

# Universalité de la carte brownienne : limite de cartes à degrés prescrits

Cyril Marzouk

6 octobre 2017

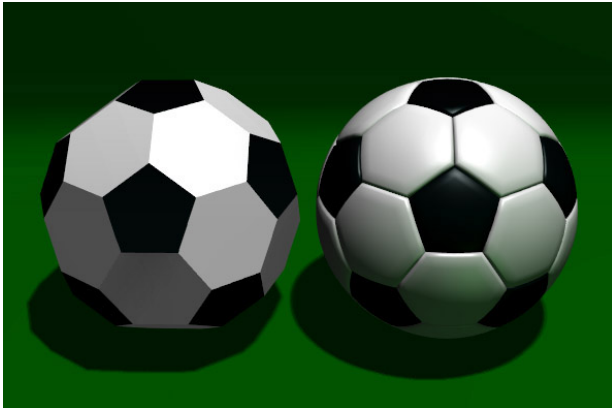


FIGURE – Une carte avec 32 faces : 20 hexagonales et 12 pentagonales.

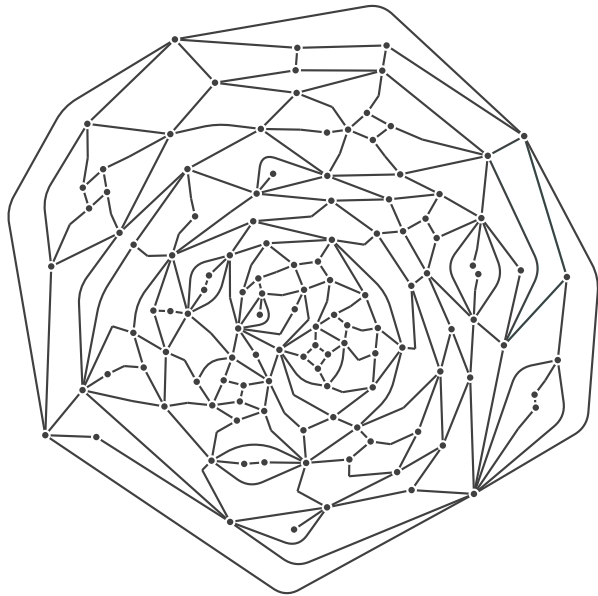
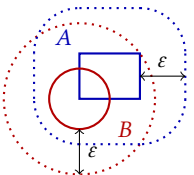


FIGURE – Une quadrangulation.

**Distance de Hausdorff :**  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles compacts de  $(E, d)$ .  
Leur distance de Hausdorff est donnée par :

$$d_H^{(E)}(A, B) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 \mid \begin{array}{c} \text{A rectangle } A \text{ and a circle } B \\ \text{are both contained within an } \varepsilon\text{-neighborhood} \\ \text{of the other set.} \end{array} \right\}.$$


**Distance de Hausdorff :**  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles compacts de  $(E, d)$ .  
 Leur distance de Hausdorff est donnée par :

$$d_H^{(E)}(A, B) = \inf \left\{ \left( \begin{array}{c} \text{Diagram showing set } A \text{ (blue rectangle) and set } B \text{ (red circle) with } \varepsilon \text{-neighborhoods (dotted lines) around them.} \\ \varepsilon \end{array} \right); \varepsilon > 0 \right\}.$$

**Distance de Gromov–Hausdorff :**  $(A, d_A)$  et  $(B, d_B)$  deux espaces métriques compacts. Leur distance de Gromov–Hausdorff est donnée par :

$$\inf \{ d_H^{(E)}(\phi(A), \phi'(B)); (E, d), \phi : A \rightarrow E, \phi' : B \rightarrow E \text{ isométries} \}.$$

# Point de départ

Théorème 0 (Le Gall '13, Miermont '13)

$\mathcal{Q}_n$  une quadrangulation aléatoire uniforme à  $n$  faces,

$$\left( \mathcal{Q}_n, \left( \frac{9}{8} \frac{1}{n} \right)^{1/4} d_{\text{gr}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{M}, \mathcal{D}),$$

au sens de Gromov–Hausdorff.

# Point de départ

Théorème 0 (Le Gall '13, Miermont '13)

$\mathcal{Q}_n$  une quadrangulation aléatoire uniforme à  $n$  faces,

$$\left( \mathcal{Q}_n, \left( \frac{9}{8} \frac{1}{n} \right)^{1/4} d_{\text{gr}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{M}, \mathcal{D}),$$

au sens de Gromov–Hausdorff.

La carte brownienne  $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$  est

- ▶ homéomorphe à la sphère (Le Gall & Paulin '08, Miermont '08),
- ▶ de dimension de Hausdorff 4 (Le Gall '07).

# Point de départ

## Théorème 0 (Le Gall '13, Miermont '13)

$\mathcal{Q}_n$  une quadrangulation aléatoire uniforme à  $n$  faces,

$$\left( \mathcal{Q}_n, \left( \frac{9}{8} \frac{1}{n} \right)^{1/4} d_{\text{gr}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{M}, \mathcal{D}),$$

au sens de Gromov–Hausdorff.

La carte brownienne  $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$  est

- ▶ homéomorphe à la sphère (Le Gall & Paulin '08, Miermont '08),
- ▶ de dimension de Hausdorff 4 (Le Gall '07).

## Théorème 1 (Le Gall '13)

$\mathcal{M}_n^{(\kappa)}$  une  $2\kappa$ -angulation aléatoire uniforme à  $n$  faces avec  $\kappa \geq 2$ ,

$$\left( \mathcal{M}_n^{(\kappa)}, \left( \frac{9}{4\kappa(\kappa-1)} \frac{1}{n} \right)^{1/4} d_{\text{gr}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{M}, \mathcal{D}).$$



## Le modèle général

Pour tout  $n \geq 1$ , on se donne une suite  $\mathbf{n} = (n_i; i \geq 1)$  dans  $\mathbf{N}$  telle que

$$\sum_{i \geq 1} n_i = n,$$

et on note  $\mathbf{M}(\mathbf{n})$  l'ensemble des cartes (planaires, enracinées) contenant  $n_i$  faces de degré  $2i$  pour tout  $i \geq 1$ .

# Le modèle général

Pour tout  $n \geq 1$ , on se donne une suite  $\mathbf{n} = (n_i; i \geq 1)$  dans  $\mathbf{N}$  telle que

$$\sum_{i \geq 1} n_i = n,$$

et on note  $\mathbf{M}(\mathbf{n})$  l'ensemble des cartes (planaires, enracinées) contenant  $n_i$  faces de degré  $2i$  pour tout  $i \geq 1$ .

