

# Combinatoire bijective des cartes de genre supérieur

Guillaume Chapuy, soutenance de thèse

Mardi 9 Juin 2009.

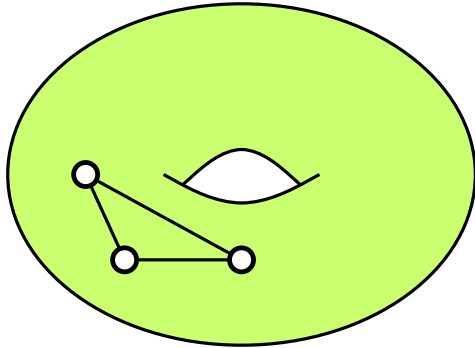
# **Les cartes (trois définitions)**

## Carte de genre $g$

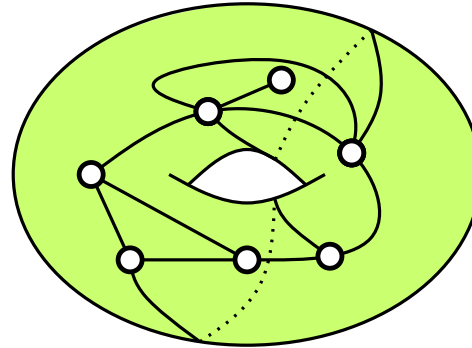
= graphe dessiné sans croisement d'arêtes sur le tore à  $g$  anses, de telle sorte que les faces soient **simplement connexes**.

## Carte de genre $g$

= graphe dessiné sans croisement d'arêtes sur le tore à  $g$  anses, de telle sorte que les faces soient **simplement connexes**.



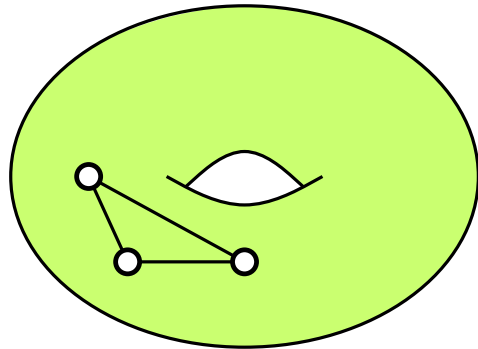
pas une carte



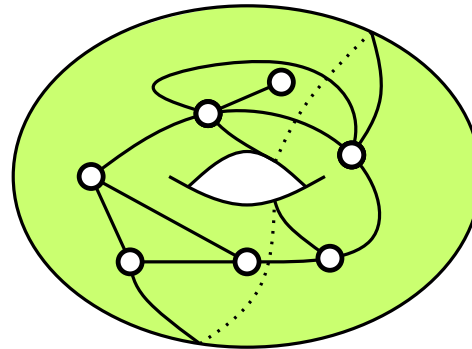
carte sur le tore

## Carte de genre $g$

= graphe dessiné sans croisement d'arêtes sur le tore à  $g$  anses, de telle sorte que les faces soient **simplement connexes**.

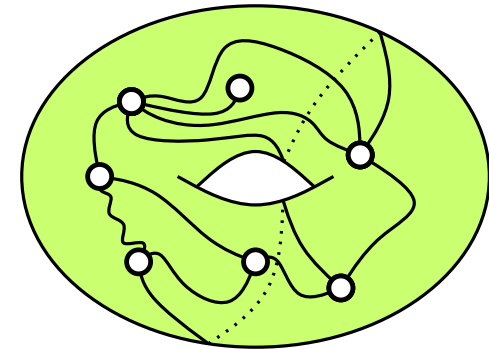


pas une carte



carte sur le tore

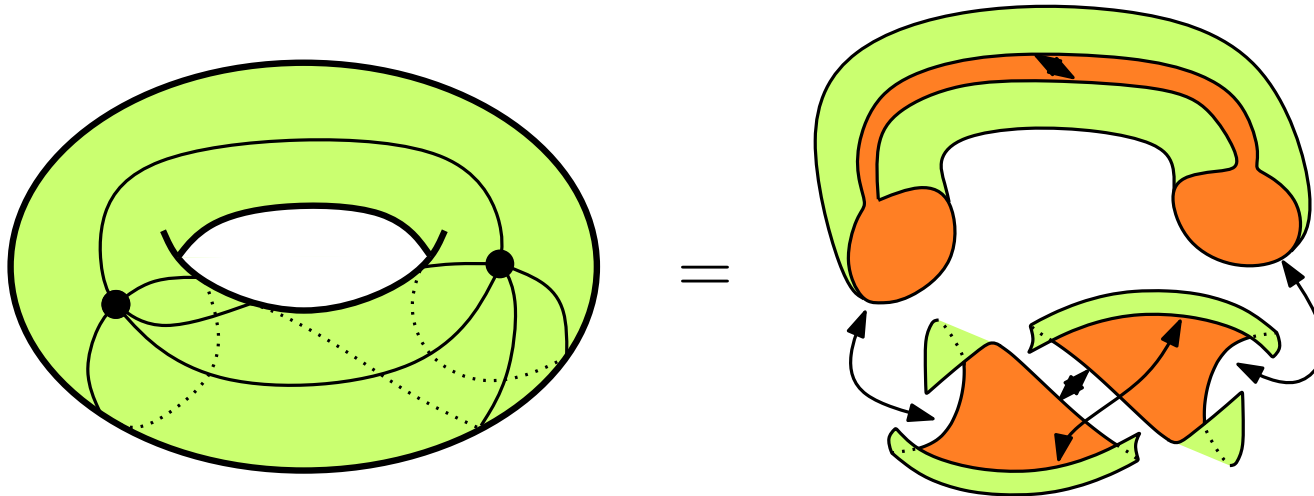
=



On considère les cartes à **homéomorphisme près**.

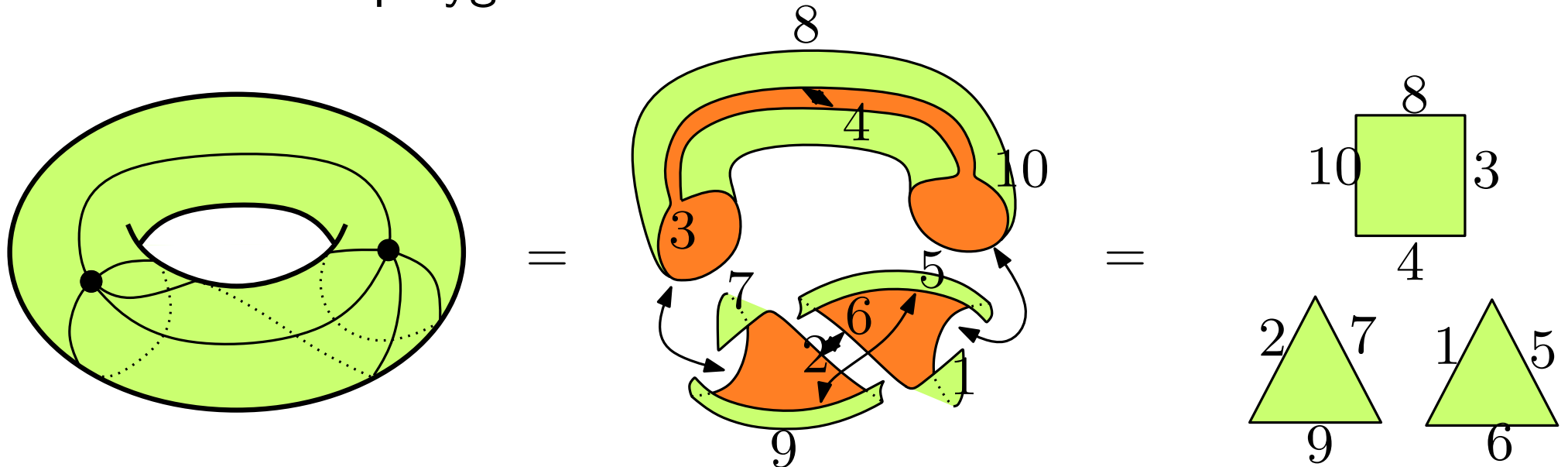
## Carte de genre $g$

= « surface discrète » formée du recollement bord à bord d'un nombre fini de polygones.



## Carte de genre $g$

= « surface discrète » formée du recollement bord à bord d'un nombre fini de polygones.

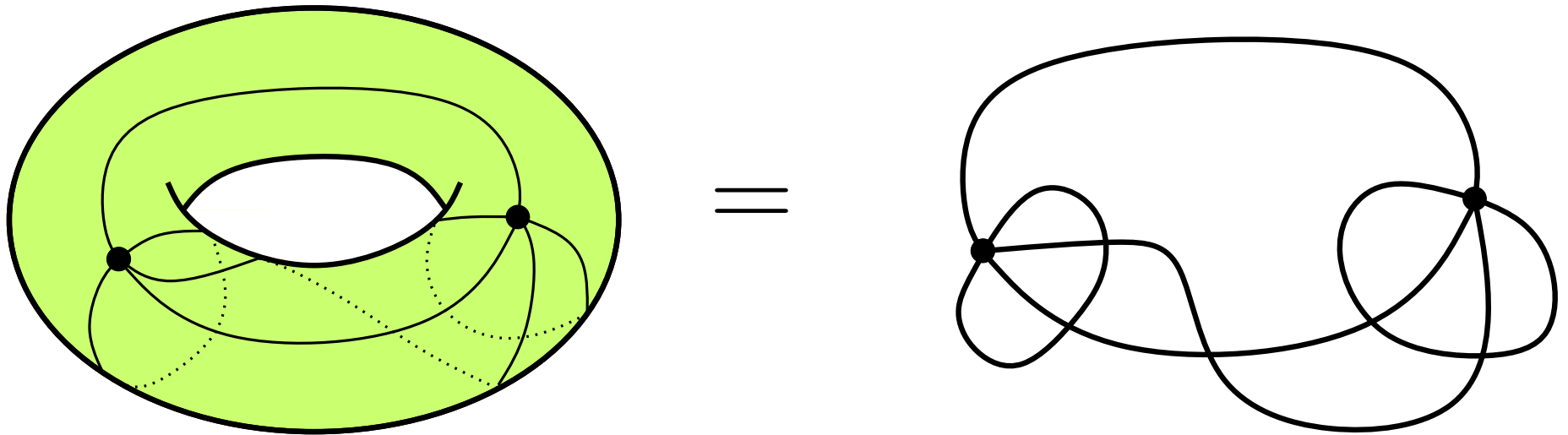


Seul compte le « type combinatoire » du recollement.

$$\begin{aligned} \phi &= (3, 4, 8, 10)(1, 5, 6)(2, 7, 9) \\ \alpha &= (1, 10)(2, 6)(3, 7)(4, 8)(5, 9) \end{aligned}$$

## Carte de genre $g$

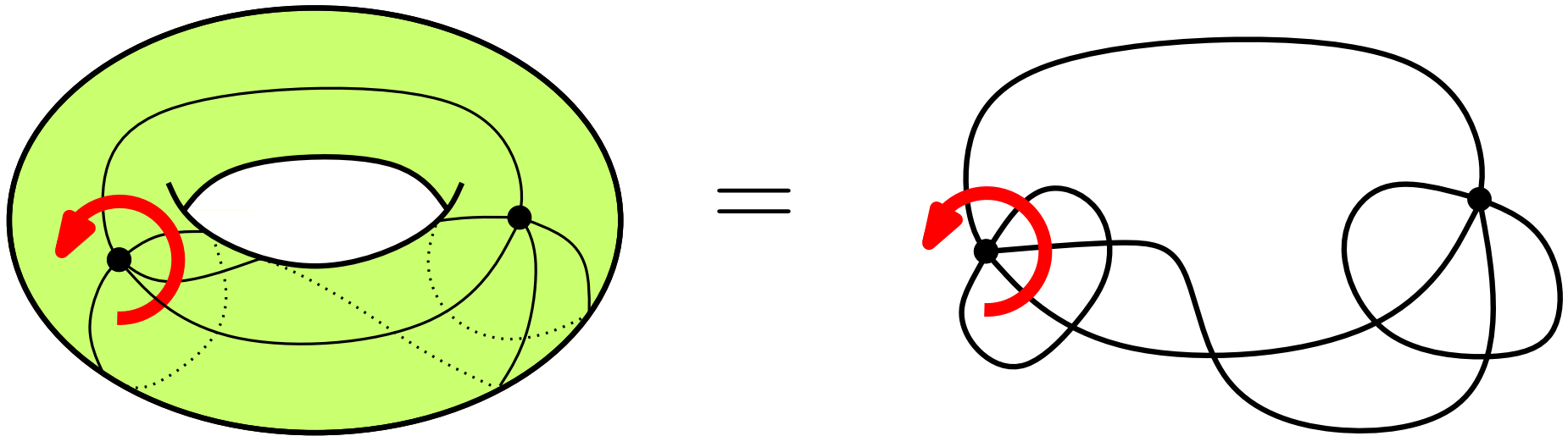
= graphe muni d'un **ordre cyclique** des arêtes autour de chaque sommet





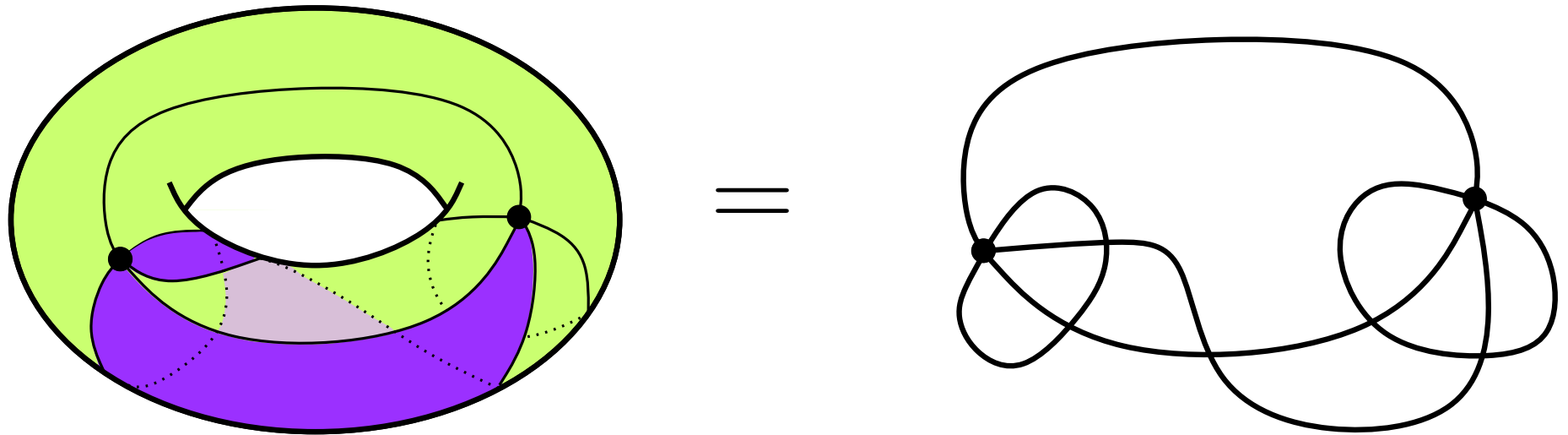
## Carte de genre $g$

= graphe muni d'un **ordre cyclique** des arêtes autour de chaque sommet



## Carte de genre $g$

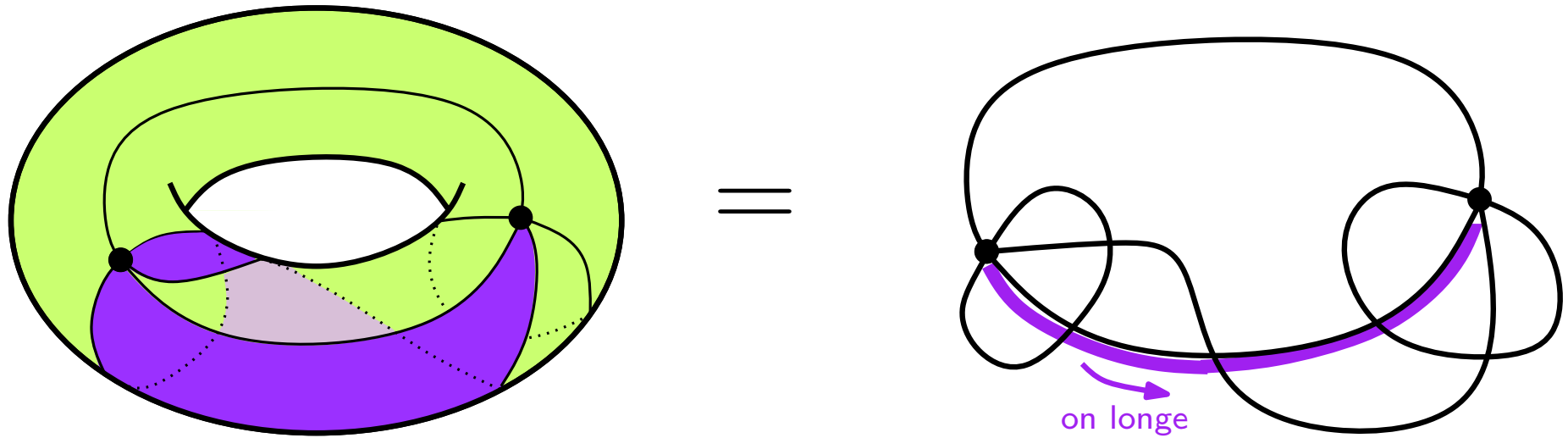
= graphe muni d'un **ordre cyclique** des arêtes autour de chaque sommet



**faces** topologiques = **bords** sur le graphe

## Carte de genre $g$

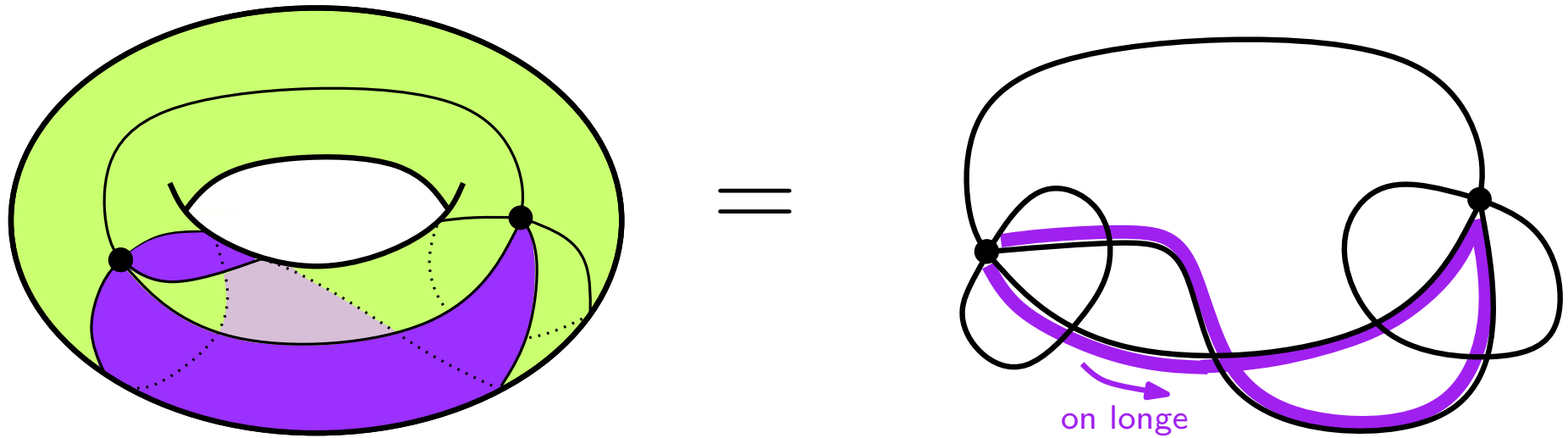
= graphe muni d'un **ordre cyclique** des arêtes autour de chaque sommet



