantes connexes de G' sont appelées des **d-bulles** de G, et on les note $\mathcal{B}^{i_1,\ldots,i_d}_{(\rho)}$ (où ρ est un indice qui parcourt les différentes composantes de G').

Notation : $\hat{\imath}_1 \ldots \hat{\imath}_d := \{0, \ldots, D\} \backslash \{i_1, \ldots, i_d\}$.

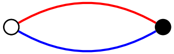




$\mathcal{B}^{\hat{r}}_{(1)}$



$\mathcal{B}^{\hat{v}}_{(1)}$

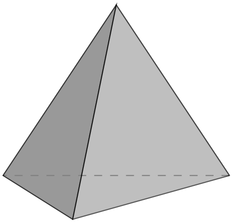


$\mathcal{B}^{\hat{v}}_{(2)}$

Définition

Soient $x_0, \ldots, x_D$ des points affinement indépendants dans $\mathbb{R}^n$, avec $D \leq n$. Le **simplexe** défini par $x_0, \ldots, x_D$ est leur enveloppe convexe.

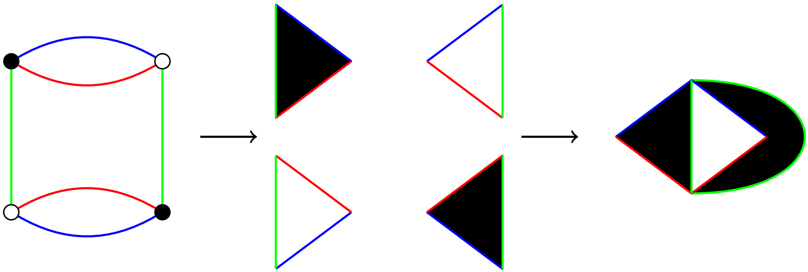
- Un simplexe de dimension D est défini par $D + 1$ points
- ***k*-faces** d'un simplexe : sous-simplexes de dimension k



Construction d'un trisp coloré

À partir d'un graphe $(D+1)$-coloré G:

- associer à chaque sommet v de G un D-simplexe σ_v
- σ_v a $D+1$ faces de dimension $D-1$: les colorier de 0 à D (même couleur associée au sommet opposé)
- recoller σ_v et σ_w le long de leurs $(D-1)$-faces de couleur i, ssi v et w sont reliés par une arête i
- on obtient un espace $\Delta(G)$, appelé **espace triangulé (trisp) coloré**.



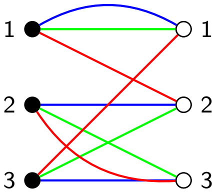
Construction d'un trisp coloré

À partir d'un graphe $(D+1)$-coloré G:

- associer à chaque sommet v de G un D-simplexe σ_v
- σ_v a $D+1$ faces de dimension $D-1$: les colorier de 0 à D (même couleur associée au sommet opposé)
- recoller σ_v et σ_w le long de leurs $(D-1)$-faces de couleur i, ssi v et w sont reliés par une arête i
- on obtient un espace $\Delta(G)$, appelé **espace triangulé (trisp) coloré**.

Correspondance entre les $(D+1-k)$-bulles $\mathcal{B}_{(\rho)}^{\hat{\imath}_1,\ldots,\hat{\imath}_k}$ et les $(k-1)$-simplexes dont les sommets ont les couleurs $i_1,\ldots,i_k$.
Notamment : sommets du trisp $\longleftrightarrow$ D-bulles.

- Graphe $(D+1)$-coloré biparti G : p sommets noirs $B_1, \ldots, B_p$, p sommets blancs $W_1, \ldots, W_p$
- Permutations $\alpha_0, \ldots, \alpha_D \in \mathfrak{S}_p$: $\alpha_i(k) = l \iff B_k$ relié à W_l par une arête i



$$\longrightarrow$$

$$\alpha_b = id$$
$$\alpha_v = (1)(23)$$
$$\alpha_r = (123)$$

- Toutes les propriétés de G et de $\Delta(G)$ s'expriment en termes de $(\alpha_0, \ldots, \alpha_D)$

Principe

Programme :