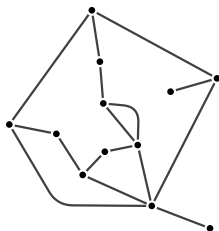


FIGURE – Un élément de  $\mathbf{M}((1, 2, 1, 2, 0, 0, \dots))$ .

# Le modèle général

On note

$$N_{\mathbf{n}} := \sum_{i \geq 1} in_i \quad \text{et} \quad n_0 := 1 + N_{\mathbf{n}} - n.$$

Chaque carte dans  $\mathbf{M}(\mathbf{n})$  contient  $n$  faces et  $N_{\mathbf{n}}$  arêtes et donc, par la formule d'Euler,  $n_0 + 1$  sites.

# Le modèle général

On note

$$N_{\mathbf{n}} := \sum_{i \geq 1} i n_i \quad \text{et} \quad n_0 := 1 + N_{\mathbf{n}} - n.$$

Chaque carte dans  $\mathbf{M}(\mathbf{n})$  contient  $n$  faces et  $N_{\mathbf{n}}$  arêtes et donc, par la formule d'Euler,  $n_0 + 1$  sites.

On pose

$$p_{\mathbf{n}}(i) := \frac{n_i}{N_{\mathbf{n}} + 1}, \quad i \geq 0,$$
$$\sigma_{\mathbf{n}}^2 := \sum_{i \geq 0} i^2 p_{\mathbf{n}}(i) - \left( \frac{N_{\mathbf{n}}}{N_{\mathbf{n}} + 1} \right)^2,$$
$$\Delta_{\mathbf{n}} := \max\{i \geq 0 : n_i > 0\}.$$

## Le modèle général

**Hypothèse** : il existe une probabilité  $p = (p(i); i \geq 0)$  de moyenne 1 et de variance  $\sigma_p^2 := \sum_{i \geq 0} i^2 p(i) - 1 \in (0, \infty)$  telle que,

$$p_n \Rightarrow p, \quad \sigma_n^2 \rightarrow \sigma_p^2 \quad \text{et} \quad n^{-1/2} \Delta_n \rightarrow 0. \quad (\text{H})$$

# Le modèle général

**Hypothèse** : il existe une probabilité  $p = (p(i); i \geq 0)$  de moyenne 1 et de variance  $\sigma_p^2 := \sum_{i \geq 0} i^2 p(i) - 1 \in (0, \infty)$  telle que,

$$p_n \Rightarrow p, \quad \sigma_n^2 \rightarrow \sigma_p^2 \quad \text{et} \quad n^{-1/2} \Delta_n \rightarrow 0. \quad (\text{H})$$

## Théorème 2 (☺)

Sous (H), si  $\mathcal{M}_n$  est choisie uniformément au hasard dans  $\mathbf{M}(n)$ ,

$$\left( \mathcal{M}_n, \left( \frac{9(1-p(0))}{4\sigma_p^2} \frac{1}{n} \right)^{1/4} d_{\text{gr}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{M}, \mathcal{D}).$$

# Le modèle général

**Hypothèse** : il existe une probabilité  $p = (p(i); i \geq 0)$  de moyenne 1 et de variance  $\sigma_p^2 := \sum_{i \geq 0} i^2 p(i) - 1 \in (0, \infty)$  telle que,

$$p_n \Rightarrow p, \quad \sigma_n^2 \rightarrow \sigma_p^2 \quad \text{et} \quad n^{-1/2} \Delta_n \rightarrow 0. \quad (\text{H})$$

## Théorème 2 (☺)

Sous (H), si  $\mathcal{M}_n$  est choisie uniformément au hasard dans  $\mathbf{M}(n)$ ,

$$\left( \mathcal{M}_n, \left( \frac{9(1-p(0))}{4\sigma_p^2} \frac{1}{n} \right)^{1/4} d_{\text{gr}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{M}, \mathcal{D}).$$

Application : si  $n_i = \begin{cases} n & \text{si } i = \kappa, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$  alors  $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n^{(\kappa)}$ . On a  $N_n = n\kappa$  et (H)

est vérifiée avec

$$p(\kappa) = 1 - p(0) = \kappa^{-1} \quad \text{d'où} \quad \sigma_p^2 = \kappa - 1.$$

## Cartes de Boltzmann

Soit  $\mathbf{q} = (q_i; i \geq 1)$  une suite réelle positive, on définit une mesure sur l'ensemble  $\mathbf{M}$  des cartes biparties enracinées et finies par

$$W^{\mathbf{q}}(\mathcal{M}) = \prod_{f \in \text{Faces}(\mathcal{M})} q_{\deg(f)/2}.$$



## Cartes de Boltzmann

Soit  $\mathbf{q} = (q_i; i \geq 1)$  une suite réelle positive, on définit une mesure sur l'ensemble  $\mathbf{M}$  des cartes biparties enracinées et finies par

$$W^{\mathbf{q}}(\mathcal{M}) = \prod_{f \in \text{Faces}(\mathcal{M})} q_{\deg(f)/2}.$$

Fait intéressant (Bernardi, Curien & Miermont '17+) : on a

$$\sum_{\mathcal{M} \in \mathbf{M}} W^{\mathbf{q}}(\mathcal{M}) < \infty \iff \sum_{\mathcal{M} \in \mathbf{M}} \#\{\text{sommets de } \mathcal{M}\} W^{\mathbf{q}}(\mathcal{M}) < \infty.$$

On dit alors que  $\mathbf{q}$  est *admissible* et on définit la probabilité

$$P^{\mathbf{q}}(\cdot) = \frac{1}{W^{\mathbf{q}}(\mathbf{M})} W^{\mathbf{q}}(\cdot).$$

On se restreint de plus aux suites *critiques*, i.e. telles que

$$\sum_{\mathcal{M} \in \mathbf{M}} \#\{\text{sommets de } \mathcal{M}\}^2 W^{\mathbf{q}}(\mathcal{M}) = \infty.$$

# Cartes de Boltzmann

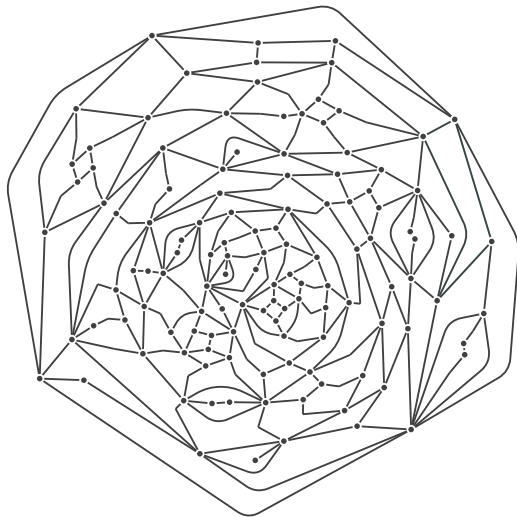


FIGURE – Une quadrangulation.