**faces** topologiques = **bords** sur le graphe

## Carte de genre $g$

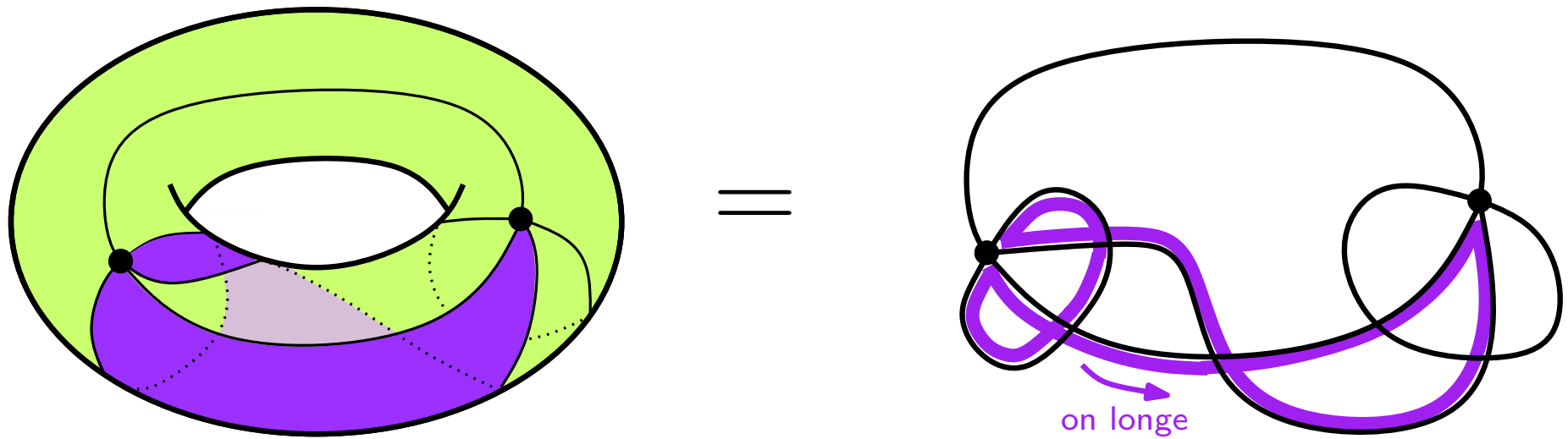
= graphe muni d'un **ordre cyclique** des arêtes autour de chaque sommet



**faces** topologiques = **bords** sur le graphe

## Carte de genre $g$

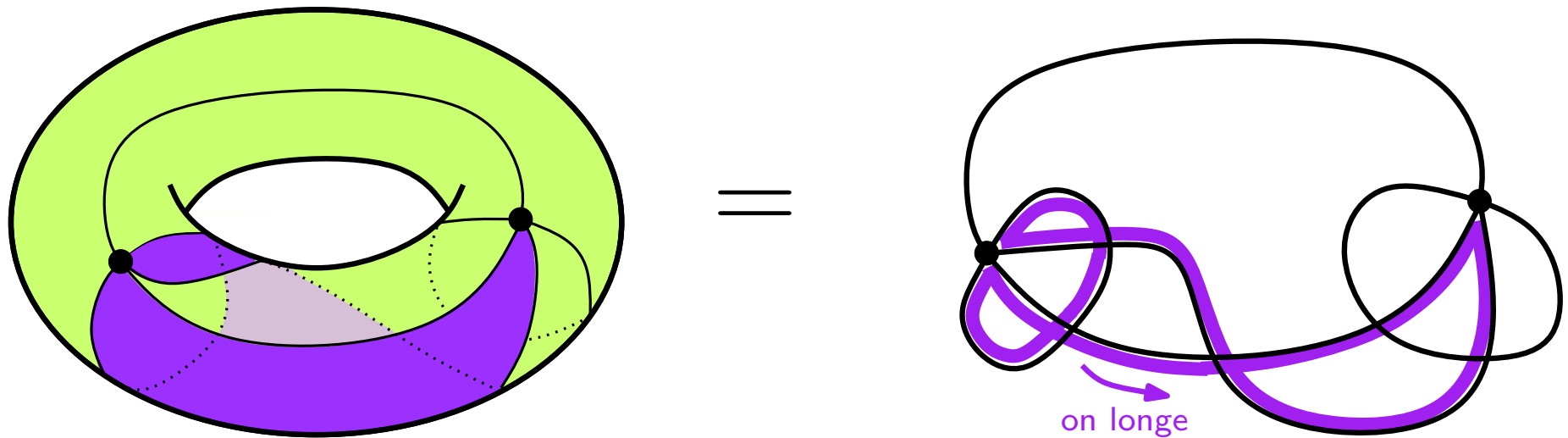
= graphe muni d'un **ordre cyclique** des arêtes autour de chaque sommet



**faces** topologiques = **bords** sur le graphe

## Carte de genre $g$

= graphe muni d'un **ordre cyclique** des arêtes autour de chaque sommet



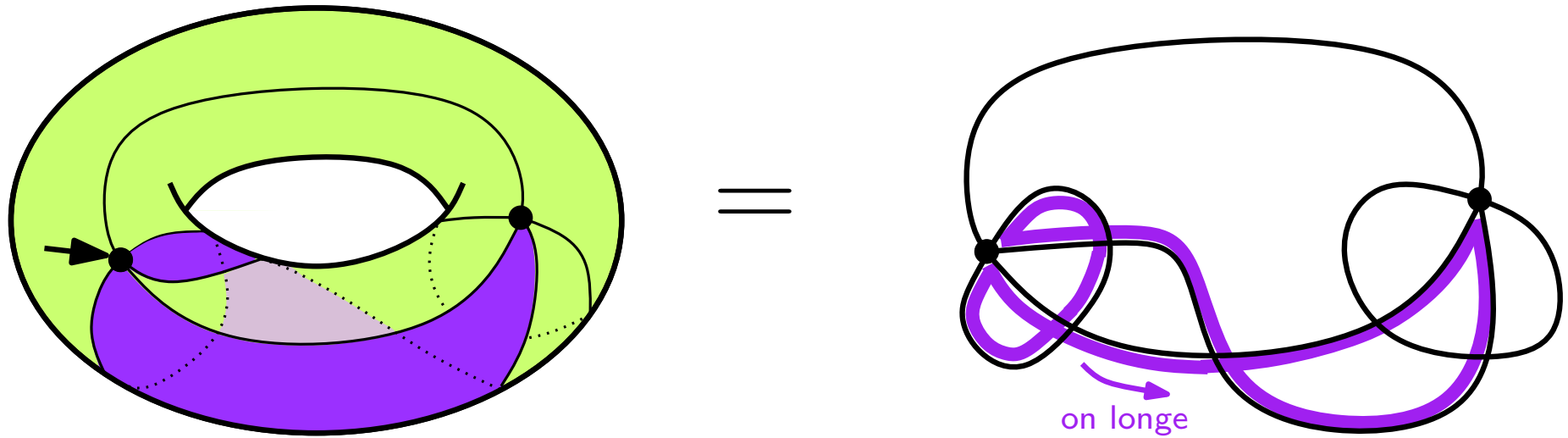
**faces** topologiques = **bords** sur le graphe

La **relation d'Euler** donne le genre de la carte :

$$\text{sommets} + \text{faces} = \text{arêtes} + 2 - 2g$$

## Carte de genre $g$

= graphe muni d'un **ordre cyclique** des arêtes autour de chaque sommet



**faces** topologiques = **bords** sur le graphe

La **relation d'Euler** donne le genre de la carte :

$$\text{sommets} + \text{faces} = \text{arêtes} + 2 - 2g$$

# Combinatoire bijective



# Que veut-on faire avec les cartes (dans cet exposé) ?

## 1. Les compter.

les cartes ont de remarquables propriétés énumératives.

[Tutte, Bender&Canfield, BIPZ...]

# Que veut-on faire avec les cartes (dans cet exposé) ?

## 1. Les compter.

les cartes ont de remarquables propriétés énumératives.

[Tutte, Bender&Canfield, BIPZ...]

## 2. Considérer des cartes aléatoires.

mesure uniforme sur  
les cartes de genre  $g$   
à  $n$  arêtes

=

modèle de  
surface aléatoire  
discrète

# Que veut-on faire avec les cartes (dans cet exposé) ?

## 1. Les compter.

les cartes ont de remarquables propriétés énumératives.

[Tutte, Bender&Canfield, BIPZ...]

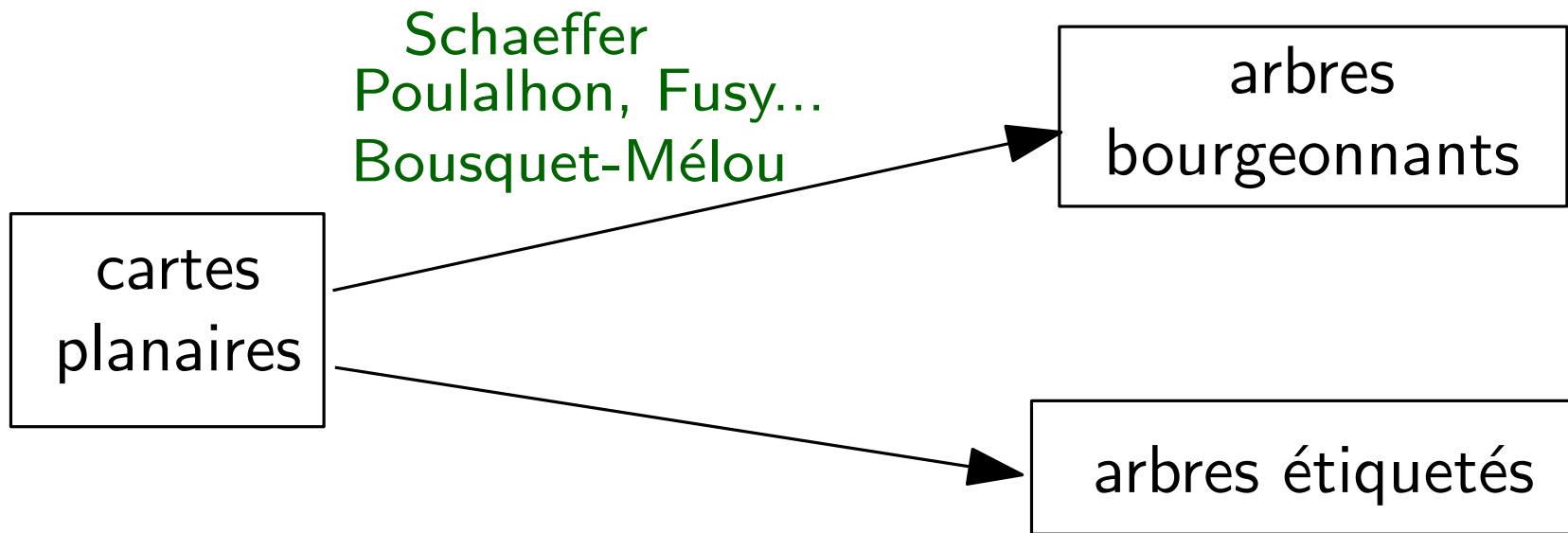
## 2. Considérer des cartes aléatoires.

mesure uniforme sur  
les cartes de genre  $g$   
à  $n$  arêtes  $\quad = \quad$  modèle de  
surface aléatoire  
discrète

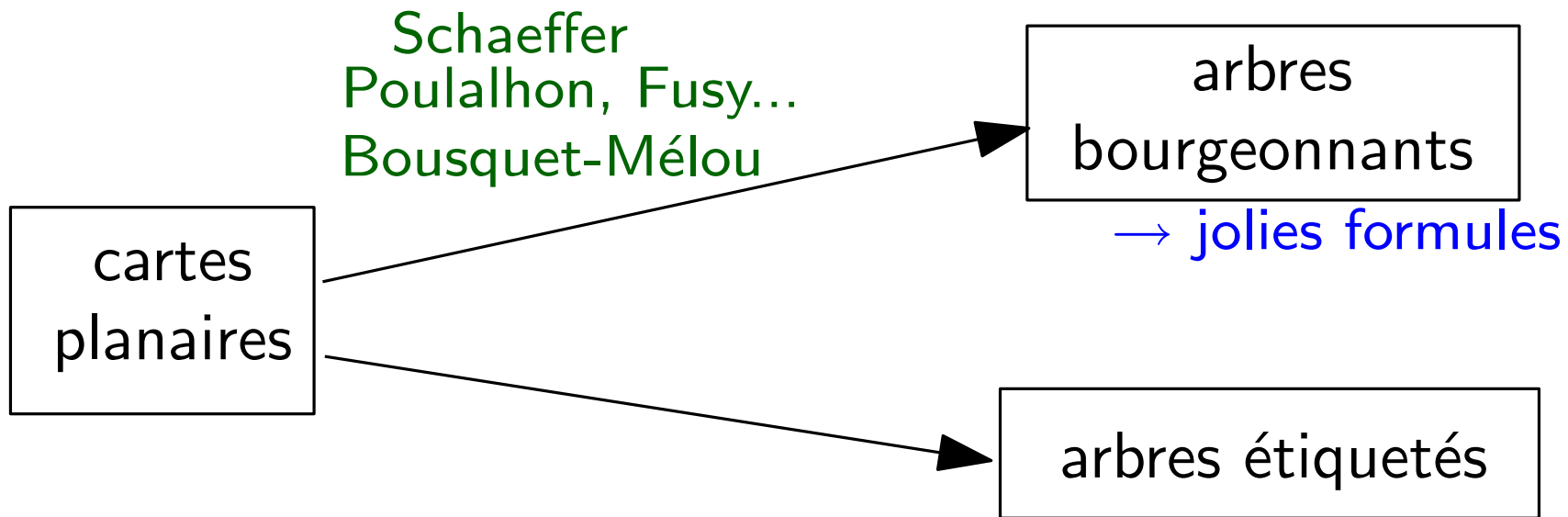
$n \rightarrow \infty$  + normalisation : surface aléatoire continue ?

[Chassaing-Schaeffer]  
]Marckert-Mokkadem]  
[Le-Gall, LG&Paulin]  
[Miermont]  
[BDFG, BG]

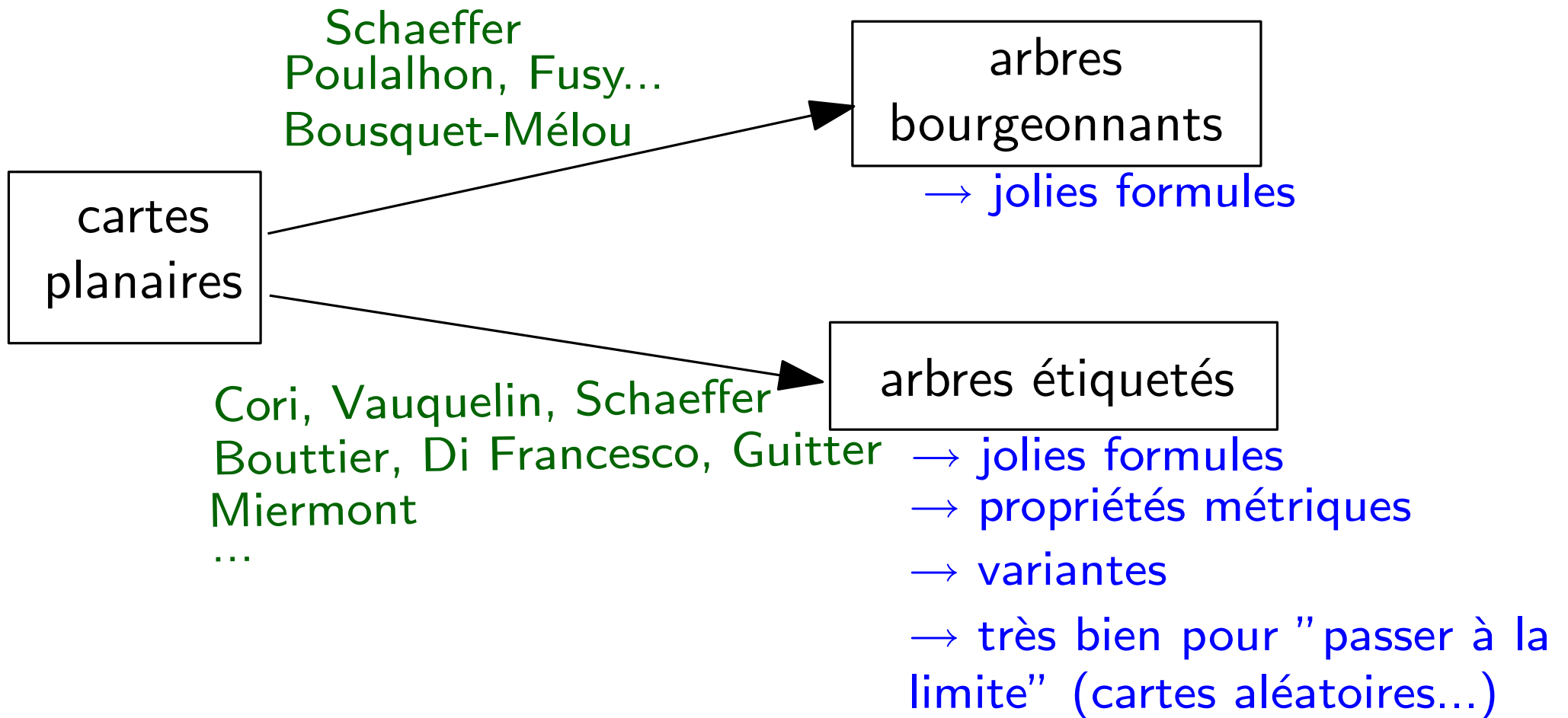
# Combinatoire bijective des cartes planaires