- $(D+1)$-uplet de permutations aléatoires $(\alpha_0, \ldots, \alpha_D) \in (\mathfrak{S}_p)^{D+1}$, induit un graphe G et un trisp $\Delta(G)$ colorés aléatoires
- limite à p grand : on s'intéresse aux événements *a.p.s.* (asymptotiquement presque sûrs)

Principe

Programme :

- $(D+1)$-uplet de permutations aléatoires $(\alpha_0, \ldots, \alpha_D) \in (\mathfrak{S}_p)^{D+1}$, induit un graphe G et un trisp $\Delta(G)$ colorés aléatoires
- limite à p grand : on s'intéresse aux événements *a.p.s.* (asymptotiquement presque sûrs)

Liens avec d'autres modèles aléatoires :

- recherche d'une limite continue : similaire aux **cartes aléatoires** [Le Gall, Miermont]
- topologie non fixée : similaire aux **complexes simpliciaux aléatoires** (extensions du graphe d'Erdős-Rényi) [Costa-Farber, Kahle]
- recollement aléatoire de "blocs de base": similaire aux **modèles de recollements aléatoires de polygones** [Pippenger-Schleich, Chmutov-Pittel]

Modèles

2 modèles :

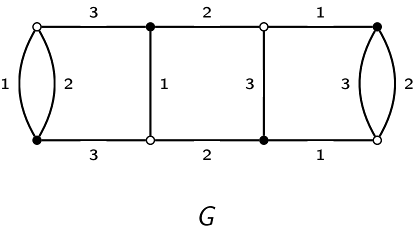
Modèles

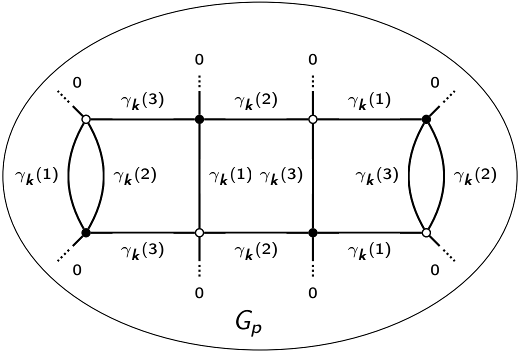
2 modèles :

- **Modèle uniforme U_p^D:** $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq D}$ *i.i.d.*, uniformes sur $\mathfrak{S}_p$

2 modèles :

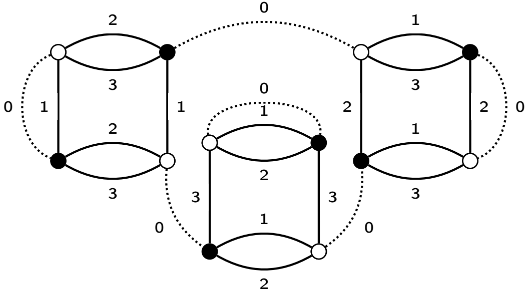
- **Modèle uniforme U_p^D:** $(\alpha_i)_{0 \le i \le D}$ *i.i.d.*, uniformes sur $\mathfrak{S}_p$
- **Modèle uniforme-décoloré G_p:** G graphe D-coloré (connexe) (de couleurs $\{1, \ldots, D\}$), on prend p copies de G où les couleurs sont permutées selon des permutations i.i.d. uniformes $(\gamma_k)_{1 \le k \le p} \in (\mathfrak{S}_D)^p$, et on ajoute α_0 uniforme et indépendante du reste, pour les arêtes 0





2 modèles :

- **Modèle uniforme U_p^D:** $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq D}$ *i.i.d.*, uniformes sur $\mathfrak{S}_p$
- **Modèle uniforme-décoloré G_p:** G graphe D-coloré (connexe) (de couleurs $\{1, \ldots, D\}$), on prend p copies de G où les couleurs sont permutées selon des permutations i.i.d. uniformes $(\gamma_k)_{1 \leq k \leq p} \in (\mathfrak{S}_D)^p$, et on ajoute α_0 uniforme et indépendante du reste, pour les arêtes 0
  - cas particulier : **modèle quartique Q_p^D:** $G = Q^D$ est quartique



Connexité

Théorème (C., 2017)

Pour $D \geq 2$, U_p^D est connexe a.p.s., et $\mathbb{E}\left[\#\text{cc de } U_p^D\right] = 1 + O\left(\frac{1}{p^{D-1}}\right)$.
Pour $D \geq 2$, pour tout graphe D-coloré biparti connexe G avec $2t \geq 4$ sommets, G_p est connexe a.p.s., et $\mathbb{E}[\#\text{cc de } G_p] = 1 + O\left(\frac{1}{p^{t-1}}\right)$.