# Cartes de Boltzmann

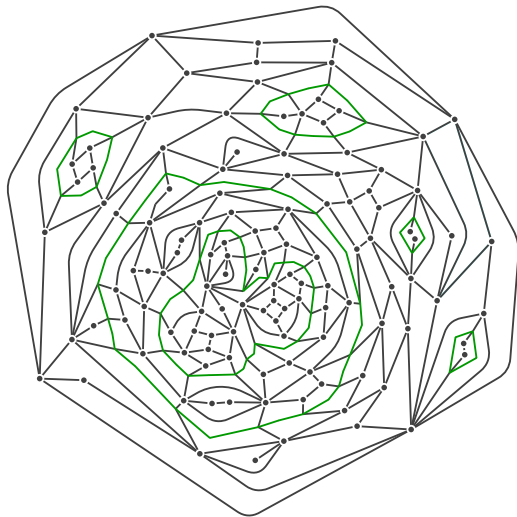


FIGURE – Une quadrangulation décorée de boucles  $O(N)$ .

## Cartes de Boltzmann

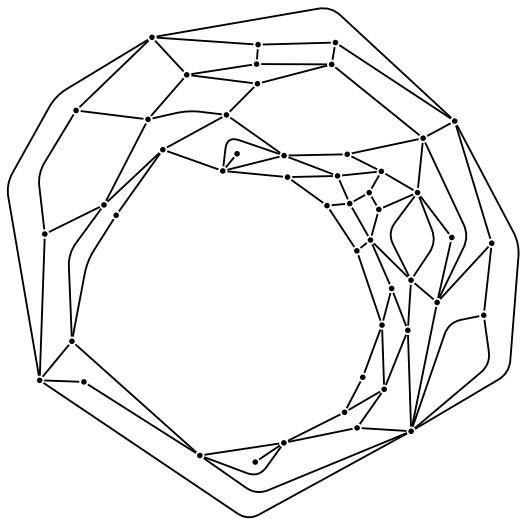


FIGURE – La « carte à trous » induite est une carte de Boltzmann (Borot, Bouttier & Guitter '11).

# Cartes de Boltzmann

On note

- ▶  $\mathbf{M}_{E=n}$  l'ensemble des cartes biparties à  $n$  arêtes,
- ▶  $\mathbf{M}_{V=n}$  l'ensemble des cartes biparties à  $n$  sommets,
- ▶  $\mathbf{M}_{F=n}$  l'ensemble des cartes biparties  $n$  faces.

Pour chaque  $S = \{E, V, F\}$  et  $n \geq 2$ , on pose

$$\mathbf{P}_{S=n}^q(\mathcal{M}) := \mathbf{P}^q(\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \in \mathbf{M}_{S=n}), \quad \mathcal{M} \in \mathbf{M}_{S=n},$$

la loi d'une carte de Boltzmann conditionnée à avoir taille  $n$  (on se restreint toujours implicitement aux  $n$  tels que  $W^q(\mathbf{M}_{S=n}) \neq 0$ ).

# Cartes de Boltzmann

## Théorème 3 (Le Gall '13)

Si « le demi-degré d'une face typique admet des moments exponentiels » et  $\mathcal{M}_{V=n}$  a la loi  $\mathbf{P}_{V=n}^q$ ,

$$\left( \mathcal{M}_{V=n}, \left( \frac{K_q}{n} \right)^{1/4} d_{\text{gr}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{M}, \mathcal{D}).$$

# Cartes de Boltzmann

## Théorème 3 (Le Gall '13)

Si « le demi-degré d'une face typique admet des moments exponentiels » et  $\mathcal{M}_{V=n}$  a la loi  $\mathbf{P}_{V=n}^q$ ,

$$\left( \mathcal{M}_{V=n}, \left( \frac{K_q}{n} \right)^{1/4} d_{\text{gr}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{M}, \mathcal{D}).$$

## Théorème 4 (☺)

Si « le demi-degré d'une face typique a une variance finie » et  $\mathcal{M}_{S=n}$  a la loi  $\mathbf{P}_{S=n}^q$  avec  $S = \{E, V, F\}$ ,

$$\left( \mathcal{M}_{S=n}, \left( \frac{K_{S,q}}{n} \right)^{1/4} d_{\text{gr}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{M}, \mathcal{D}).$$

# Cartes de Boltzmann

## Théorème 3 (Le Gall '13)

Si « le demi-degré d'une face typique admet des moments exponentiels » et  $\mathcal{M}_{V=n}$  a la loi  $\mathbf{P}_{V=n}^q$ ,

$$\left( \mathcal{M}_{V=n}, \left( \frac{K_q}{n} \right)^{1/4} d_{\text{gr}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{M}, \mathcal{D}).$$

## Théorème 4 (☺)

Si « le demi-degré d'une face typique a une variance finie » et  $\mathcal{M}_{S=n}$  a la loi  $\mathbf{P}_{S=n}^q$  avec  $S = \{E, V, F\}$ ,

$$\left( \mathcal{M}_{S=n}, \left( \frac{K_{S,q}}{n} \right)^{1/4} d_{\text{gr}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{M}, \mathcal{D}).$$

Idee : conditionnellement à sa suite (aléatoire) de degrés,  $\mathcal{M}_{S=n}$  a la loi uniforme sur l'ensemble des cartes avec cette suite de degrés, on montre ainsi que (H) est satisfait.



## Cartes de Boltzmann à $n$ arêtes

Le cas  $S = E$  est à part car  $\mathbf{M}_{E=n}$  est fini donc on peut définir  $\mathbf{P}_{E=n}^q = W^q/W^q(\mathbf{M}_{E=n})$  même si  $q$  n'est pas admissible. Le théorème précédent reste tout de même vrai.

## Cartes de Boltzmann à $n$ arêtes

Le cas  $S = E$  est à part car  $\mathbf{M}_{E=n}$  est fini donc on peut définir  $\mathbf{P}_{E=n}^{\mathbf{q}} = W^{\mathbf{q}}/W^{\mathbf{q}}(\mathbf{M}_{E=n})$  même si  $\mathbf{q}$  n'est pas admissible. Le théorème précédent reste tout de même vrai.