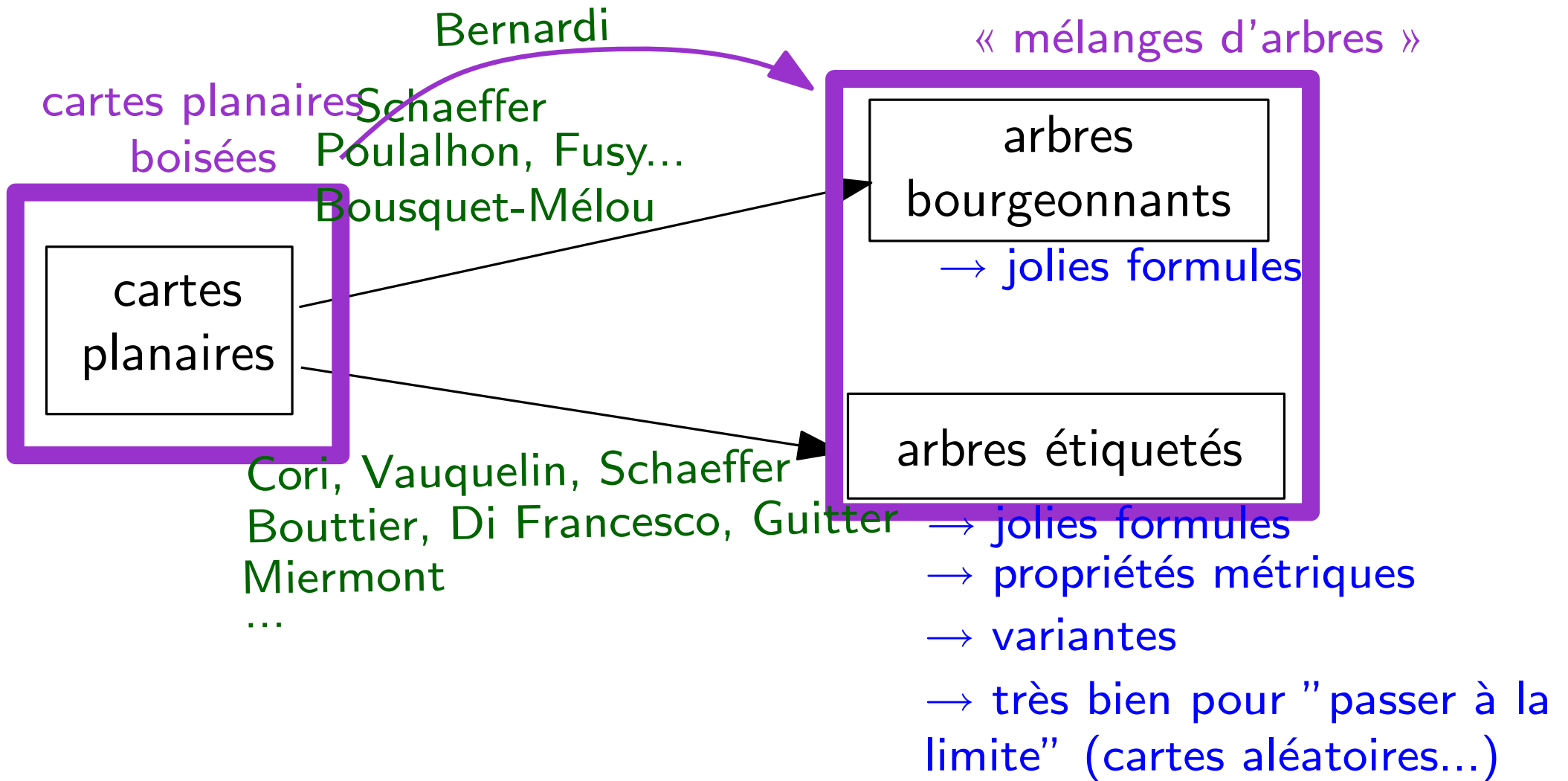
# Combinatoire bijective des cartes planaires



# Combinatoire bijective des cartes planaires



# Combinatoire bijective des cartes planaires



# Combinatoire bijective des cartes de genre $g$

cartes de  
genre  $g$



# Combinatoire bijective des cartes de genre $g$



# Combinatoire bijective des cartes de genre $g$

cartes de  
genre  $g$

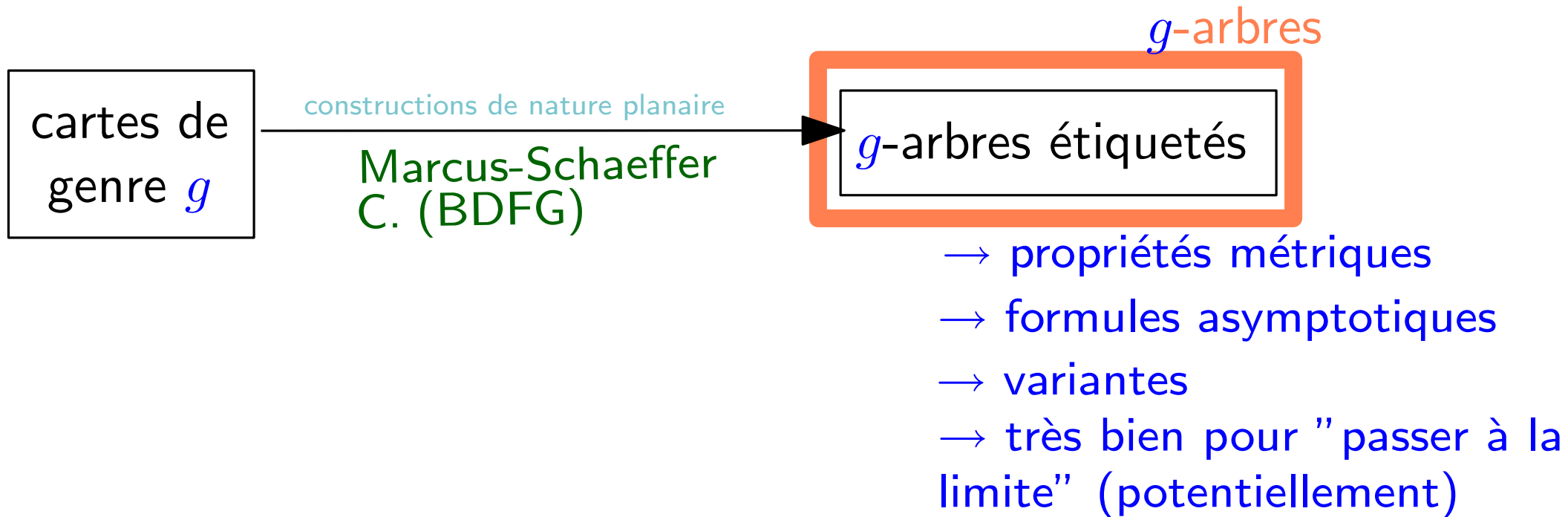
constructions de nature planaire

Marcus-Schaeffer  
C. (BDFG)

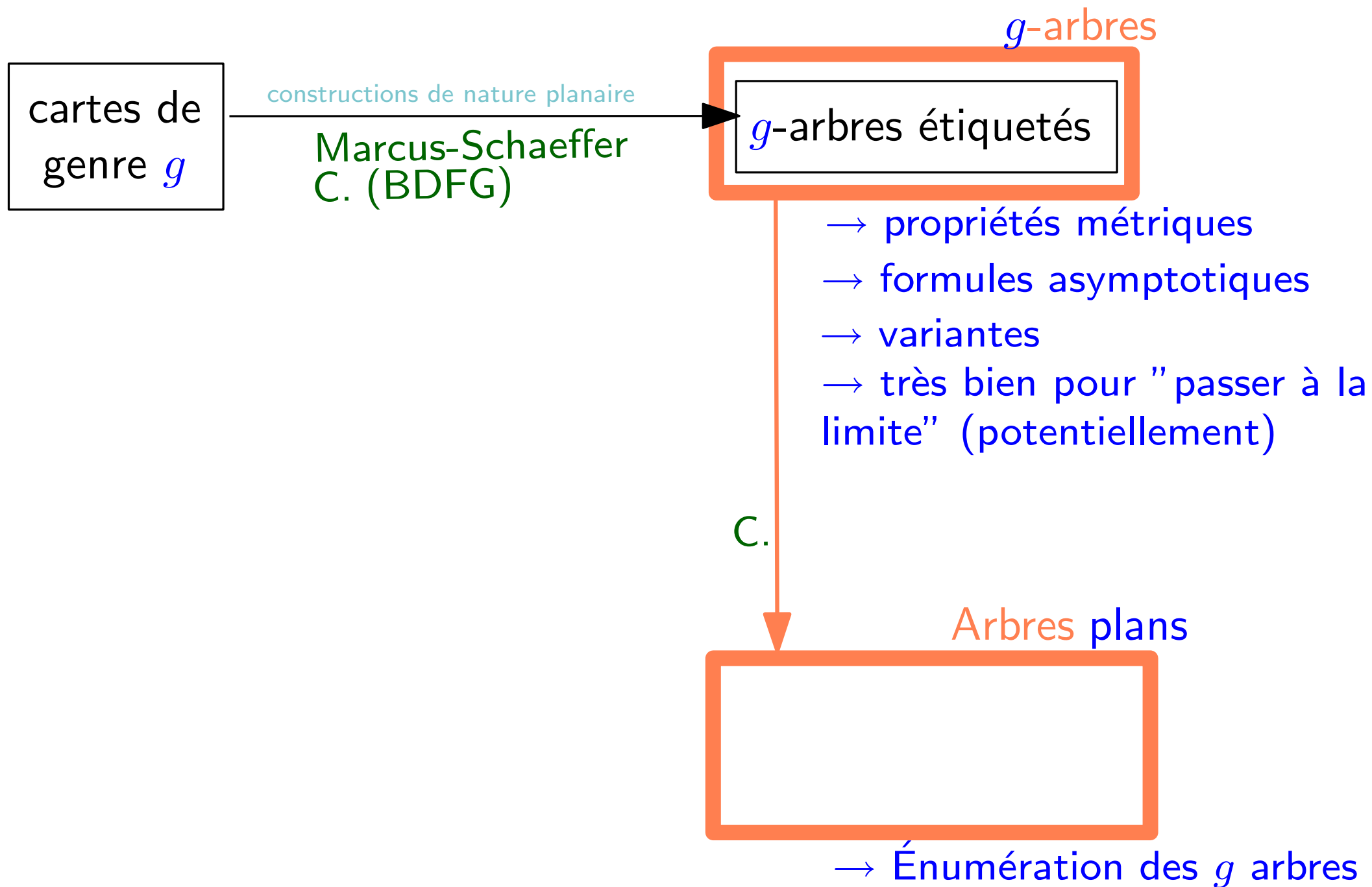
$g$ -arbres étiquetés

- propriétés métriques
- formules asymptotiques
- variantes
- très bien pour "passer à la limite" (potentiellement)

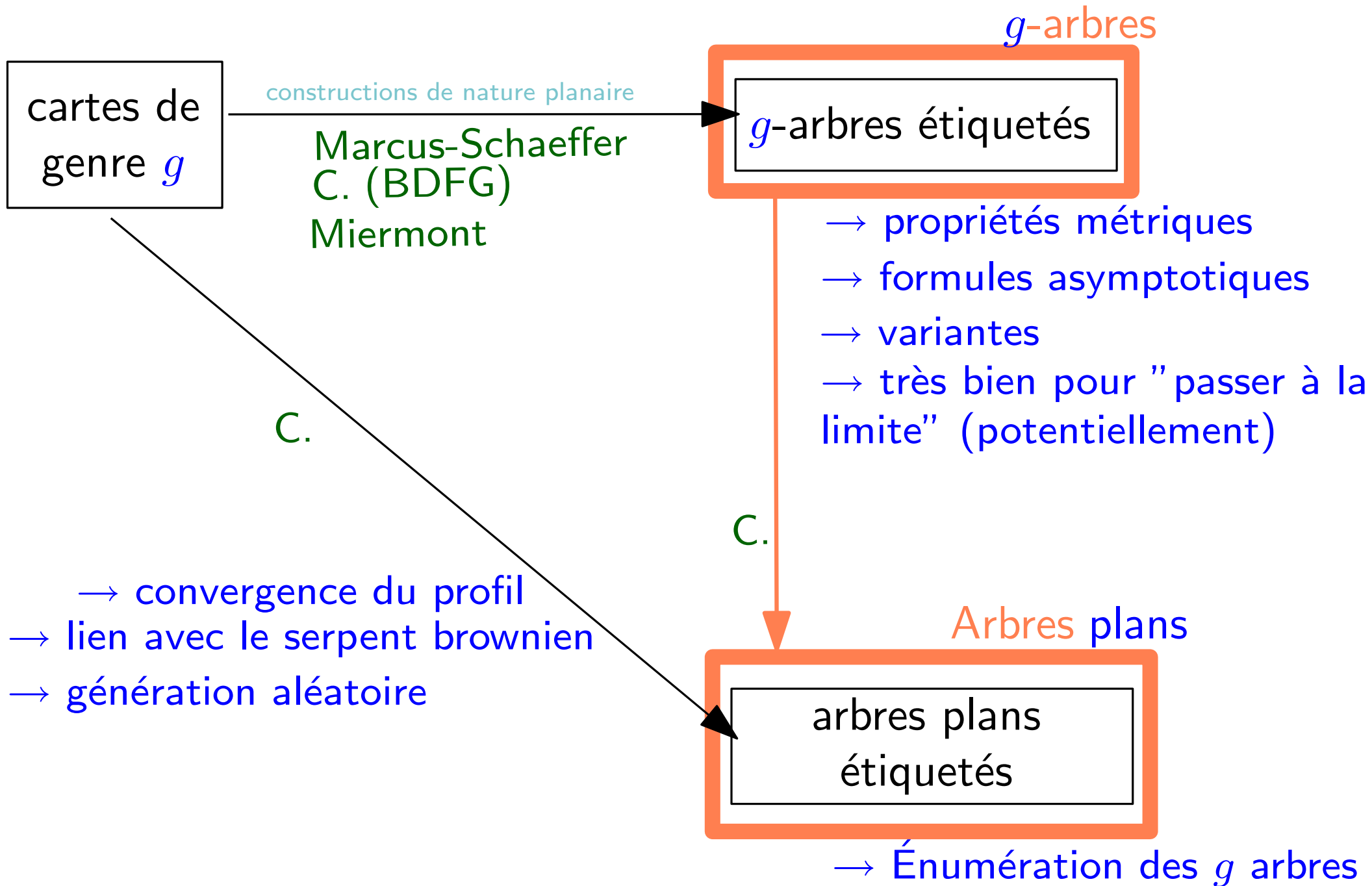
# Combinatoire bijective des cartes de genre $g$



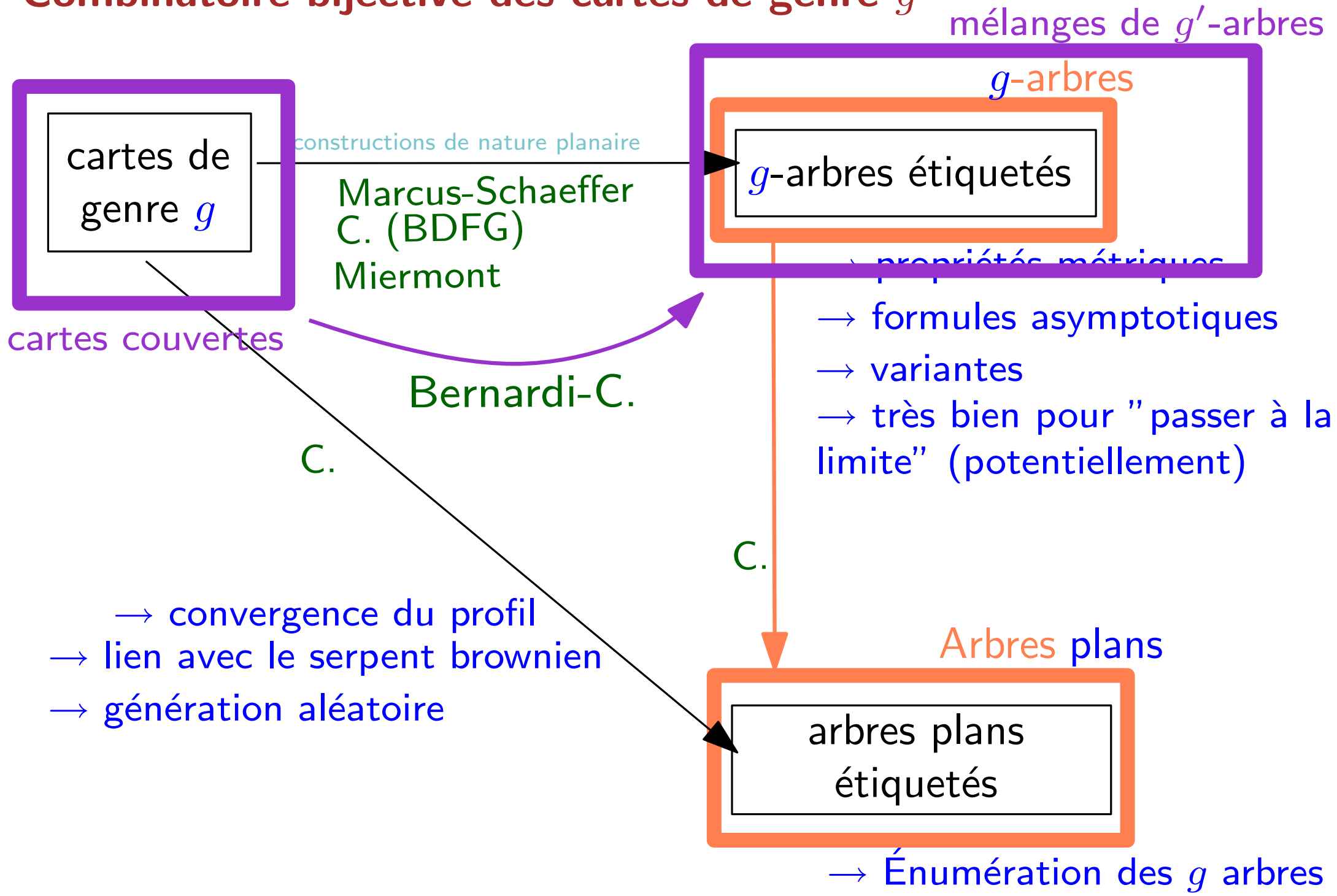
# Combinatoire bijective des cartes de genre $g$



