COMBINATOIRE II – FEUILLE D'EXERCICES 2

GUILLAUME CHAPUY, MATTHIEU JOSUAT-VERGÈS – M2 MATHS FONDAS PARIS 7 (2019).

Exercice 1 (Adjoints)

Pour une fonction symmétrique f, on note $f^\perp$ l'opérateur adjoint de la multiplication par f agissant sur les fonctions symétriques.

(i) Donner $p_\lambda^\perp$ en termes des ∂_{p_n} (dérivations partielles d'une fonction symétrique vue comme un polynôme en les p_k). Existe-t-il d'autres bases multiplicatives ayant la même propriété ?

(ii) Calculer $h_\lambda^\perp(m_\mu)$. En déduire $h_n^\perp(h_m)$ et $h_n^\perp(e_m)$.

Exercice 2 (Entrelacements)

On rappelle les quatre opérateurs vus en cours correspondant aux quatre entrelacements (dual/primal, montant/descendant) entre partitions :

$$\Gamma_-(x)|\lambda\rangle = \sum_{\mu\,:\,\mu\prec\lambda} x^{|\lambda|-|\mu|}|\mu\rangle, \qquad \Gamma'_-(x)|\lambda\rangle = \sum_{\mu\,:\,\mu'\prec\lambda'} x^{|\lambda|-|\mu|}|\mu\rangle,$$
$$\Gamma_+(x)|\lambda\rangle = \sum_{\mu\,:\,\mu\succ\lambda} x^{|\mu|-|\lambda|}|\mu\rangle, \qquad \Gamma'_+(x)|\lambda\rangle = \sum_{\mu\,:\,\mu'\succ\lambda'} x^{|\mu|-|\lambda|}|\mu\rangle,$$

On a énoncé en cours quatre identités de (quasi) commutation entre ces opérateurs, et on a traité en détail la première

$$\Gamma_-(x)\Gamma_+(y) = \frac{1}{1-xy}\Gamma_+(y)\Gamma_-(x),$$

qui est équivalente à la règle locale. Dans cet exercice on va regarder les suivantes.

(i) Se convaincre que l'identité

$$\Gamma_+(x)\Gamma_+(y) = \Gamma_+(y)\Gamma_+(x),$$

est équivalente au fait que la fonction de Schur gauche $s_{\lambda/\mu}(x_1, x_2)$ est symétrique en ses deux variables, ce que nous avons démontré (au moyen des involutions de Bender Knuth).

(ii) Se convaincre que l'identité

$$\Gamma_-(x)'\Gamma_+(y) = (1+xy)\Gamma_+(y)\Gamma'_-(x),$$

est bien équivalente à la règle locale duale, à savoir que pour toutes (λ, μ) il existe une bijection

$$\{\kappa, \kappa \prec \lambda, \kappa \prec' \mu\} \times \{0,1\} \longrightarrow \{\nu, \nu \succ' \lambda, \nu \succ \mu\}$$

telle que si $(\kappa, b) \mapsto \nu$ alors $|\kappa| + |\nu| = |\lambda| + |\mu| + b$.

(iii) Démontrer la règle locale duale en proposant une bijection appropriée.

(iv) Démontrer

$$\Gamma_+(x)\Gamma'_+(y) = \Gamma'_+(y)\Gamma_+(x),$$

au moyen d'une variante des involutions de Bender-Knuth.

Exercice 3 (partitions planes)

Une *partition plane* de dimension $n \times n$ est une matrice $\pi = (\pi_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ d'entiers positifs tels que $\pi_{i,j} \geq \pi_{i+1,j}$ et $\pi_{i,j} \geq \pi_{i,j+1}$. La taille d'une telle partition plane est $|\pi| = \sum_{i,j=1}^{n} \pi_{i,j}$.

i) Calculer la série génératrice des partitions planes de dimension $n \times n$.

Indication : Observer que les diagonales d'une telle matrice forment des partitions d'entiers.

ii) Quel énoncé obtient-on en faisant tendre n vers ∞ ? La méthode utilisée au i) permet-elle d'obtenir directement ce résultat ?

Exercice 4 (Plus longue sous-suite croissante)

Soit $M = (m_{i,j})_{i,j \geq 1}$ une matrice d'entiers positifs et presque tous nuls. On définit un entier $\alpha(M)$ comme étant la valeur maximale des sommes

$$\sum_{k \geq 0} m_{i_k j_k}$$

où $((i_k, j_k))_{k \geq 0}$ est une suite d'entrées distinctes de la matrice, telle que $i_k \leq i_{k+1}$ et $j_k \leq j_{k+1}$.

i) Démontrer que $\alpha(M) = \lambda_1$ où la partition λ est la forme des tableaux semistandard images de M par RSK.

ii) On définit $\alpha_k(M)$ de la même façon, mais en sommant cette fois sur un k-uplet de suites disjointes et satisfaisant la même propriété de croissance. Montrer $\alpha_k(M) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$.

On pourra dans un premier temps supposer que M est une matrice de permutation.