Un exemple important : la suite  $\mathbf{q}$  constante égale à 1 pour laquelle  $\mathbf{P}_{E=n}^{\mathbf{q}}$  est la loi uniforme sur  $\mathbf{M}_{E=n}$  ; on peut même calculer dans ce cas  $K_{E,\mathbf{q}} = 1/2$  ce qui donne

## Cartes de Boltzmann à $n$ arêtes

Le cas  $S = E$  est à part car  $\mathbf{M}_{E=n}$  est fini donc on peut définir  $\mathbf{P}_{E=n}^{\mathbf{q}} = W^{\mathbf{q}}/W^{\mathbf{q}}(\mathbf{M}_{E=n})$  même si  $\mathbf{q}$  n'est pas admissible. Le théorème précédent reste tout de même vrai.

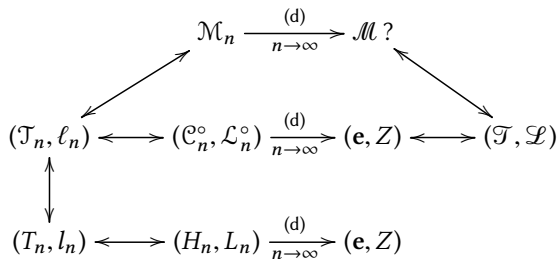
Un exemple important : la suite  $\mathbf{q}$  constante égale à 1 pour laquelle  $\mathbf{P}_{E=n}^{\mathbf{q}}$  est la loi uniforme sur  $\mathbf{M}_{E=n}$  ; on peut même calculer dans ce cas  $K_{E,\mathbf{q}} = 1/2$  ce qui donne

### Corollaire 1 (Abraham '16)

Si  $\mathcal{M}_n$  a la loi uniforme dans  $\mathbf{M}_{E=n}$ , alors

$$\left( \mathcal{M}_n, \left( \frac{1}{2n} \right)^{1/4} d_{\text{gr}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathcal{M}, \mathcal{D}).$$

# Plan de la preuve



## Première étape : BDG

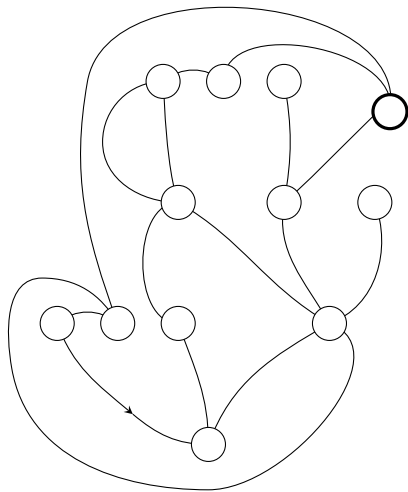


FIGURE – La bijection de Bouttier–Di Francesco–Guitter '04.

## Première étape : BDG

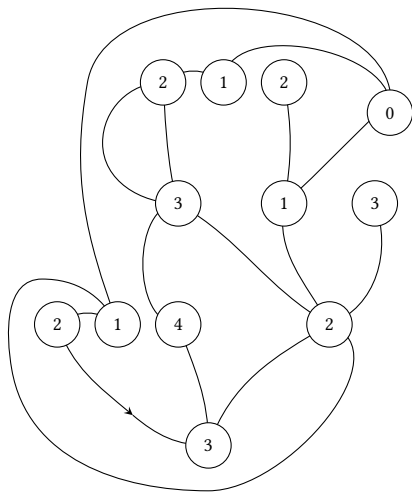


FIGURE – La bijection de Bouttier–Di Francesco–Guitter '04.

## Première étape : BDG

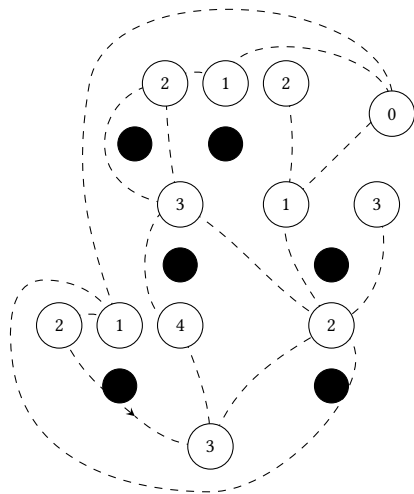


FIGURE – La bijection de Bouttier–Di Francesco–Guitter '04.

## Première étape : BDG

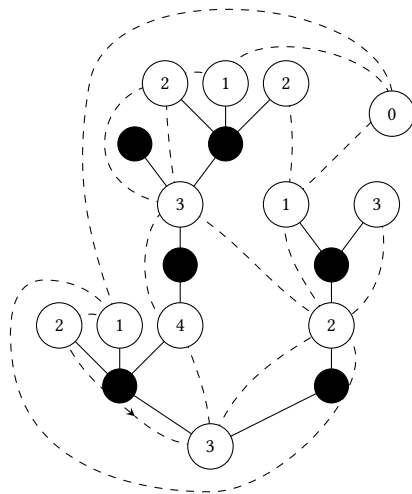


FIGURE – La bijection de Bouttier–Di Francesco–Guitter '04.



## Première étape : BDG

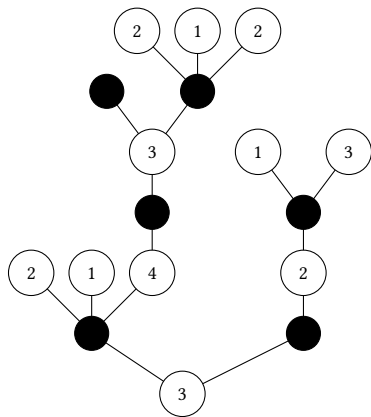


FIGURE – La bijection de Bouttier–Di Francesco–Guitter '04.

## Première étape : BDG

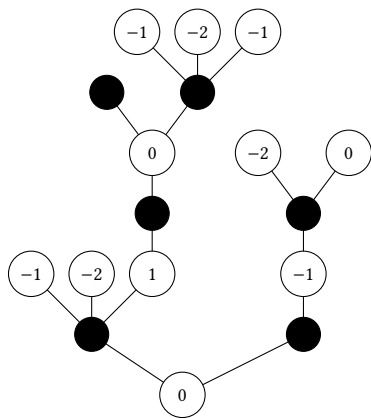


FIGURE – La bijection de Bouttier–Di Francesco–Guitter '04.

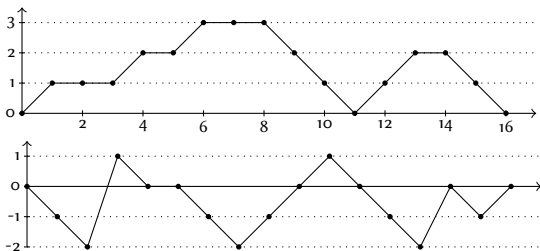
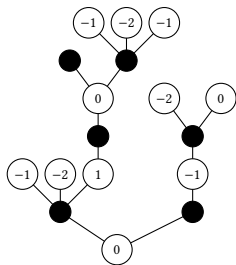


FIGURE – Un arbre à deux types étiqueté, son processus de contour blanc  $\mathcal{C}^\circ$  et son processus d'étiquettes blanc  $\mathcal{L}^\circ$ .