Degré : cas uniforme

Proposition

Pour tout $D \geq 2$

$$\mathbb{E}\left[\omega\left(U_p^D\right)\right] \sim p$$

$$\mathrm{Var}\left(\omega\left(U_p^D\right)\right) \sim \ln p.$$

Degré : cas uniforme

Proposition

Pour tout $D \geq 2$

$$\mathbb{E}\left[\omega\left(U_p^D\right)\right] \sim p$$

$$\mathrm{Var}\left(\omega\left(U_p^D\right)\right) \sim \ln p.$$

Théorème (C., 2017)

Soit $\mathcal{J}_p$ un plongement régulier de U_p^D, et soit $g_{\mathcal{J}_p}$ le genre de $\mathcal{J}_p$. Alors la quantité $\frac{g_{\mathcal{J}_p} - \mathbb{E}\left[g_{\mathcal{J}_p}\right]}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(g_{\mathcal{J}_p}\right)}}$ converge faiblement vers la loi normale standard.

Proposition

Pour tout $D \geq 2$

$$\mathbb{E}\left[\omega\left(Q_p^D\right)\right] \sim p$$

$$\mathrm{Var}\left(\omega\left(Q_p^D\right)\right) = O((\ln p)^3).$$

Degré: cas quartique

Proposition

Pour tout $D \geq 2$

$$\mathbb{E}\left[\omega\left(Q_p^D\right)\right] \sim p$$

$$\mathrm{Var}\left(\omega\left(Q_p^D\right)\right) = O\left((\ln p)^3\right).$$

Théorème (C., 2017)

Soit $\mathcal{J}_p$ un plongement régulier de Q_p^D, et soit $g_{\mathcal{J}_p}$ le genre de $\mathcal{J}_p$. Alors la quantité $\frac{g_{\mathcal{J}_p} - \mathbb{E}\left[g_{\mathcal{J}_p}\right]}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(g_{\mathcal{J}_p}\right)}}$ converge faiblement vers la loi normale standard.

À la recherche d'une limite continue ?

Théorème (C., 2017)

Pour $D \geq 3$,

$$\mathbb{E}\Big[\text{nombre de points de } \Delta(U_p^D)\Big] = D + 1 + O\left(\frac{1}{p^{D-2}}\right).$$

À la recherche d'une limite continue ?

Théorème (C., 2017)

Pour $D \geq 3$,

$$\mathbb{E}\Big[\text{nombre de points de } \Delta(U_p^D)\Big] = D + 1 + O\bigg(\frac{1}{p^{D-2}}\bigg).$$

Théorème (C., 2017)

Pour $D \geq 3$, pour tout graphe D-coloré biparti connexe G avec $2t \geq 4$ sommets,

$$\mathbb{E}[\text{nombre de points de } \Delta(G_p)] = p + c_G + o(1)$$

où c_G est une constante qui ne dépend que de G.
De plus, si u, v sont deux sommets de $\Delta(G_p)$ choisis uniformément au hasard et indépendamment, alors

$$d(u, v) = 2 \text{ a.p.s.}$$

Conclusion

Bilan :

- **modèle uniforme :** connexe, avec un nombre fini de points a.p.s.
- **modèle uniforme-décoloré :** connexe, le nombre de points croît linéairement, une paire de points typique est à distance 2 a.p.s.

Conclusion

Bilan :

- **modèle uniforme :** connexe, avec un nombre fini de points a.p.s.
- **modèle uniforme-décoloré :** connexe, le nombre de points croît linéairement, une paire de points typique est à distance 2 a.p.s.

Et maintenant ?

- **$2D$:** cas planaire = triangulations eulériennes
- **$D \geq 3$:** modèles physiques régis par le degré

Merci pour votre attention !