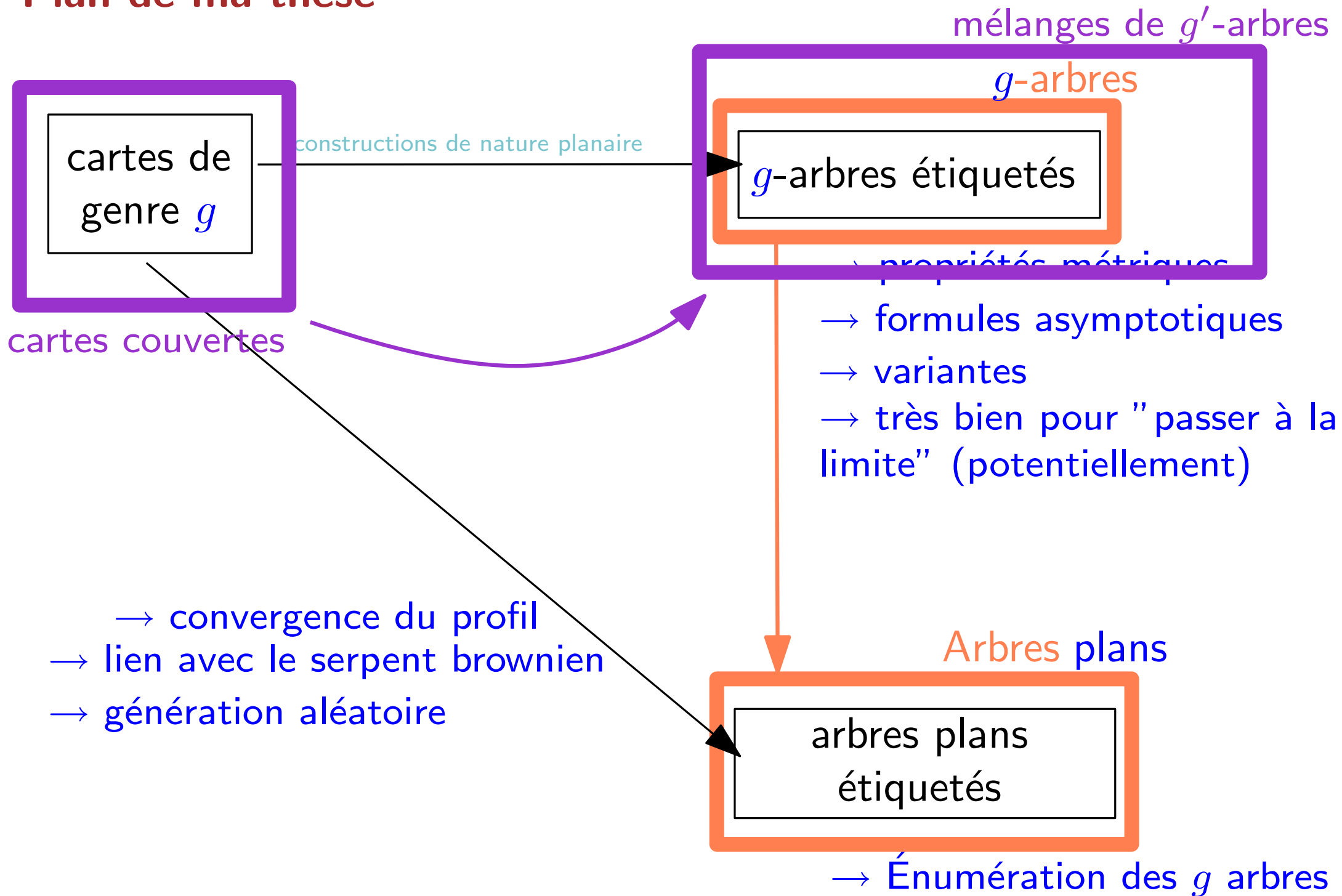
# Combinatoire bijective des cartes de genre $g$



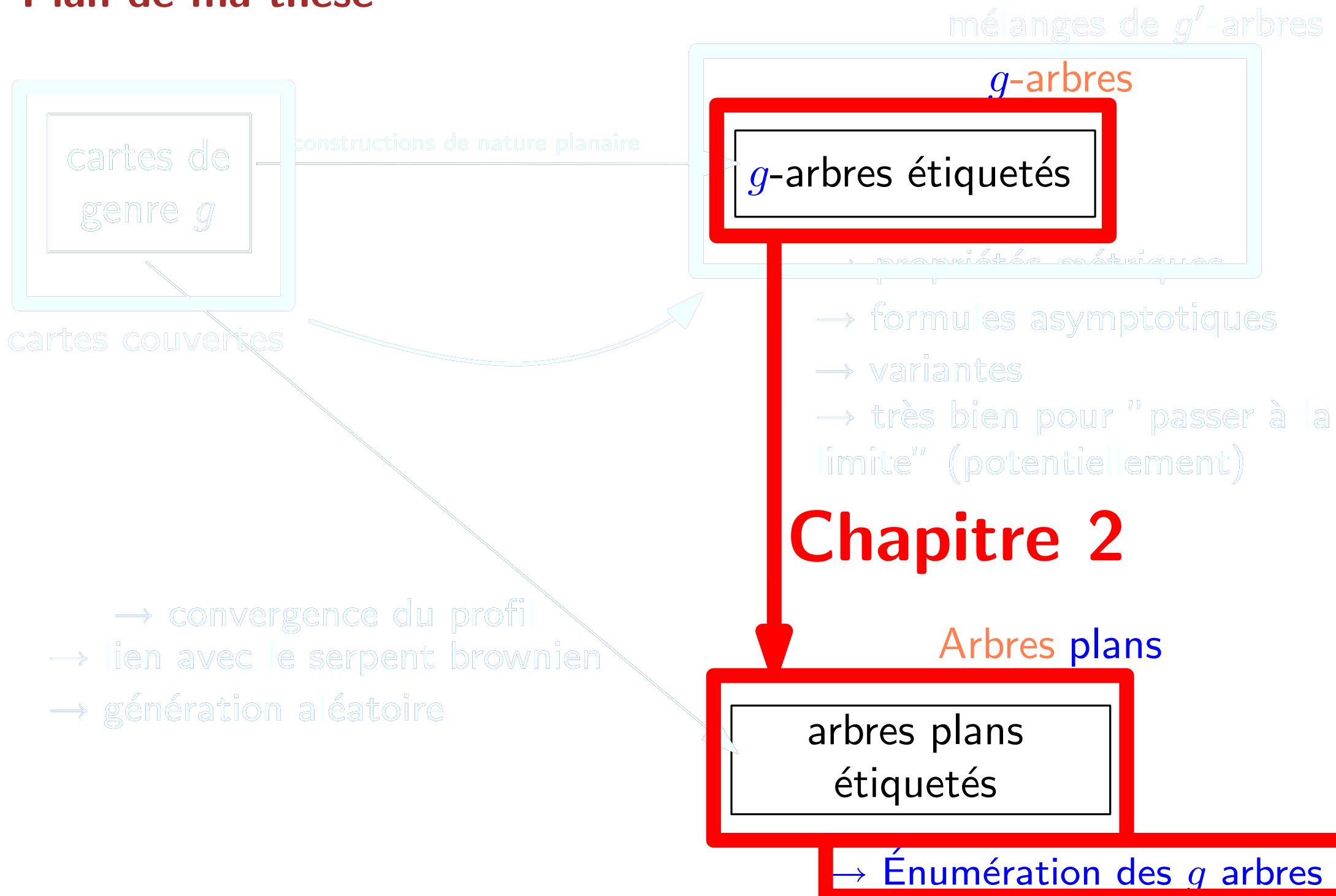
# Combinatoire bijective des cartes de genre $g$