## Théorème 5

Sous (H),

$$\left( \left( \frac{\sigma_p^2(1-p_0)}{4p_0^2} \frac{1}{n} \right)^{1/2} \mathcal{C}_n^\circ(N_nt), \left( \frac{9(1-p_0)}{4\sigma_p^2} \frac{1}{n} \right)^{1/4} \mathcal{L}_n^\circ(N_nt) \right)_{t \in [0,1]}$$
$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathbf{e}_t, Z_t)_{t \in [0,1]}$$

dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}^2)$ , où  $\mathbf{e}$  est l'excursion brownienne standard et  $Z$  est, conditionnellement à  $\mathbf{e}$ , un processus gaussien centré et tel que

$$\mathbf{E} \left[ |Z_s - Z_t|^2 \mid \mathbf{e} \right] = \mathbf{e}_s + \mathbf{e}_t - 2 \min_{r \in [s \wedge t, s \vee t]} \mathbf{e}_r.$$

## Théorème 5

Sous (H),

$$\left( \left( \frac{\sigma_p^2(1-p_0)}{4p_0^2} \frac{1}{n} \right)^{1/2} \mathcal{C}_n^\circ(N_nt), \left( \frac{9(1-p_0)}{4\sigma_p^2} \frac{1}{n} \right)^{1/4} \mathcal{L}_n^\circ(N_nt) \right)_{t \in [0,1]} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathbf{e}_t, Z_t)_{t \in [0,1]}$$

dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}^2)$ , où  $\mathbf{e}$  est l'excursion brownienne standard et  $Z$  est, conditionnellement à  $\mathbf{e}$ , un processus gaussien centré et tel que

$$\mathbf{E} \left[ |Z_s - Z_t|^2 \mid \mathbf{e} \right] = \mathbf{e}_s + \mathbf{e}_t - 2 \min_{r \in [s \wedge t, s \vee t]} \mathbf{e}_r.$$

Théorème 5 + « invariance par ré-enracinement »  $\implies$  Théorème 2 d'après Le Gall '13.

## Deuxième étape : JS

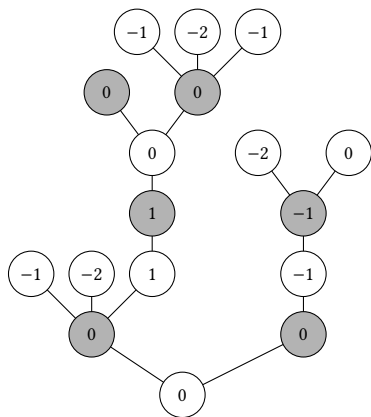


FIGURE – La bijection de Janson–Stefánsson '15 dans un sens.

## Deuxième étape : JS

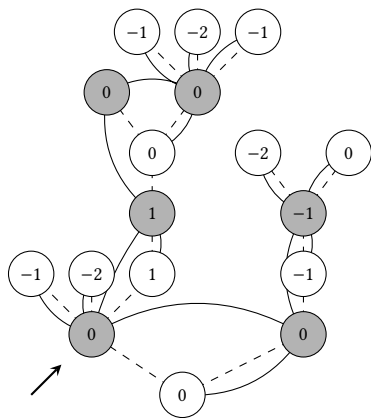


FIGURE – La bijection de Janson–Stefánsson '15 dans un sens.

## Deuxième étape : JS

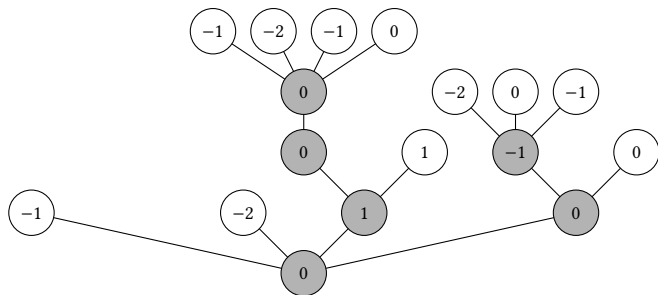


FIGURE – La bijection de Janson–Stefánsson '15 dans un sens.



## Deuxième étape : JS

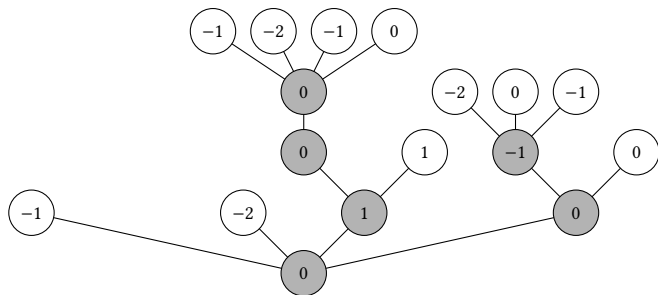


FIGURE – La bijection de Janson–Stefánsson '15 dans l'autre sens.

## Deuxième étape : JS

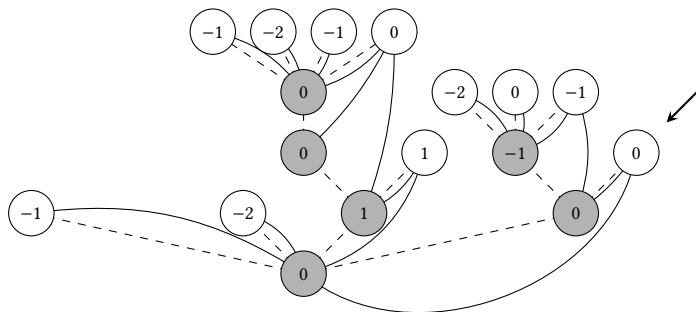


FIGURE – La bijection de Janson–Stefánsson '15 dans l'autre sens.

## Deuxième étape : JS

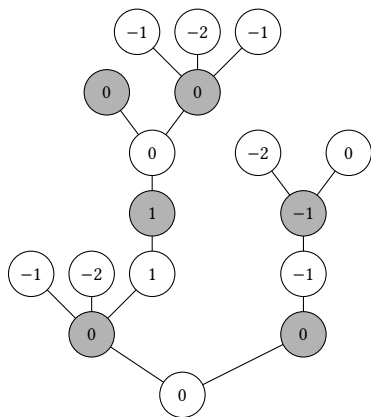


FIGURE – La bijection de Janson–Stefánsson '15 dans l'autre sens.

