# EXERCICES DE COMBINATOIRE – FEUILLE 5

MATTHIEU JOSUAT-VERGÈS & GUILLAUME CHAPUY
–
M2 MATHS FONDAS PARIS 7 (2019).

## Exercice 1 (Nombres de Fuß-Catalan)

On a vu que les nombres de Catalan $C_n$ compte les arbres binaires complets à $n$ sommets internes. On définit de même le nombre de Fuß-Catalan $C_{n,k}$ comme le nombre d'arbres $k$-aires complets à $n$ sommets internes. Donner une formule pour $C_{n,k}$.

(Ensuite, on pourra aussi chercher une famille de chemins comptés par les $C_{n,k}$, dans le style chemins de Dyck.)

## Exercice 2 (Arbres alternants)

Un arbre (de Cayley) est dit *alternant* si pour chaque sommet, son étiquette est plus grande que celles de tous ses voisins, ou plus petite que celles de tous ses voisins. Soit $T_n$ le nombre d'arbres alternants sur $n$ sommets. On pourra vérifier que $T_3 = 2$, $T_4 = 7$.

(i) Montrer que la série $T(z) = \sum_{n\geq 0} T_{n+1} \frac{z^n}{n!}$ satisfait :

$$T(z) = e^{\frac{z}{2}(1+T(z))}.$$

(Indication : on pourra considérer les arbres alternants enracinés en un élément plus petit que tous ses voisins.)

(ii) En déduire une formule pour $T_n$.

## Exercice 3 (Cartes non-séparables)

Une carte planaire est dite *non-séparable* si : soit elle ne contient qu'une arête (éventuellement une boucle), soit elle ne contient pas de boucle et est 2-connexe. On note $C(z)$ la série génératrice des cartes planaires enracinées non-séparables (où l'exposant en $z$ suit le nombre d'arêtes dans la carte).

Le *coeur non-séparable* d'une carte planaire enracinée est la plus grande sous-carte qui contienne la racine et soit non-séparable.

Vérifier qu'on peut décomposer une carte planaire enracinée en : son coeur non-séparable, et une collection de cartes planaires enracinées (qu'on peut voir comme accrochées au coeur non-séparable).

En déduire la relation

$$M^r(z) = 1 + C(zM^r(z)^2)$$

où $M^r(z)$ la série génératrice des cartes planaires enracinées.

## Exercice 4 (Codage de Mullin)

En utilisant le codage de Mullin vu en cours, montrer qu'il y a une bijection entre :

— cartes planaires enracinées boisées à $n$ arêtes,

— cartes planaires enracinées cubiques munies d'un cycle hamiltonien de longueur $2n$.