# Plan de ma thèse

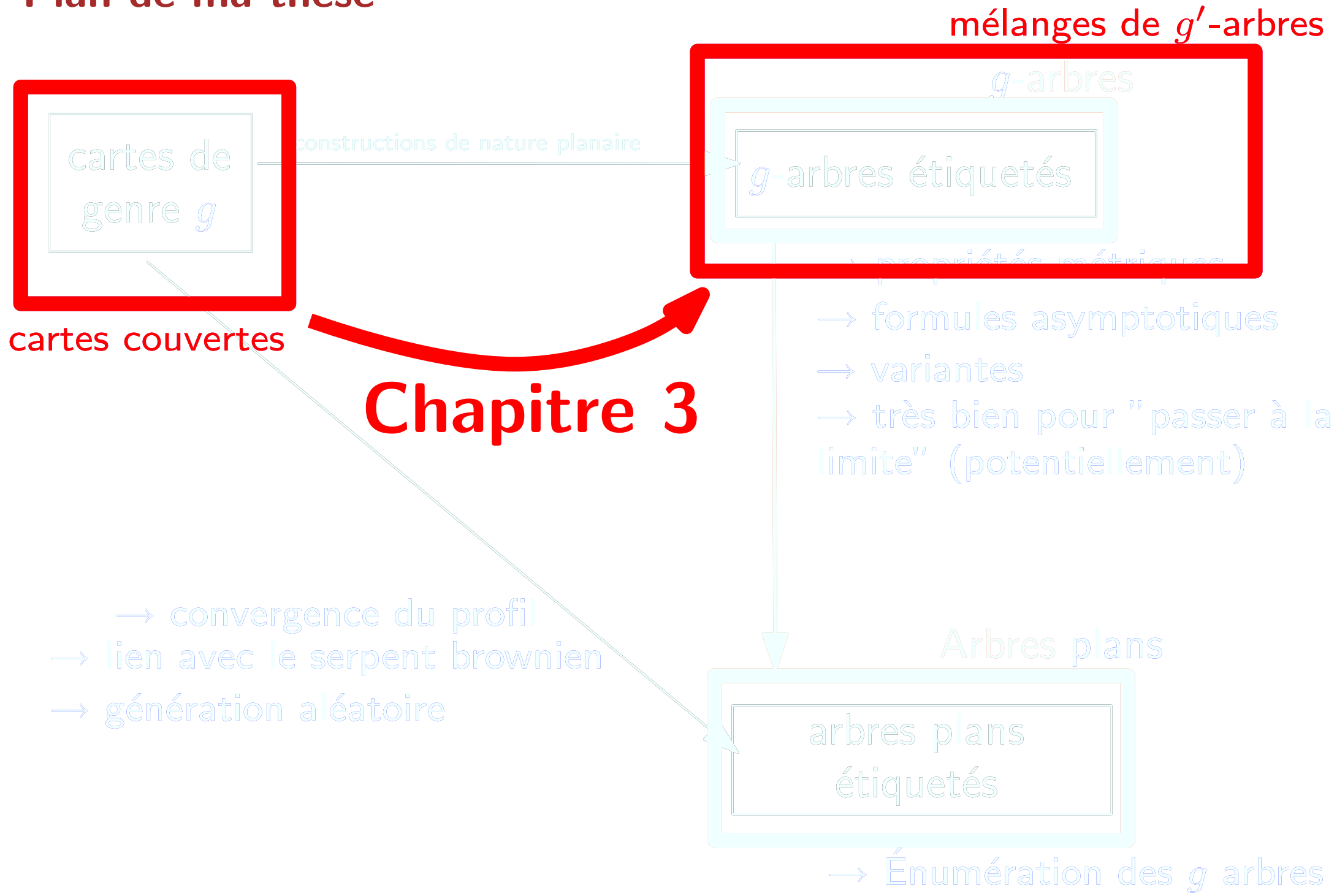


# Plan de ma thèse

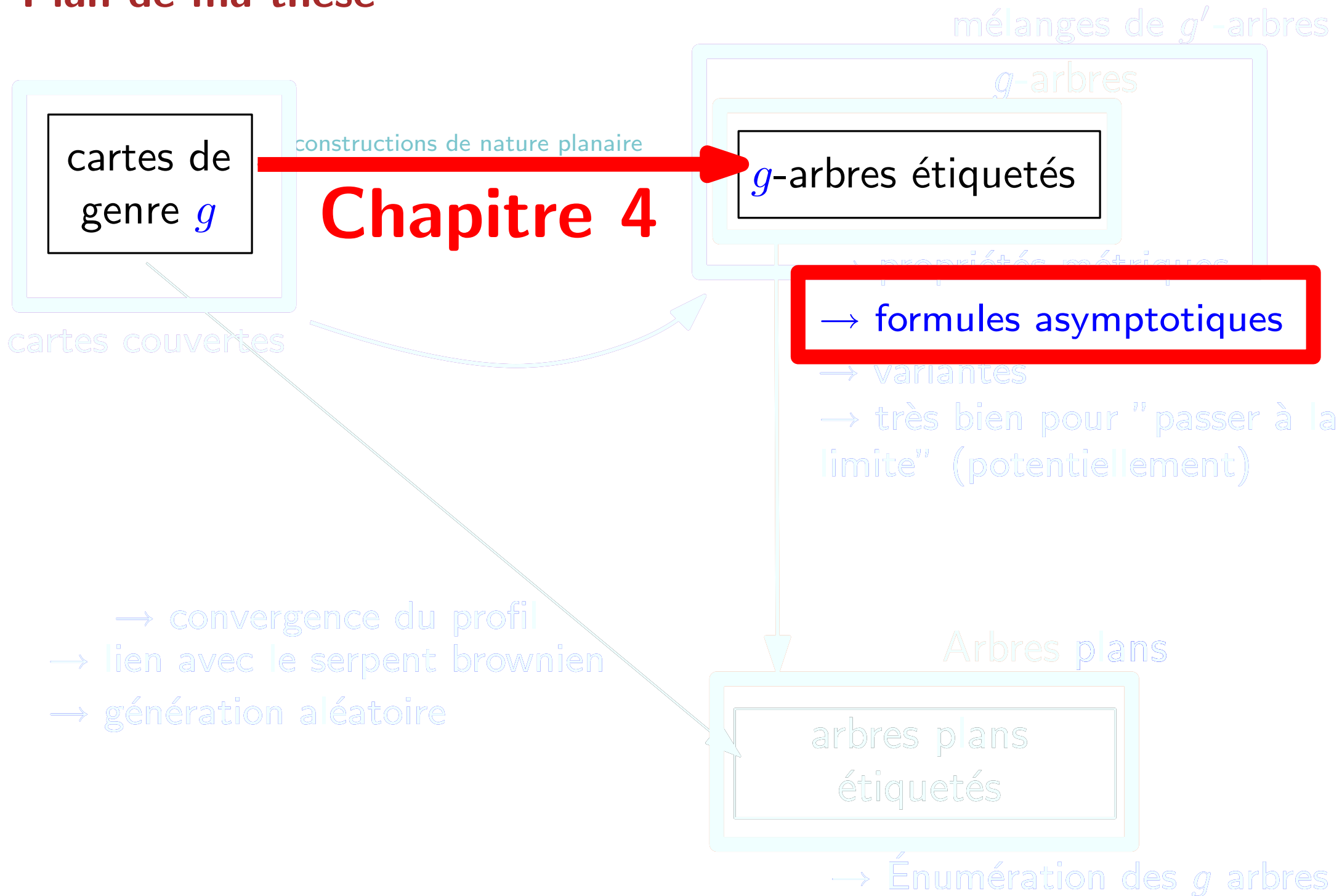




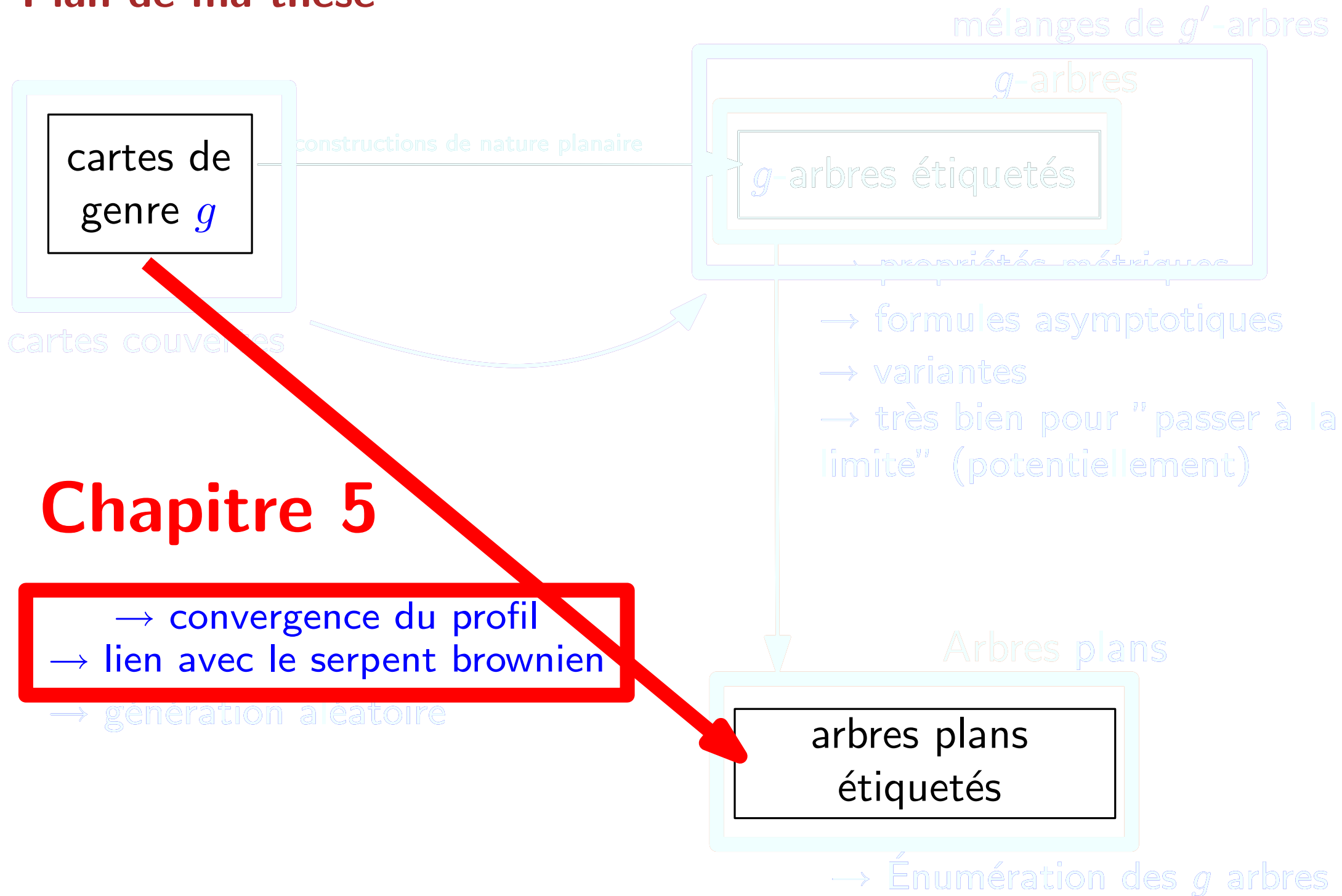
# Plan de ma thèse



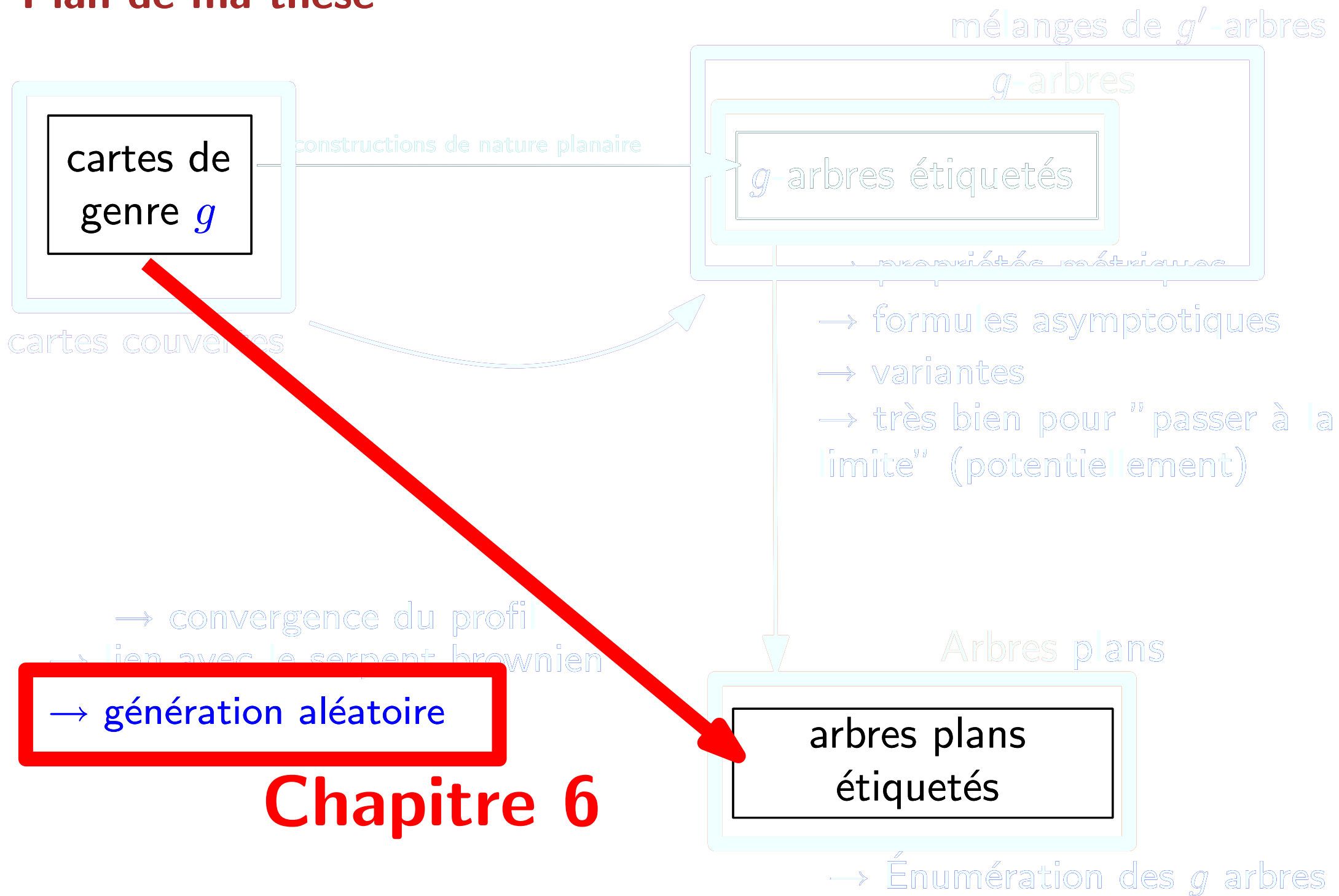
# Plan de ma thèse



# Plan de ma thèse



# Plan de ma thèse

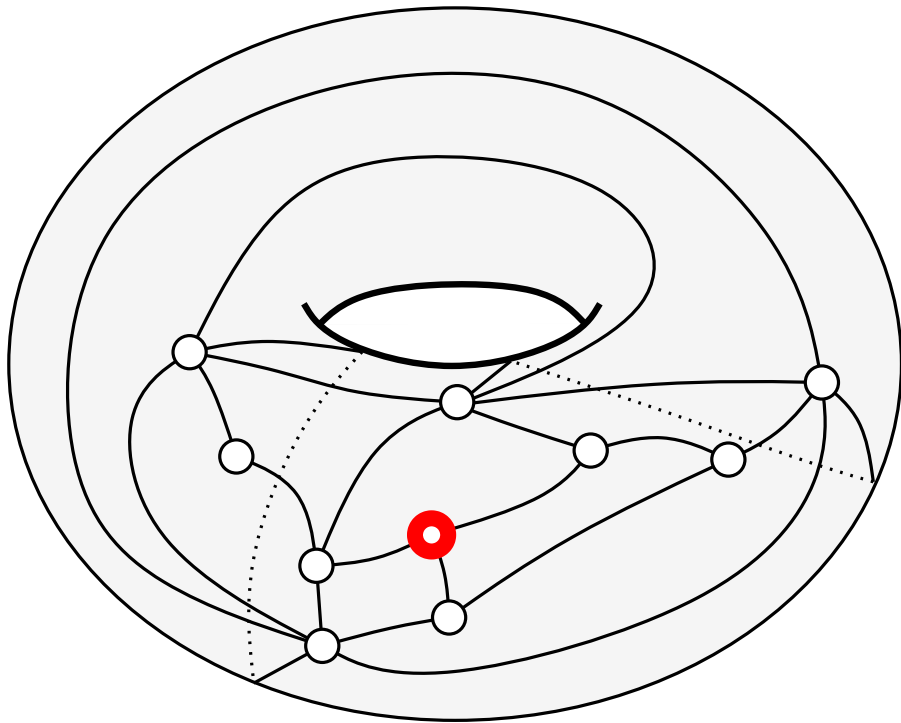


# Bijections par exploration géodésique

Cori-Vauquelin-Marcus-Schaeffer  
Bouttier-Di Francesco-Guitter  
Miermont

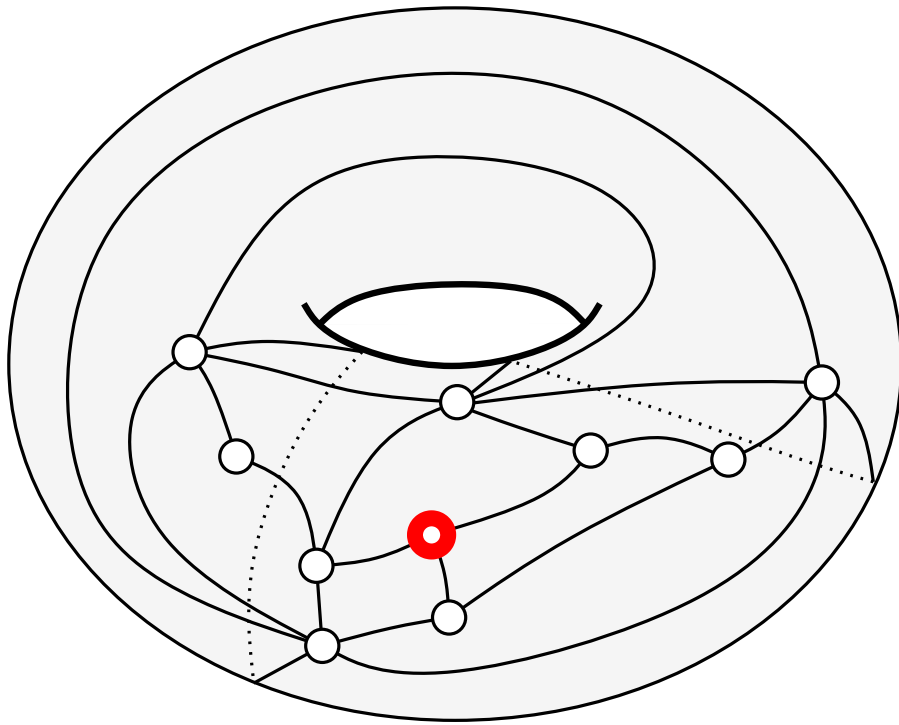
## La bijection de Marcus et Schaeffer (à la Miermont) :

On part d'une **quadrangulation bipartie** de genre  $g$   
à  $n$  faces avec un sommet pointé.

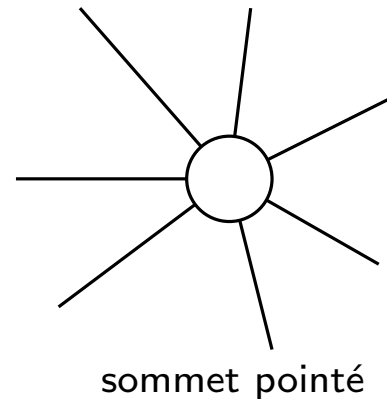


## La bijection de Marcus et Schaeffer (à la Miermont) :

On part d'une **quadrangulation bipartie** de genre  $g$   
à  $n$  faces avec un sommet pointé.

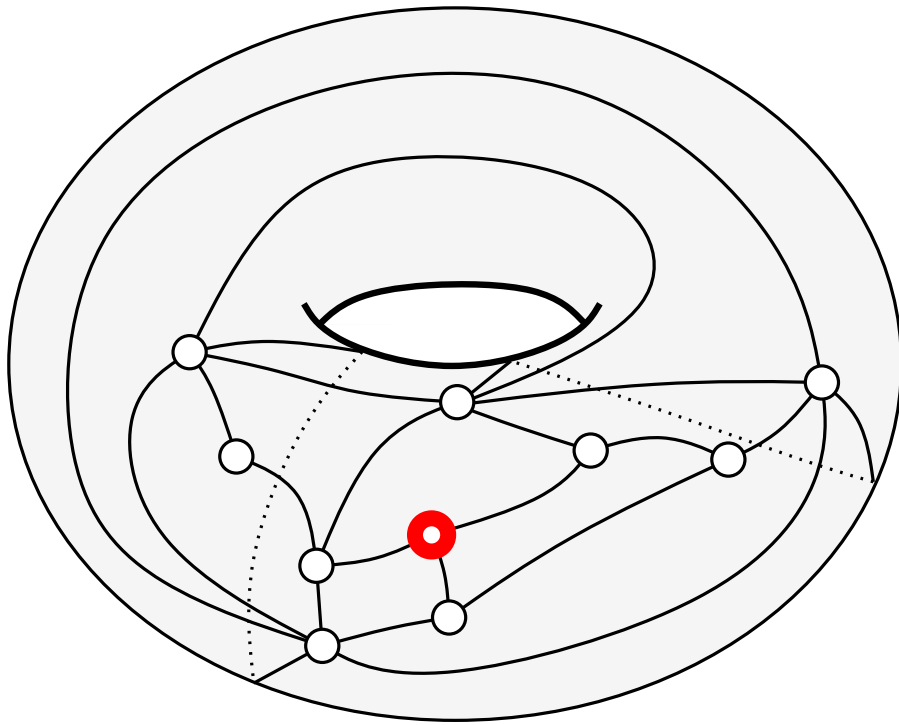


À partir de ce sommet, on définit un processus d'**exploration géodésique** avec des **règles de priorité à droite**.

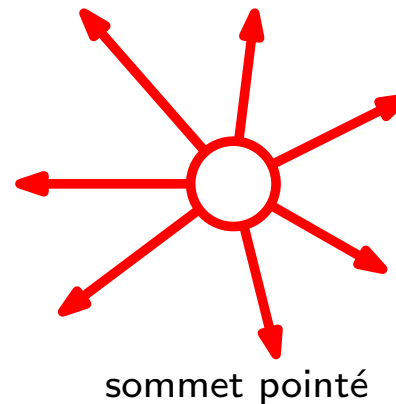


## La bijection de Marcus et Schaeffer (à la Miermont) :

On part d'une **quadrangulation bipartie** de genre  $g$   
à  $n$  faces avec un sommet pointé.



À partir de ce sommet, on définit un processus d'**exploration géodésique** avec des **règles de priorité à droite**.

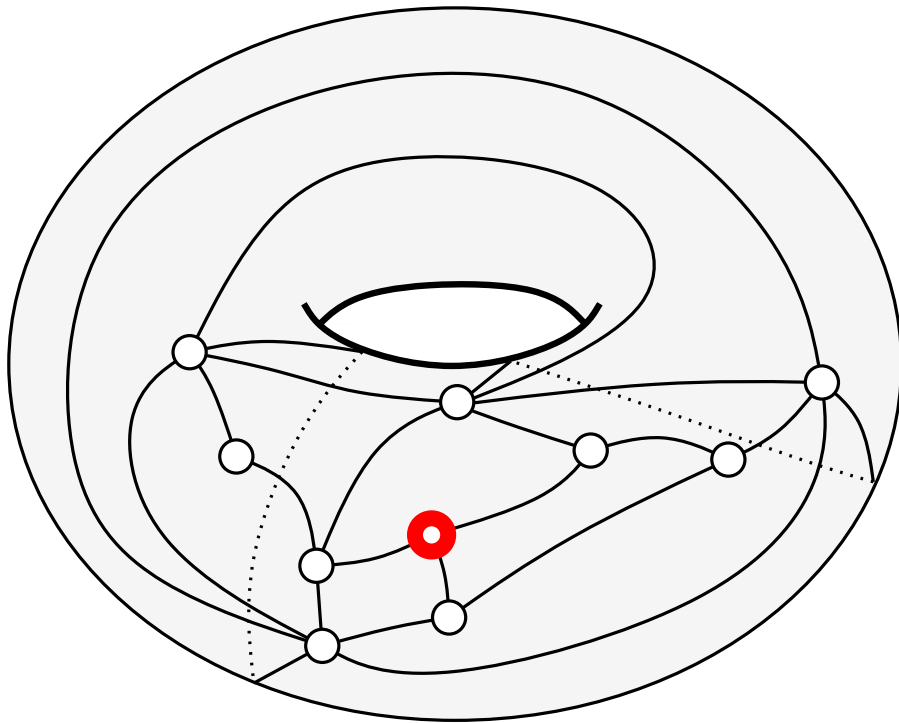


sommet pointé

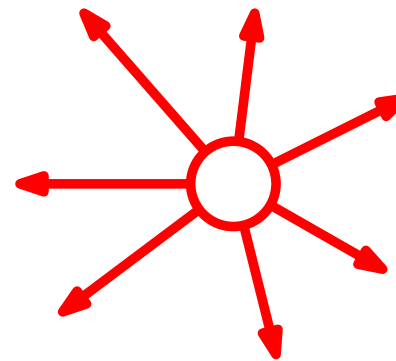


## La bijection de Marcus et Schaeffer (à la Miermont) :

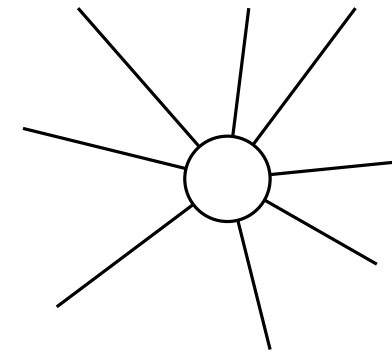
On part d'une **quadrangulation bipartie** de genre  $g$  à  $n$  faces avec un sommet pointé.



À partir de ce sommet, on définit un processus d'**exploration géodésique** avec des **règles de priorité à droite**.



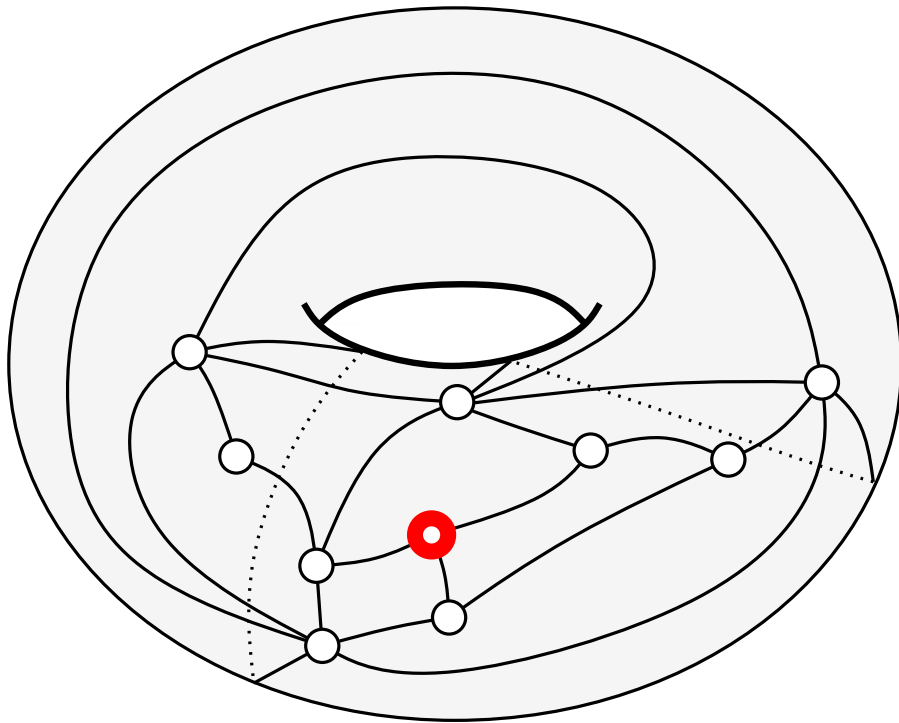
sommet pointé



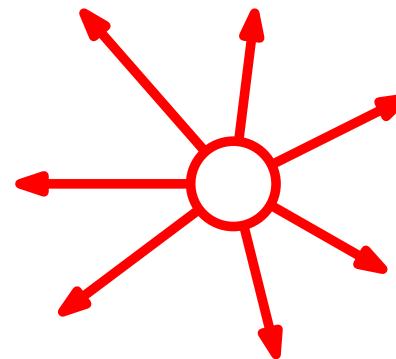
autre sommet

## La bijection de Marcus et Schaeffer (à la Miermont) :

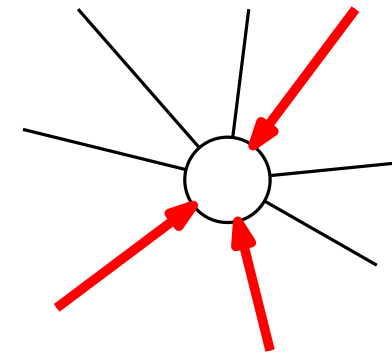
On part d'une **quadrangulation bipartie** de genre  $g$  à  $n$  faces avec un sommet pointé.



À partir de ce sommet, on définit un processus d'**exploration géodésique** avec des **règles de priorité à droite**.