## Intermède : dénombrement

Carte semi-enracinée (arête non orientée) et pointée avec  $n_i$  faces de degré  $2i$  pour tout  $i \geq 1$  et  $n_0 + 1$  sites

=

Arbre planaire enraciné avec  $n_i$  sites à  $i$  enfants pour tout  $i \geq 0$  et étiqueté par des ponts sans saut  $< -1$ .

## Intermède : dénombrement

Carte semi-enracinée (arête non orientée) et pointée avec  $n_i$  faces de degré  $2i$  pour tout  $i \geq 1$  et  $n_0 + 1$  sites

=

Arbre planaire enraciné avec  $n_i$  sites à  $i$  enfants pour tout  $i \geq 0$  et étiqueté par des ponts sans saut  $< -1$ .

Il y a  $\binom{2i-1}{i-1}$  tels ponts de longueur  $i \geq 1$  donc, en utilisant le codage d'un arbre par un *chemin de Łukasiewicz*, on retrouve un résultat dû à Tutte '61 :

$$\begin{aligned}\#\mathbf{M}(\mathbf{n}) &= \frac{2}{n_0 + 1} \cdot \frac{1}{N_{\mathbf{n}} + 1} \binom{N_{\mathbf{n}} + 1}{(n_i)_{i \geq 0}} \cdot \prod_{i \geq 1} \binom{2i - 1}{i - 1}^{n_i} \\ &= \frac{2N_{\mathbf{n}}!}{(n_0 + 1)!} \prod_{i \geq 1} \binom{2i - 1}{i - 1}^{n_i} \frac{1}{n_i!}.\end{aligned}$$

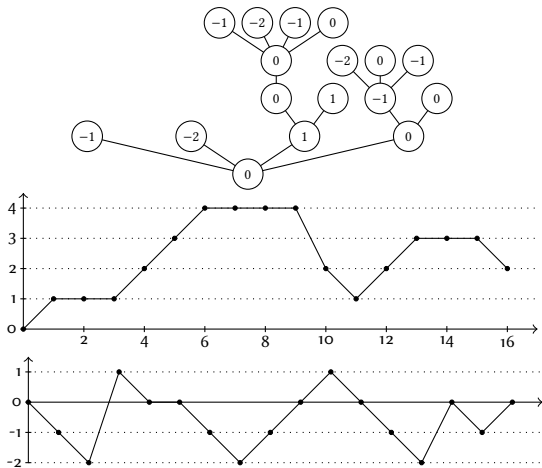


FIGURE – Un arbre à un type étiqueté, son processus de hauteur  $H$  et son processus d'étiquettes  $L$ .

## Théorème 6

Sous (H),

$$\left( \left( \frac{\sigma_p^2(1-p_0)}{4} \frac{1}{n} \right)^{1/2} H_n(N_n t), \left( \frac{9(1-p_0)}{4\sigma_p^2} \frac{1}{n} \right)^{1/4} L_n(N_n t) \right)_{t \in [0,1]}$$
$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathbf{e}_t, Z_t)_{t \in [0,1]}.$$

## Théorème 6

Sous (H),

$$\left( \left( \frac{\sigma_p^2(1-p_0)}{4} \frac{1}{n} \right)^{1/2} H_n(N_n t), \left( \frac{9(1-p_0)}{4\sigma_p^2} \frac{1}{n} \right)^{1/4} L_n(N_n t) \right)_{t \in [0,1]}$$
$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathbf{e}_t, Z_t)_{t \in [0,1]}.$$

## Remarque 1

- La convergence de  $H_n$  sous (H) est due à Broutin & Marckert '14.



## Théorème 6

Sous (H),

$$\left( \left( \frac{\sigma_p^2(1-p_0)}{4} \frac{1}{n} \right)^{1/2} H_n(N_n t), \left( \frac{9(1-p_0)}{4\sigma_p^2} \frac{1}{n} \right)^{1/4} L_n(N_n t) \right)_{t \in [0,1]}$$
$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (\mathbf{e}_t, Z_t)_{t \in [0,1]}.$$

## Remarque 1

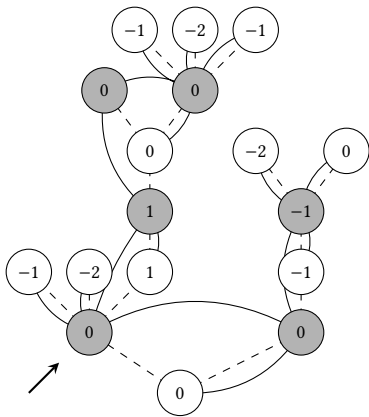
- ▶ La convergence de  $H_n$  sous (H) est due à Broutin & Marckert '14.
- ▶ Les convergences des théorèmes 5 et 6 sont jointes. En effet,

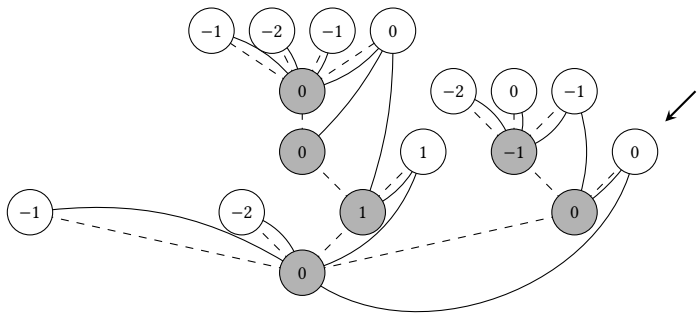
## Lemme 1

Si  $\mathcal{T}$  et  $T$  sont liés par la bijection JS, alors

$$\mathcal{L}^\circ = L \quad \text{et} \quad \mathcal{C}^\circ = \tilde{H},$$

où  $\tilde{H}(u)$  compte le nombre d'ancêtres du site visité  $u$ , dont le dernier enfant  $n$ 'est pas ancêtre de  $u$ .





## Retour aux cartes de Boltzmann

Rappel : on veut la convergence de cartes sous  $\mathbf{P}_{S=n}^q$  avec  $S = \{E, V, F\}$ , dès lors que  $q$  est admissible, critique et que « le demi-degré d'une face typique a une variance finie ».

## Retour aux cartes de Boltzmann

Rappel : on veut la convergence de cartes sous  $\mathbf{P}_{S=n}^{\mathbf{q}}$  avec  $S = \{E, V, F\}$ , dès lors que  $\mathbf{q}$  est admissible, critique et que « le demi-degré d'une face typique a une variance finie ».

L'arbre  $T$  associé à une carte de Boltzmann  $\mathcal{M}$  par la bijection  $\text{JS} \circ \text{BDG}$  est un arbre de BGW, étiqueté uniformément au hasard. L'hypothèse du théorème est que sa loi de reproduction est de moyenne 1 et de variance finie.

## Retour aux cartes de Boltzmann

Rappel : on veut la convergence de cartes sous  $\mathbf{P}_{S=n}^q$  avec  $S = \{E, V, F\}$ , dès lors que  $q$  est admissible, critique et que « le demi-degré d'une face typique a une variance finie ».

L'arbre  $T$  associé à une carte de Boltzmann  $\mathcal{M}$  par la bijection JS  $\circ$  BDG est un arbre de BGW, étiqueté uniformément au hasard. L'hypothèse du théorème est que sa loi de reproduction est de moyenne 1 et de variance finie.

Pour  $i \geq 0$ , on note  $n_T(i)$  le nombre de sommets de  $T$  avec  $i$  enfants, puis pour  $A \subset \mathbf{N}$ ,  $n_T(A) = \sum_{i \in A} n_T(i)$ . Ainsi,

- ▶  $n_T(0)$  le nombre de feuilles de  $T$  est le nombre de sommets moins 1 de  $\mathcal{M}$ ,
- ▶  $n_T(\mathbf{N}^*)$  le nombre de sites internes de  $T$  est le nombre de faces de  $\mathcal{M}$ ,
- ▶  $n_T(\mathbf{N}) - 1$  le nombre d'arêtes de  $T$  est le nombre d'arêtes de  $\mathcal{M}$ .

## Retour aux cartes de Boltzmann

On pose

$$p_T(i) := \frac{n_T(i)}{n_T(\mathbf{N})} \quad \text{et} \quad \sigma_T^2 := \sum_{i \geq 0} i^2 p_T(i) - \left( \frac{n_T(\mathbf{N}) - 1}{n_T(\mathbf{N})} \right)^2,$$

et  $\Delta_T := \max\{i \geq 0 : n_T(i) > 0\}$ .

## Retour aux cartes de Boltzmann

On pose

$$p_T(i) := \frac{n_T(i)}{n_T(\mathbf{N})} \quad \text{et} \quad \sigma_T^2 := \sum_{i \geq 0} i^2 p_T(i) - \left( \frac{n_T(\mathbf{N}) - 1}{n_T(\mathbf{N})} \right)^2,$$

et  $\Delta_T := \max\{i \geq 0 : n_T(i) > 0\}$ .

### Proposition 1

*Pour tout  $A \subset \mathbf{N}$ , si  $T_n$  est un arbre de BGW de loi de reproduction  $\mu$  de moyenne 1 et variance  $\sigma^2 \in (0, \infty)$  conditionné à  $n_T(A) = n$ ,*

$$\left( p_{T_n}, \sigma_{T_n}^2, n_{T_n}(\mathbf{N})^{-1/2} \Delta_{T_n} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} (\mu, \sigma^2, 0).$$



# Retour aux cartes de Boltzmann

On pose

$$p_T(i) := \frac{n_T(i)}{n_T(\mathbf{N})} \quad \text{et} \quad \sigma_T^2 := \sum_{i \geq 0} i^2 p_T(i) - \left( \frac{n_T(\mathbf{N}) - 1}{n_T(\mathbf{N})} \right)^2,$$

et  $\Delta_T := \max\{i \geq 0 : n_T(i) > 0\}$ .

## Proposition 1

Pour tout  $A \subset \mathbf{N}$ , si  $T_n$  est un arbre de BGW de loi de reproduction  $\mu$  de moyenne 1 et variance  $\sigma^2 \in (0, \infty)$  conditionné à  $n_T(A) = n$ ,

$$\left( p_{T_n}, \sigma_{T_n}^2, n_{T_n}(\mathbf{N})^{-1/2} \Delta_{T_n} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} (\mu, \sigma^2, 0).$$

## Remarque 2

Le cas  $A = \mathbf{N}$  est dû à Broutin & Marckert '14. Le cas général fait appel aux résultats de Kortchemski '12.

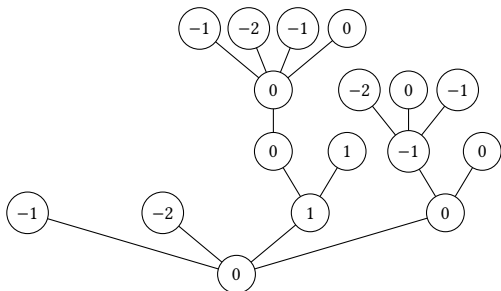


FIGURE – D'un arbre étiqueté à une carte *enracinée et pointée*.

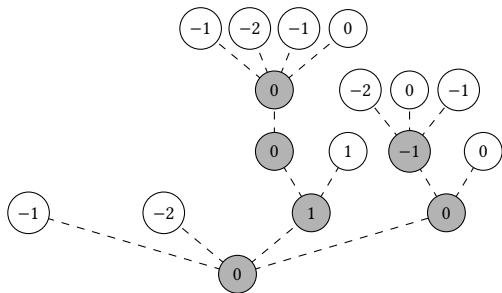


FIGURE – D'un arbre étiqueté à une carte *enracinée et pointée*.

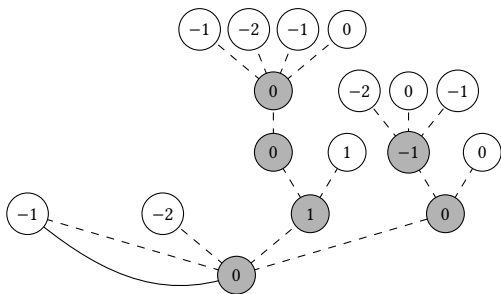


FIGURE – D'un arbre étiqueté à une carte *enracinée et pointée*.

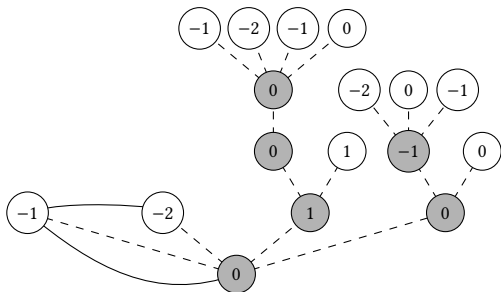


FIGURE – D'un arbre étiqueté à une carte *enracinée* et *pointée*.