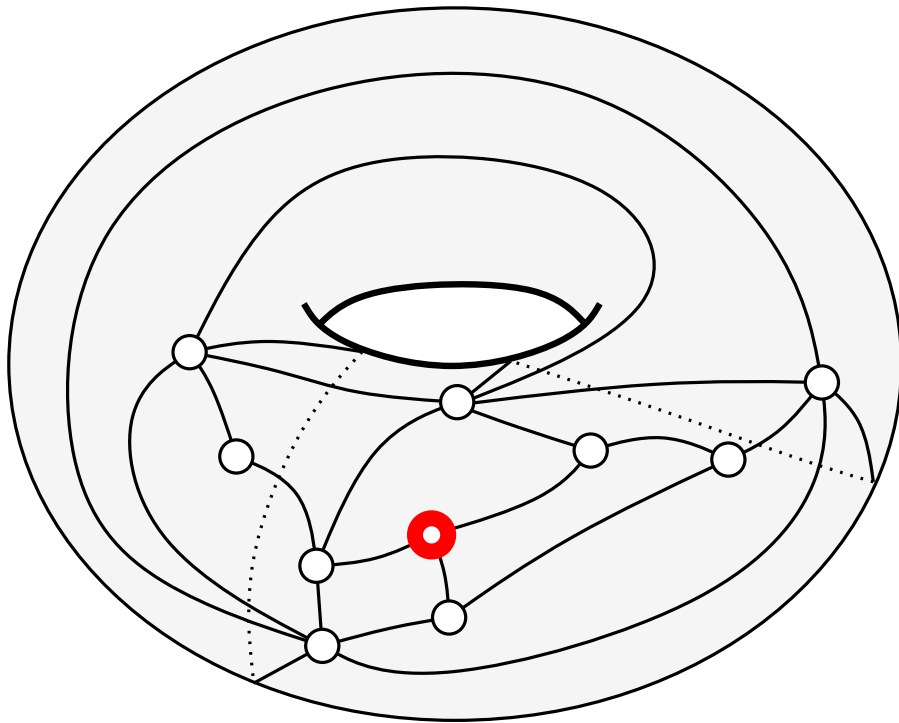
sommet pointé



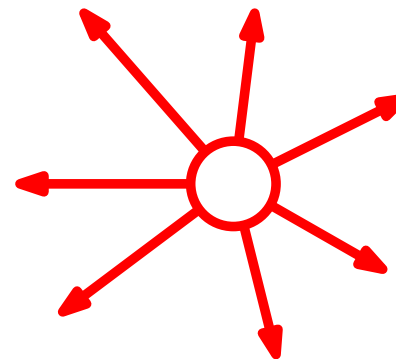
autre sommet

## La bijection de Marcus et Schaeffer (à la Miermont) :

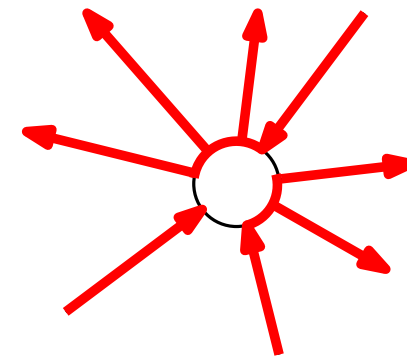
On part d'une **quadrangulation bipartie** de genre  $g$  à  $n$  faces avec un sommet pointé.



À partir de ce sommet, on définit un processus d'**exploration géodésique** avec des **règles de priorité à droite**.



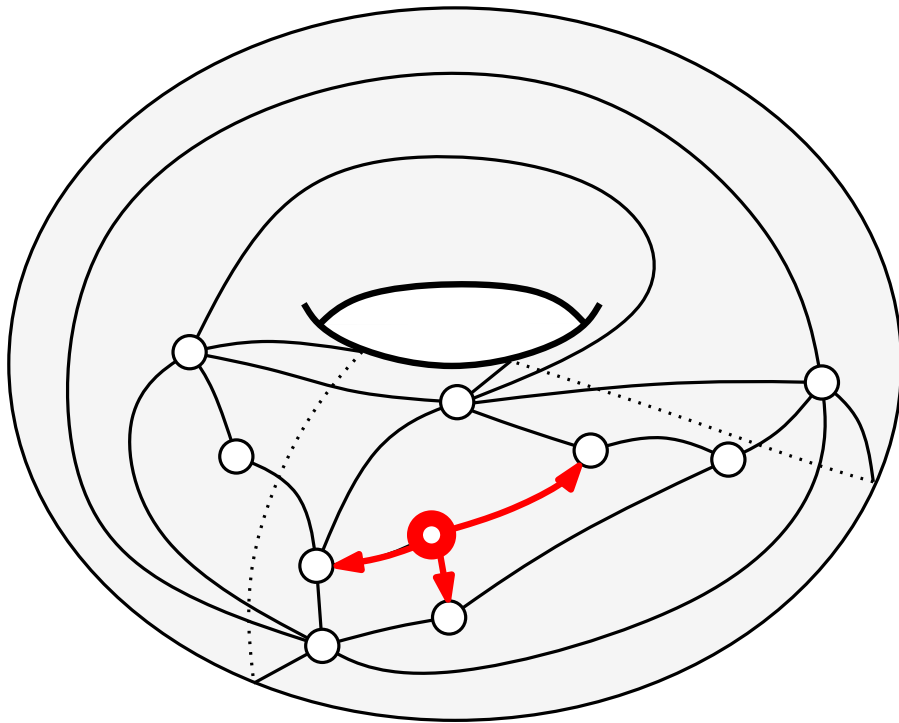
sommet pointé



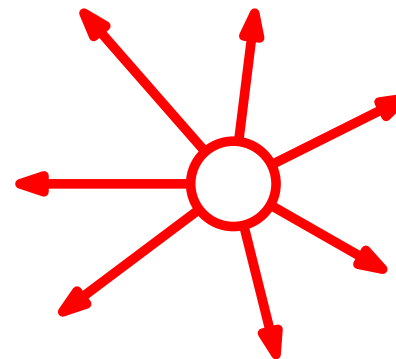
autre sommet

## La bijection de Marcus et Schaeffer (à la Miermont) :

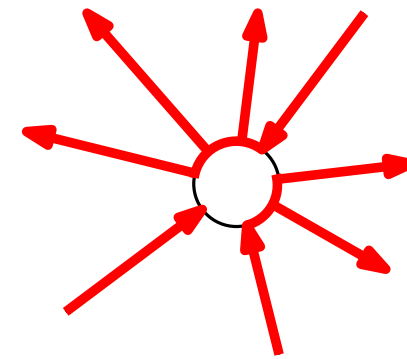
On part d'une **quadrangulation bipartie** de genre  $g$  à  $n$  faces avec un sommet pointé.



À partir de ce sommet, on définit un processus d'**exploration géodésique** avec des **règles de priorité à droite**.



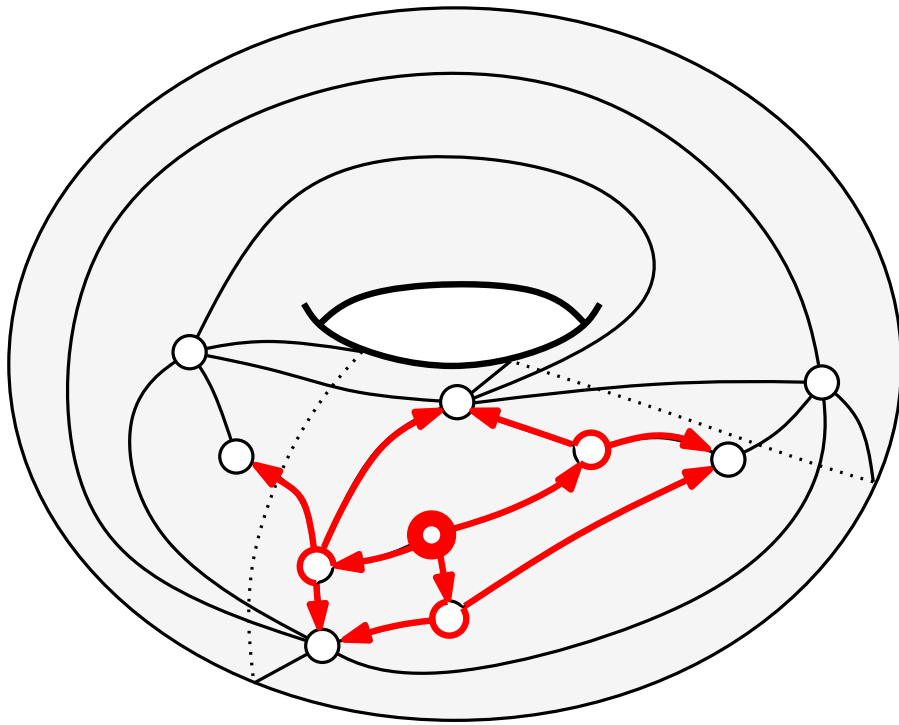
sommet pointé



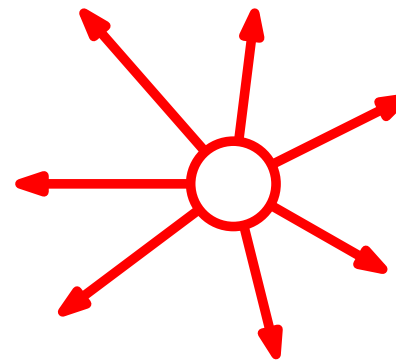
autre sommet

## La bijection de Marcus et Schaeffer (à la Miermont) :

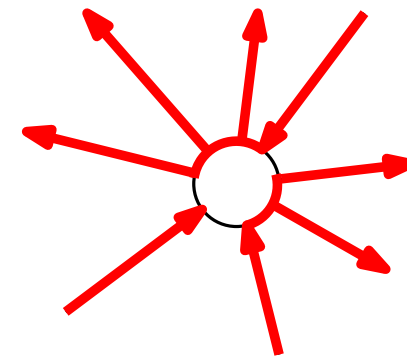
On part d'une **quadrangulation bipartie** de genre  $g$   
à  $n$  faces avec un sommet pointé.



À partir de ce sommet, on définit un processus d'**exploration géodésique** avec des **règles de priorité à droite**.



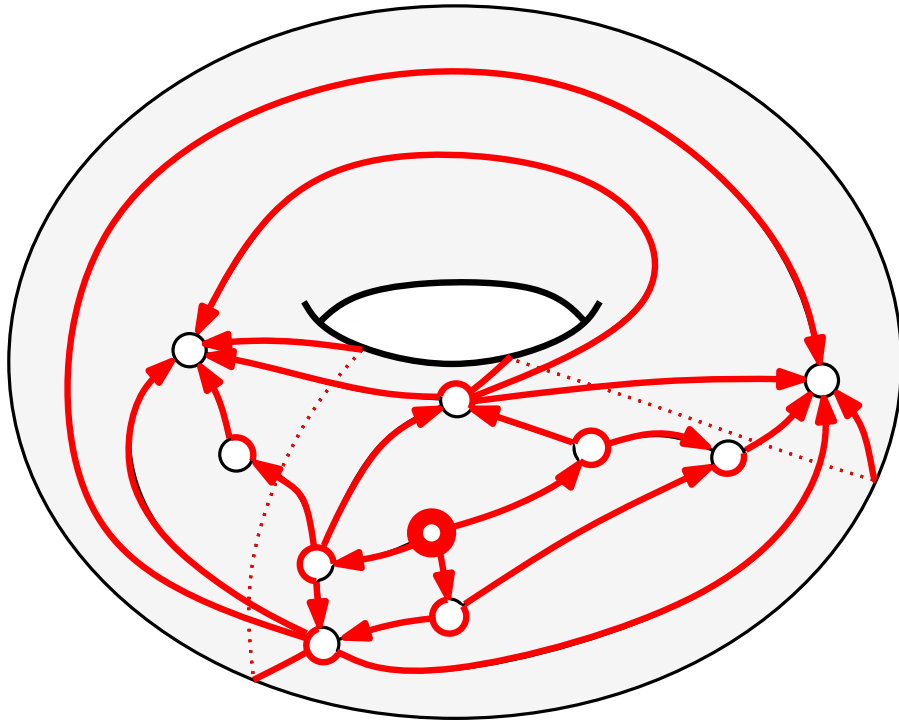
sommet pointé



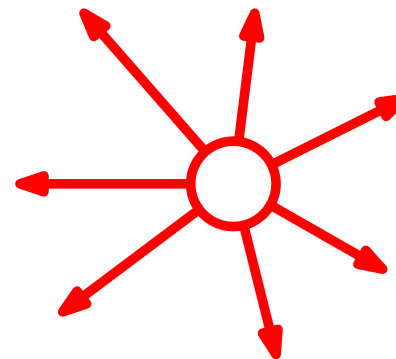
autre sommet

## La bijection de Marcus et Schaeffer (à la Miermont) :

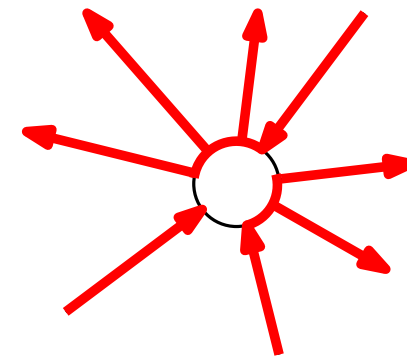
On part d'une **quadrangulation bipartie** de genre  $g$  à  $n$  faces avec un sommet pointé.



À partir de ce sommet, on définit un processus d'**exploration géodésique** avec des **règles de priorité à droite**.



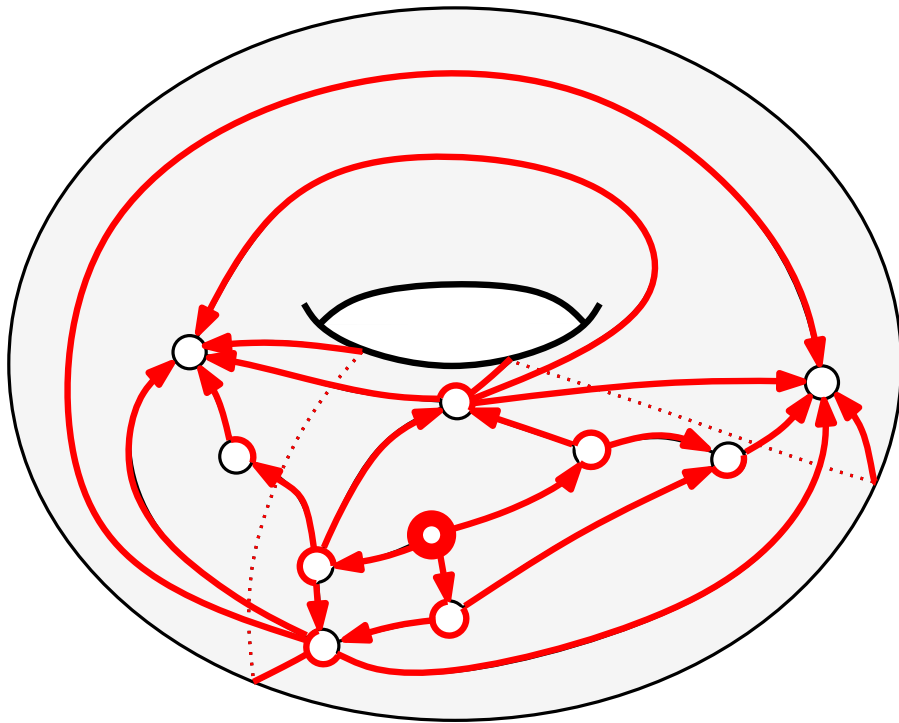
sommet pointé



autre sommet

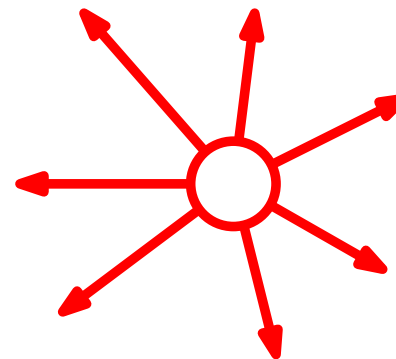
## La bijection de Marcus et Schaeffer (à la Miermont) :

On part d'une **quadrangulation bipartie** de genre  $g$  à  $n$  faces avec un sommet pointé.

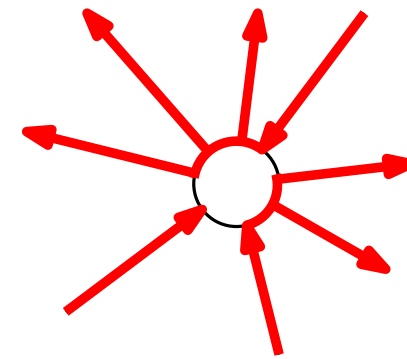


La carte **rouge** est un arbre

À partir de ce sommet, on définit un processus d'**exploration géodésique** avec des **règles de priorité à droite**.



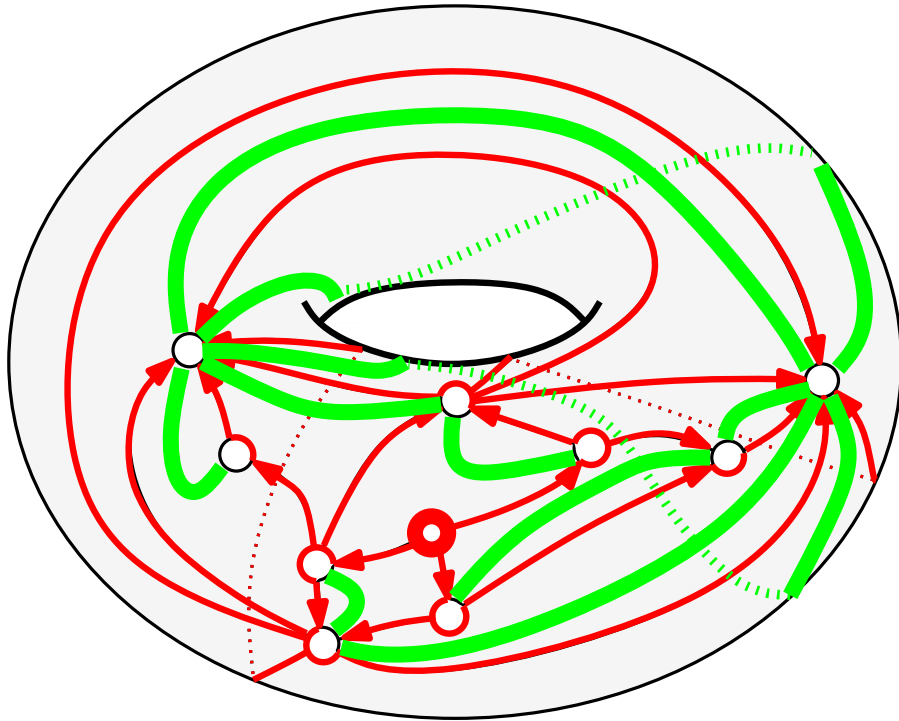
sommet pointé



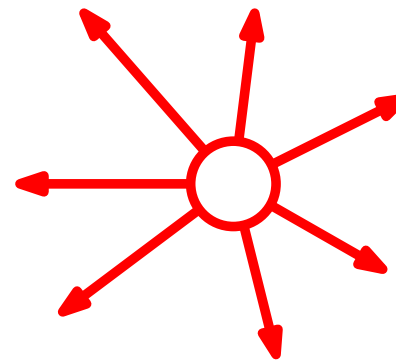
autre sommet

## La bijection de Marcus et Schaeffer (à la Miermont) :

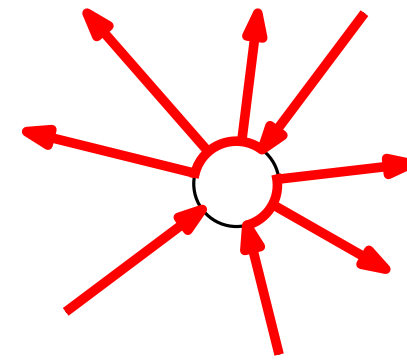
On part d'une **quadrangulation bipartie** de genre  $g$   
à  $n$  faces avec un sommet pointé.