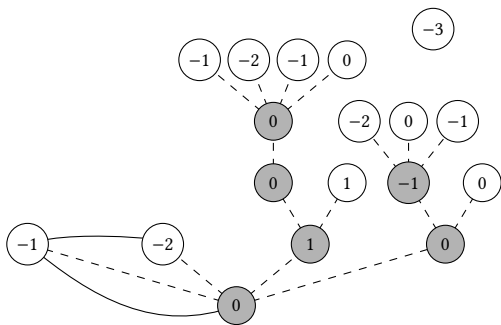


FIGURE – D'un arbre étiqueté à une carte *enracinée* et *pointée*.

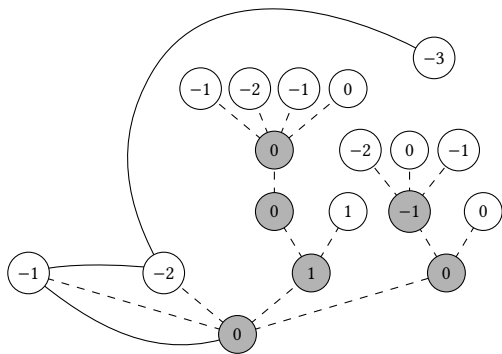


FIGURE – D'un arbre étiqueté à une carte *enracinée* et *pointée*.

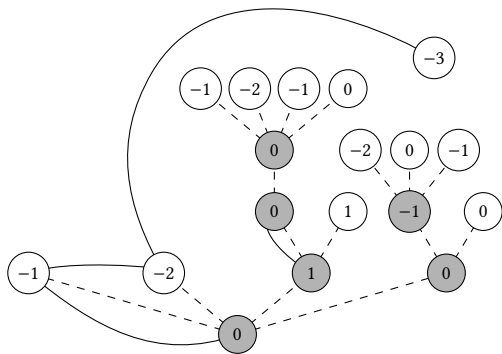


FIGURE – D'un arbre étiqueté à une carte *enracinée* et *pointée*.



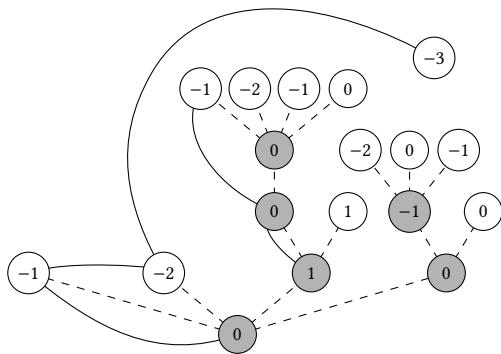


FIGURE – D'un arbre étiqueté à une carte *enracinée et pointée*.

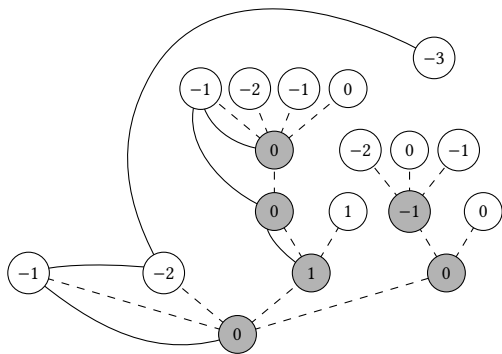


FIGURE – D'un arbre étiqueté à une carte *enracinée et pointée*.

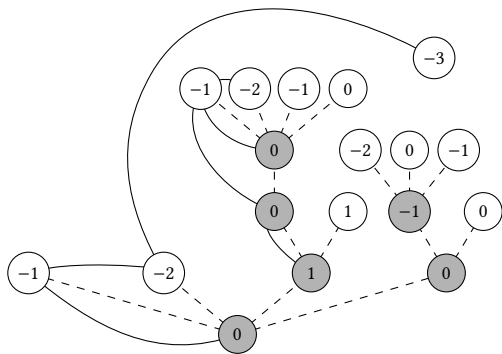


FIGURE – D'un arbre étiqueté à une carte *enracinée* et *pointée*.

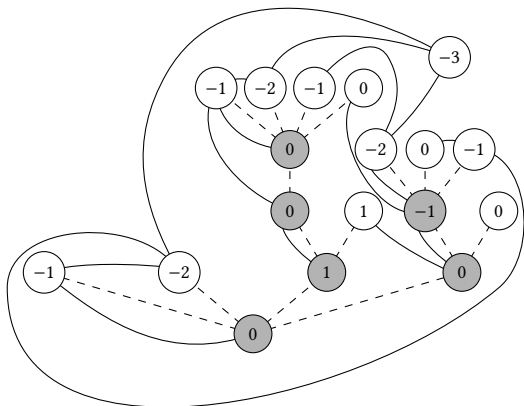


FIGURE – D'un arbre étiqueté à une carte *enracinée* et *pointée*.

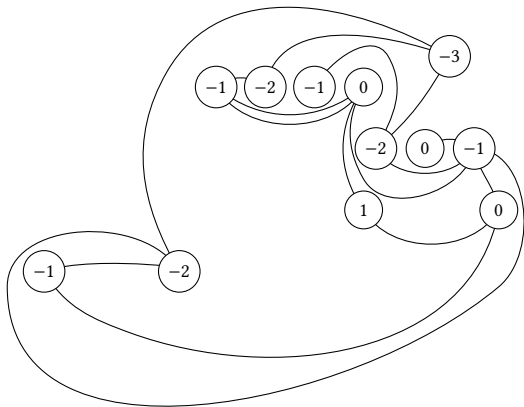


FIGURE – D'un arbre étiqueté à une carte *enracinée et pointée*.

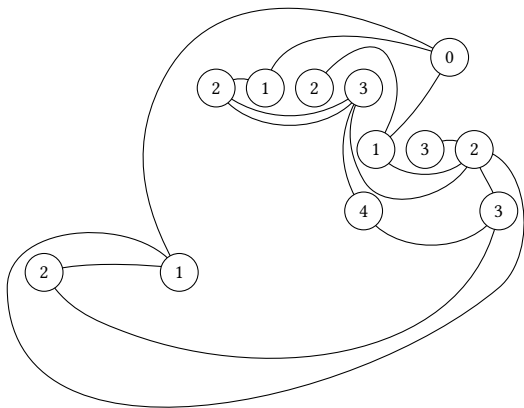


FIGURE – D'un arbre étiqueté à une carte *enracinée et pointée*.

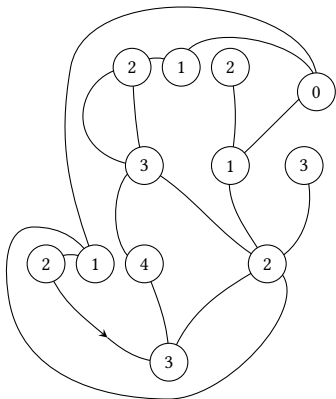


FIGURE – D'un arbre étiqueté à une carte *enracinée et pointée*.