À partir de ce sommet, on définit un processus d'**exploration géodésique** avec des **règles de priorité à droite**.



sommet pointé



autre sommet

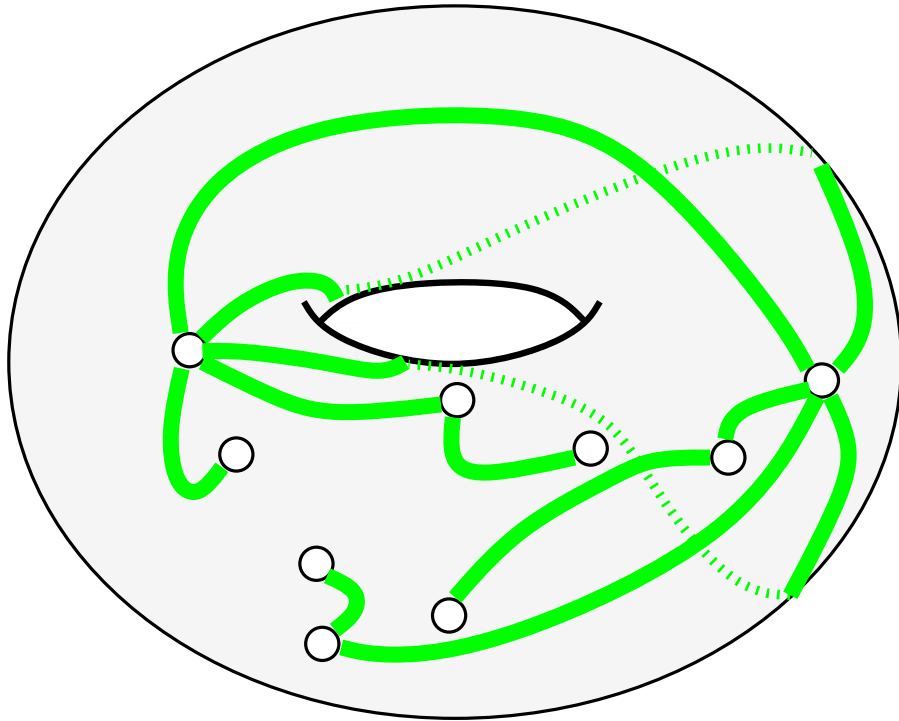
La carte **rouge** est un arbre

Son **dual** est une carte à une seule face de genre  $g$

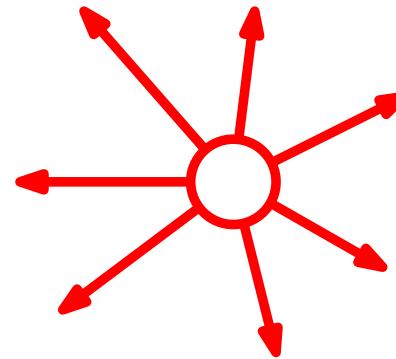


## La bijection de Marcus et Schaeffer :

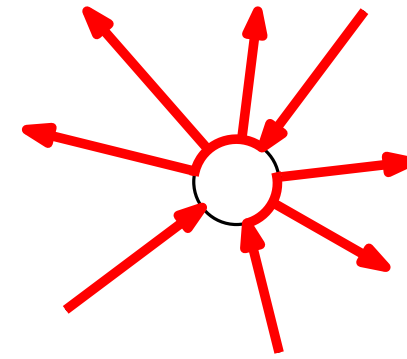
On part d'une **quadrangulation bipartie** de genre  $g$  à  $n$  faces avec un sommet pointé.



À partir de ce sommet, on définit un processus d'**exploration géodésique** avec des **règles de priorité à droite**.



sommet pointé



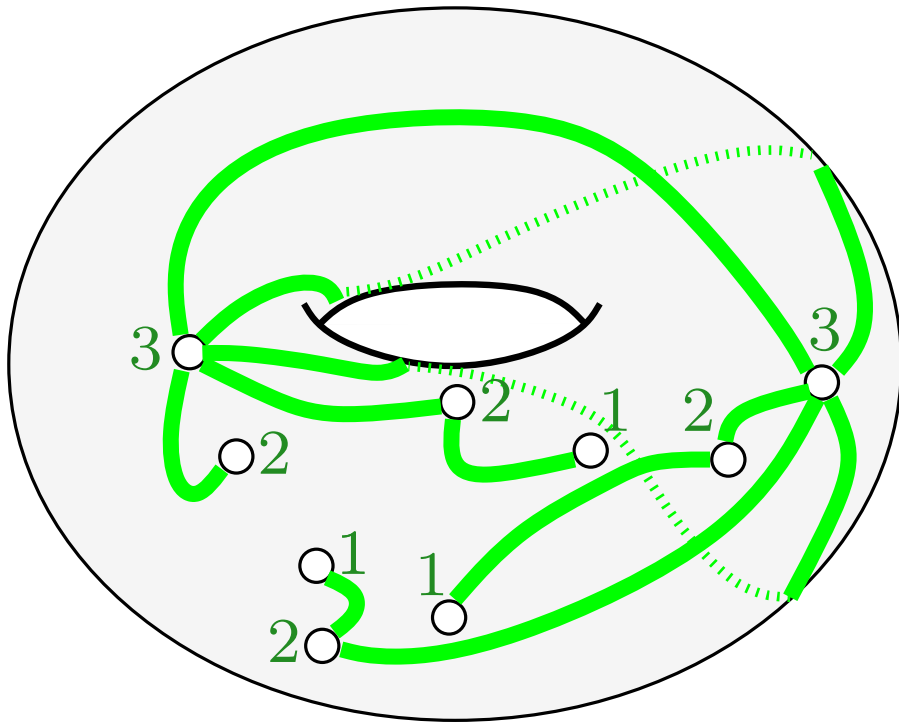
autre sommet

La carte **rouge** est un arbre

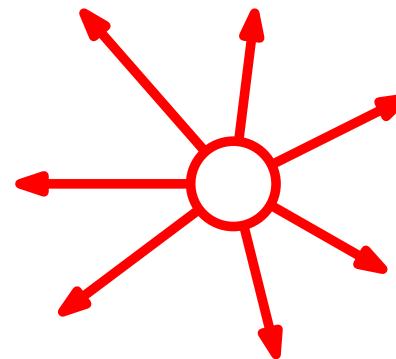
Son **dual** est une carte à une seule face de genre  $g$

## La bijection de Marcus et Schaeffer :

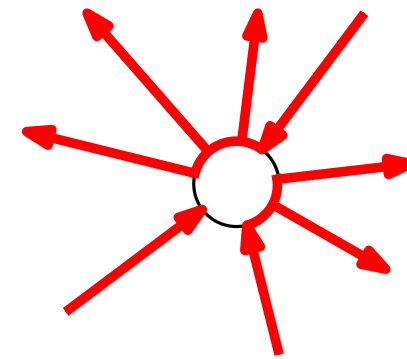
On part d'une **quadrangulation bipartie** de genre  $g$  à  $n$  faces avec un sommet pointé.



À partir de ce sommet, on définit un processus d'**exploration géodésique** avec des **règles de priorité à droite**.



sommet pointé



autre sommet

La carte **rouge** est un arbre

Son **dual** est une carte à une seule face de genre  $g$

Si l'on étiquette les sommets par leur **distance** au sommet pointé, la construction est réversible.

## Théorème [MS]

Les quadrangulations enracinées et pointées sont en bijection avec les cartes à une face étiquetées, ie munies d'une application :

$$l : \{\text{sommets}\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

telle que :

- $l(\text{racine})=0$

- si  $v_1 \sim v_2 : l(v_1) - l(v_2) \in \{-1, 0, +1\}$ .

## Théorème [MS]

Les quadrangulations enracinées et pointées sont en bijection avec les cartes à une face étiquetées, ie munies d'une application :

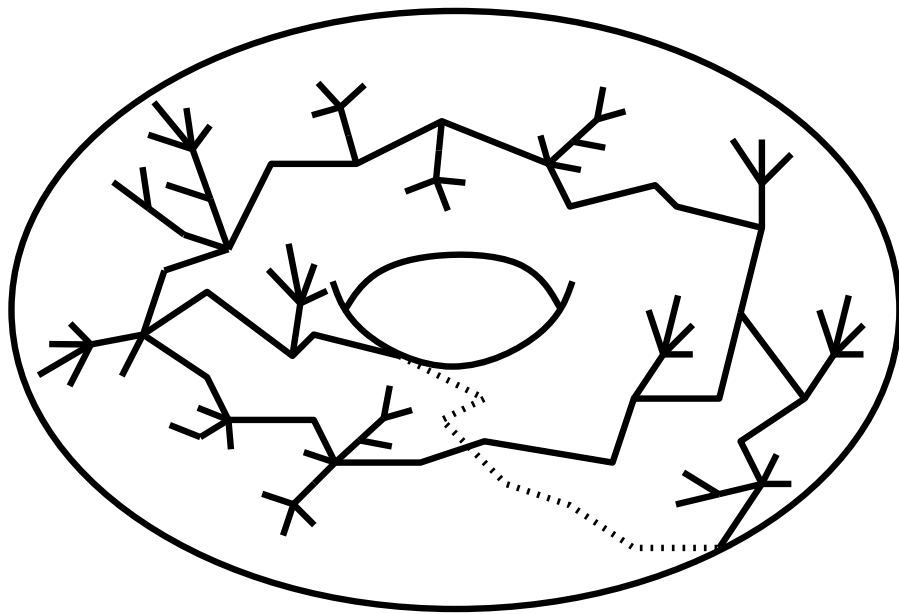
$$l : \{\text{sommets}\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

telle que :

- $l(\text{racine})=0$

- si  $v_1 \sim v_2 : l(v_1) - l(v_2) \in \{-1, 0, +1\}$ .

## Énumération



Une telle carte est formée de branches d'arbres étiquetés recollées de manière compatible.

Cas typique :  $K = 6g - 3$  branches.

## Théorème [MS]

Les quadrangulations enracinées et pointées sont en bijection avec les cartes à une face étiquetées, ie munies d'une application :

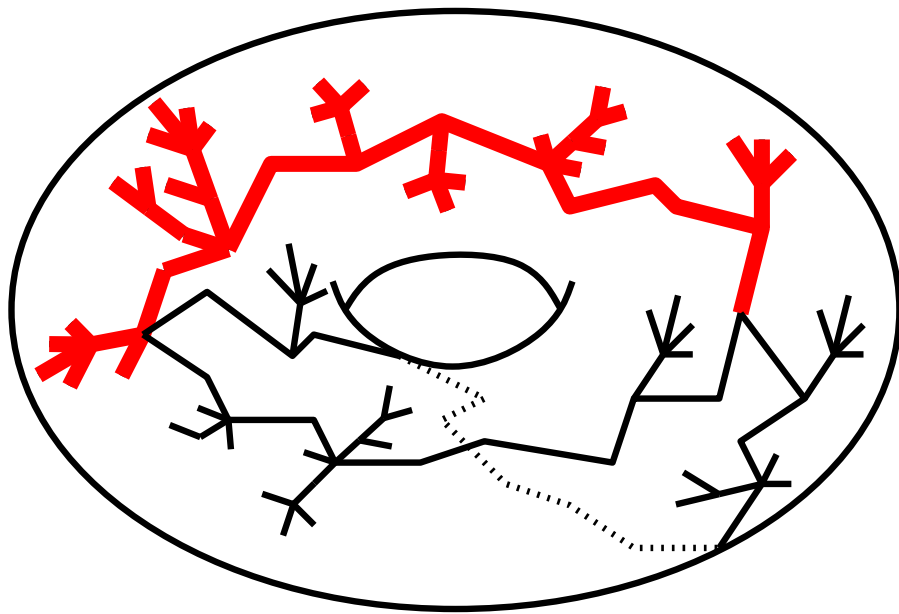
$$l : \{\text{sommets}\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

telle que :

- $l(\text{racine})=0$

- si  $v_1 \sim v_2$  :  $l(v_1) - l(v_2) \in \{-1, 0, +1\}$ .

## Énumération



Une telle carte est formée de branches d'arbres étiquetés recollées de manière compatible.

Cas typique :  $K = 6g - 3$  branches.

## Théorème [MS]

Les quadrangulations enracinées et pointées sont en bijection avec les cartes à une face étiquetées, ie munies d'une application :

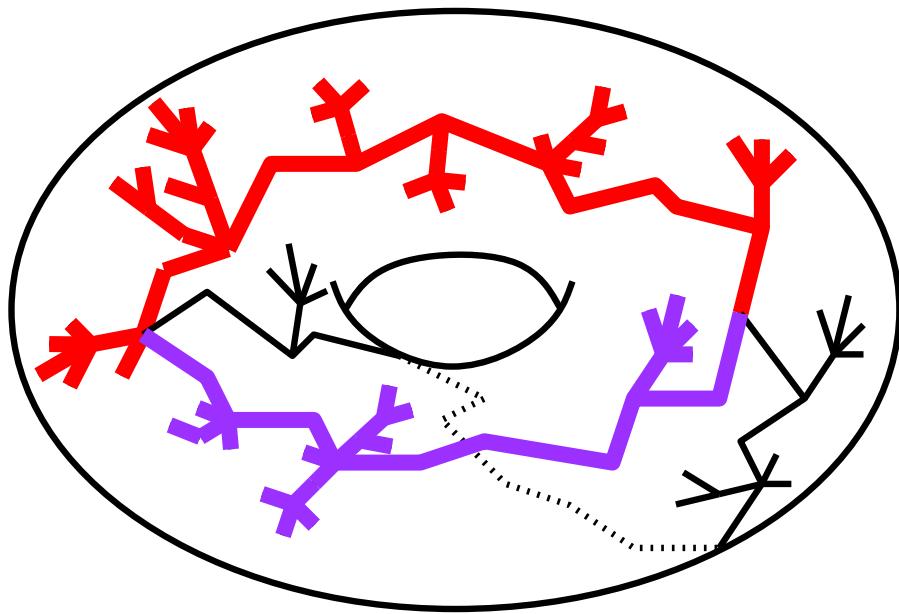
$$l : \{\text{sommets}\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

telle que :

- $l(\text{racine})=0$

- si  $v_1 \sim v_2 : l(v_1) - l(v_2) \in \{-1, 0, +1\}$ .

## Énumération



Une telle carte est formée de branches d'arbres étiquetés recollées de manière compatible.

Cas typique :  $K = 6g - 3$  branches.

## Théorème [MS]

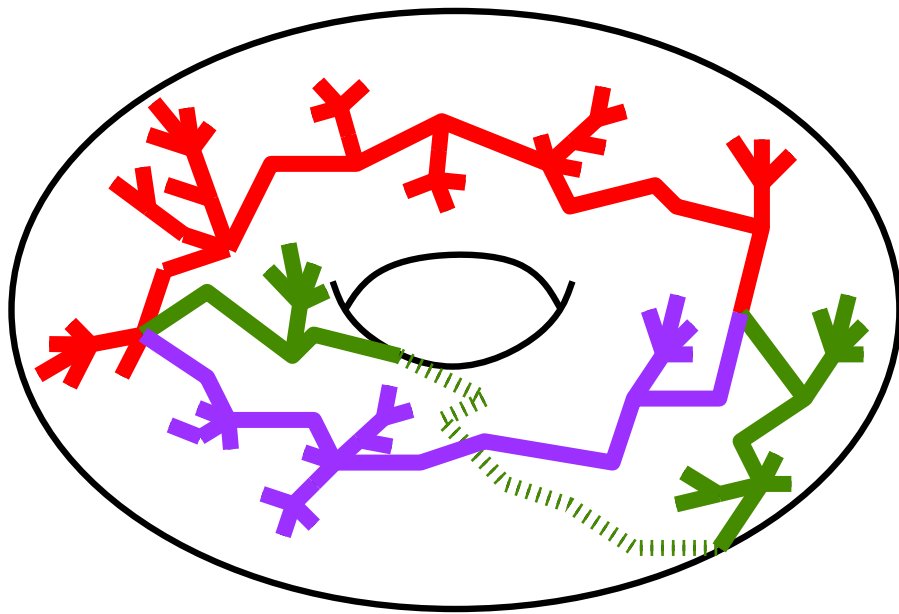
Les quadrangulations enracinées et pointées sont en bijection avec les cartes à une face étiquetées, ie munies d'une application :

$$l : \{\text{sommets}\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

telle que : .  $l(\text{racine})=0$

. si  $v_1 \sim v_2 : l(v_1) - l(v_2) \in \{-1, 0, +1\}$ .

## Énumération



Une telle carte est formée de branches d'arbres étiquetés recollées de manière compatible.

Cas typique :  $K = 6g - 3$  branches.

## Théorème [MS]

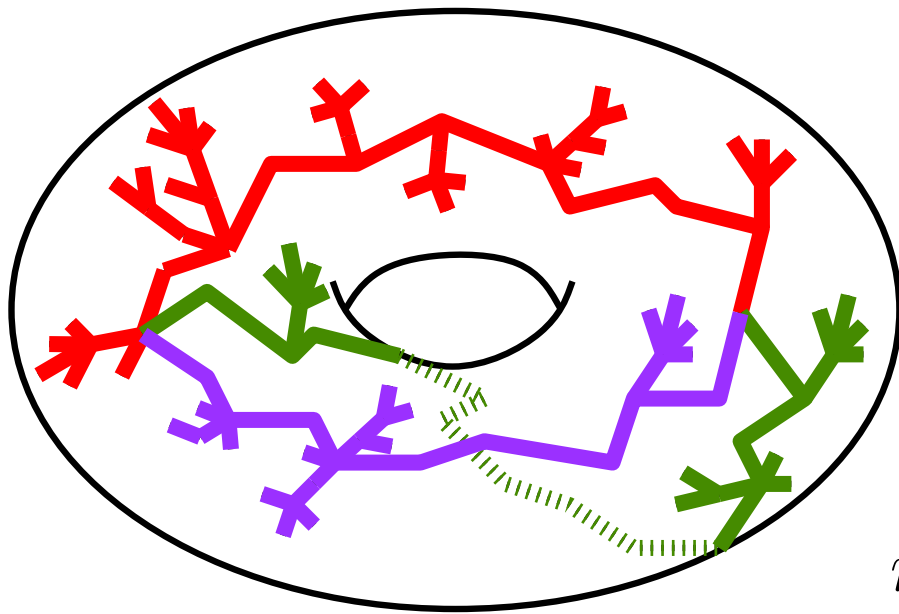
Les quadrangulations enracinées et pointées sont en bijection avec les cartes à une face étiquetées, ie munies d'une application :

$$l : \{\text{sommets}\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

telle que : .  $l(\text{racine})=0$

. si  $v_1 \sim v_2 : l(v_1) - l(v_2) \in \{-1, 0, +1\}$ .

## Énumération



Une telle carte est formée de branches d'arbres étiquetés recollées de manière compatible.

Cas typique :  $K = 6g - 3$  branches.

Exposant de comptage :

$$\underbrace{n^{K-1}}$$

choix des tailles  
des  $K$  arbres



## Théorème [MS]

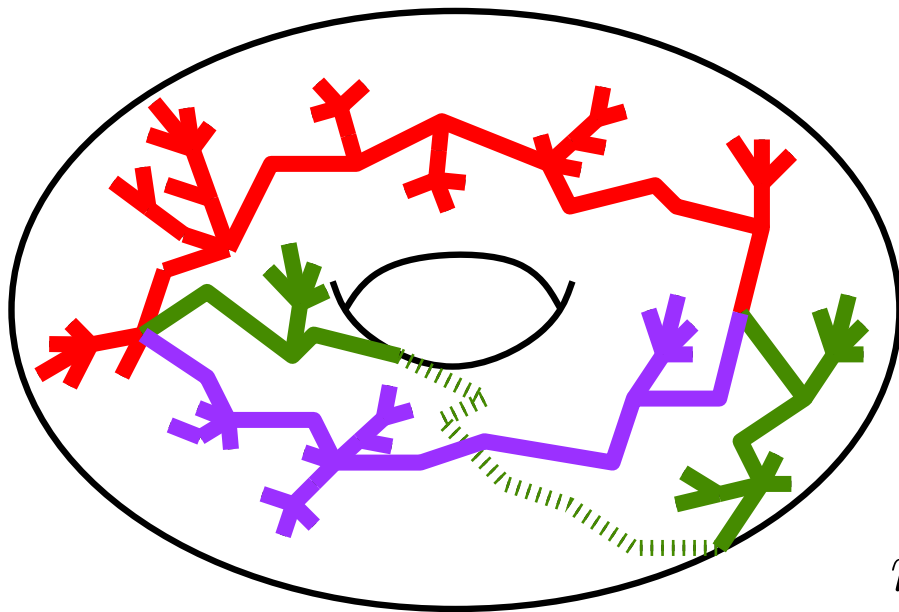
Les quadrangulations enracinées et pointées sont en bijection avec les cartes à une face étiquetées, ie munies d'une application :

$$l : \{\text{sommets}\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

telle que : .  $l(\text{racine})=0$

. si  $v_1 \sim v_2 : l(v_1) - l(v_2) \in \{-1, 0, +1\}$ .

## Énumération



Une telle carte est formée de branches d'arbres étiquetés recollées de manière compatible.

Cas typique :  $K = 6g - 3$  branches.

Exposant de comptage :

$$\underbrace{n^{K-1}}_{\text{choix des tailles des } K \text{ arbres}} \times \underbrace{n^{-\frac{K}{2}}}_{\text{choix des } K \text{ arbres}}$$

## Théorème [MS]

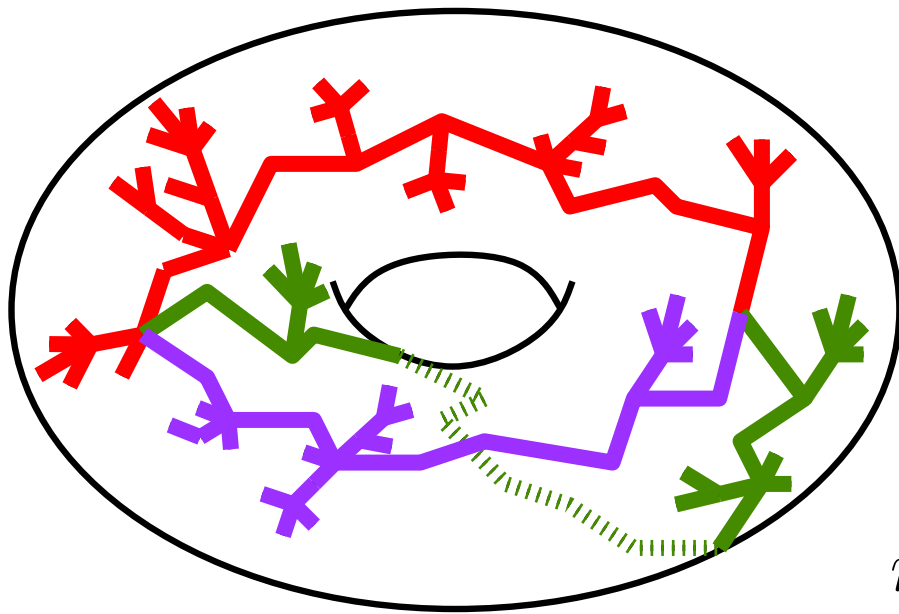
Les quadrangulations enracinées et pointées sont en bijection avec les cartes à une face étiquetées, ie munies d'une application :

$$l : \{\text{sommets}\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

telle que : .  $l(\text{racine})=0$

. si  $v_1 \sim v_2$  :  $l(v_1) - l(v_2) \in \{-1, 0, +1\}$ .

## Énumération



Une telle carte est formée de branches d'arbres étiquetés recollées de manière compatible.

Cas typique :  $K = 6g - 3$  branches.

Exposant de comptage :

$$\underbrace{n^{K-1}}_{\text{choix des tailles des } K \text{ arbres}} \times \underbrace{n^{-\frac{K}{2}}}_{\text{choix des } K \text{ arbres}} \times \underbrace{n^{-\frac{2g}{4}}}_{\text{probabilité que les } 2g \text{ « relations de cycles » soient satisfaites}} = n^{\frac{K}{2} - \frac{g}{2} - 1}$$

## Théorème [MS]

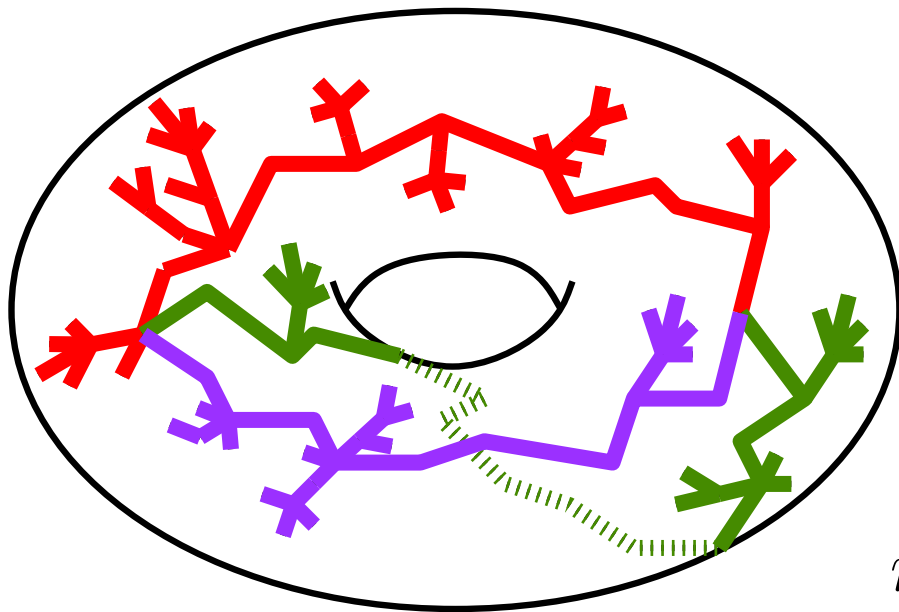
Les quadrangulations enracinées et pointées sont en bijection avec les cartes à une face étiquetées, ie munies d'une application :

$$l : \{\text{sommets}\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

telle que : .  $l(\text{racine})=0$

. si  $v_1 \sim v_2 : l(v_1) - l(v_2) \in \{-1, 0, +1\}$ .

## Énumération



Une telle carte est formée de branches d'arbres étiquetés recollées de manière compatible.

Cas typique :  $K = 6g - 3$  branches.

Exposant de comptage :

$$\underbrace{n^{K-1}}_{\text{choix des tailles des } K \text{ arbres}} \times \underbrace{n^{-\frac{K}{2}}}_{\text{choix des } K \text{ arbres}} \times \underbrace{n^{-\frac{2g}{4}}}_{\text{probabilité que les } 2g \text{ « relations de cycles » soient satisfaites}} = n^{\frac{K}{2} - \frac{g}{2} - 1}$$

↓ pente  $\frac{5g}{2}$

## **Théorème** [Bender-Canfield, C-Marcus-Schaeffer]

Le nombre de quadrangulations biparties enracinées de genre  $g$  est asymptotiquement équivalent à :

$$m_g(n) \sim t_g n^{\frac{5(g-1)}{2}} 12^n.$$

## Théorème [Bender-Canfield, C-Marcus-Schaeffer]

Le nombre de quadrangulations biparties enracinées de genre  $g$  est asymptotiquement équivalent à :

$$m_g(n) \sim t_g n^{\frac{5(g-1)}{2}} 12^n.$$

## Fait [C]

Les bijections par exploration géodésique plus générales (type **BDFG**) se généralisent en genre supérieur. Elle donnent des cartes à une face étiquetées selon des règles de variation locale plus complexes.

## Théorème [C]

Soit  $D \subset \mathbb{N}$ , fini. Le nombre de  $2D$ -angulations biparties enracinées satisfait :

$$m_{g,D}^{bip}(n) \sim t_g(\beta_D n)^{\frac{5(g-1)}{2}} \Lambda_D^n$$

## Théorème [Bender-Canfield, C-Marcus-Schaeffer]

Le nombre de quadrangulations biparties enracinées de genre  $g$  est asymptotiquement équivalent à :

$$m_g(n) \sim t_g n^{\frac{5(g-1)}{2}} 12^n.$$

## Fait [C]

Les bijections par exploration géodésique plus générales (type **BDFG**) se généralisent en genre supérieur. Elle donnent des cartes à une face étiquetées selon des règles de variation locale plus complexes.

## Théorème [C]

Soit  $D \subset \mathbb{N}$ , fini. Le nombre de  $2D$ -angulations biparties enracinées satisfait :

$$m_{g,D}^{bip}(n) \sim t_g(\beta_D n)^{\frac{5(g-1)}{2}} \Lambda_D^n$$

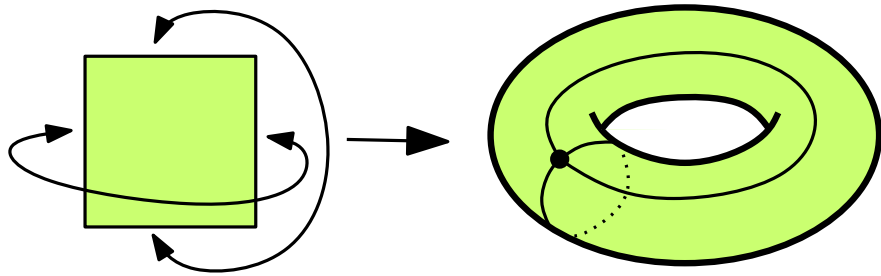
En non biparti :  $m_{g,D}(n) \sim 2^{2g} t_g(\beta_D n)^{\frac{5(g-1)}{2}} \Lambda_D^n$  (conjecture : Gao 93)

et aussi  $m$ -constellations,  $m$ -hypercartes...

# Cartes à une face

## À quoi ça ressemble

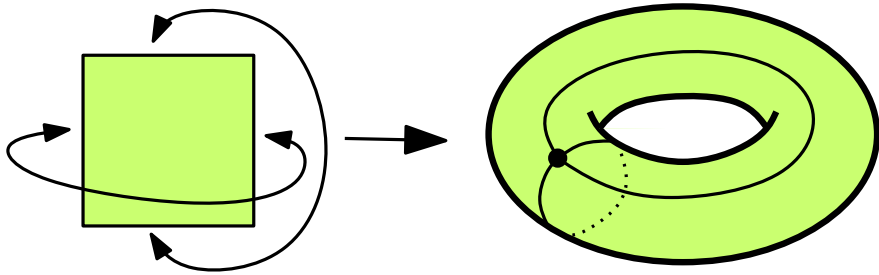
On recolle deux à deux les arêtes d'un  $2n$ -gone pour former une surface sans bord.





## À quoi ça ressemble

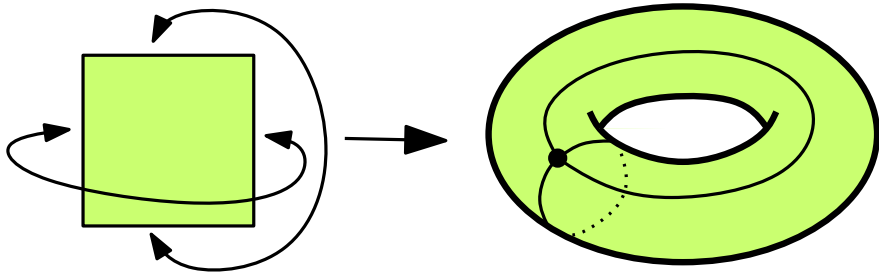
On recolle deux à deux les arêtes d'un  $2n$ -gone pour former une surface sans bord.



Euler :  $s = n + 1 - 2g$

## À quoi ça ressemble

On recolle deux à deux les arêtes d'un  $2n$ -gone pour former une surface sans bord.



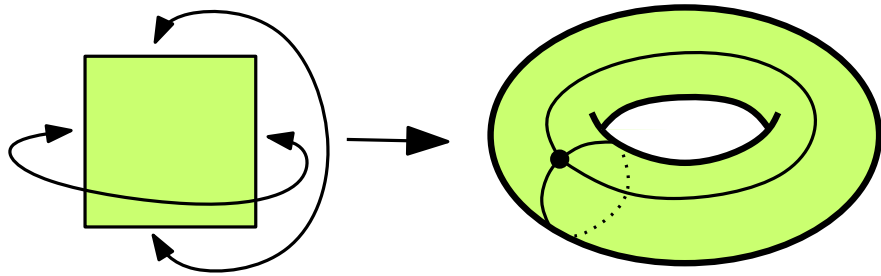
$$\text{Euler : } s = n + 1 - 2g$$

Le nombre de cartes à une face à  $n$  arêtes est égal à :  $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ .

On veut énumérer les cartes à une face **de genre fixé**.

## À quoi ça ressemble

On recolle deux à deux les arêtes d'un  $2n$ -gone pour former une surface sans bord.

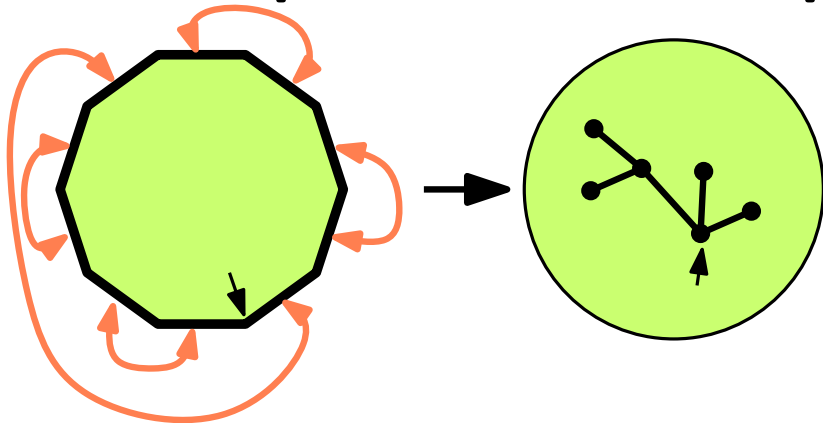


$$\text{Euler : } s = n + 1 - 2g$$

Le nombre de cartes à une face à  $n$  arêtes est égal à :  $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ .

On veut énumérer les cartes à une face **de genre fixé**.

**Par exemple, dans le cas planaire :**



cartes à une face = **arbres plans**

$$\rightarrow \epsilon_0(n) = \text{Cat}(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

## Et en genre supérieur ?

Pour chaque  $g$ , le nombre de cartes à une face à  $n$  arêtes de genre  $g$  a la forme remarquable :  $\epsilon_g(n) = (\text{un polynôme}) \times \text{Cat}(n)$

Par exemple : 
$$\epsilon_1(n) = \frac{(n+1)n(n-1)}{12} \text{Cat}(n)$$

$$\epsilon_2(n) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(5n-2)}{1440} \text{Cat}(n)$$

Références : [Lehman et Walsh 72](#) (équations de récurrence + séries formelles) [Harer et Zagier 86](#) (intégrales de matrices).

## Et en genre supérieur ?

Pour chaque  $g$ , le nombre de cartes à une face à  $n$  arêtes de genre  $g$  a la forme remarquable :  $\epsilon_g(n) = (\text{un polynôme}) \times \text{Cat}(n)$

Par exemple : 
$$\epsilon_1(n) = \frac{(n+1)n(n-1)}{12} \text{Cat}(n)$$

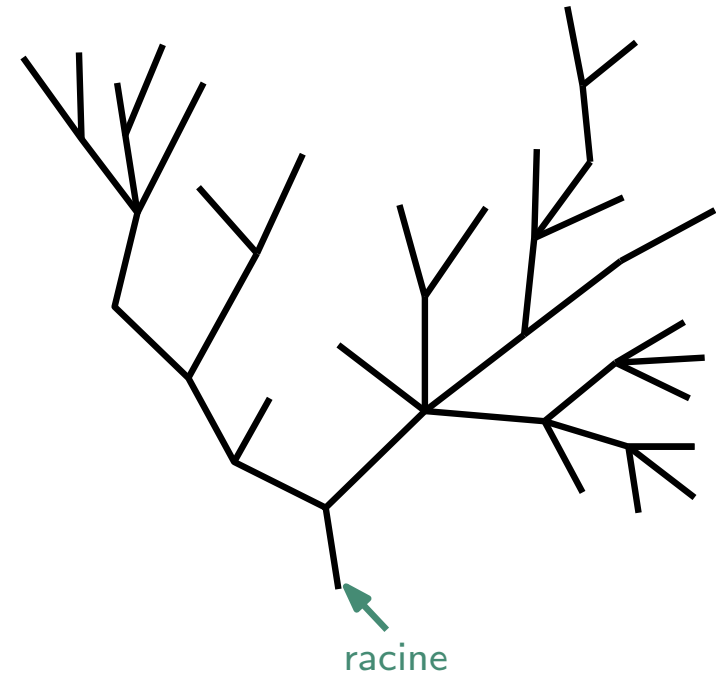
$$\epsilon_2(n) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(5n-2)}{1440} \text{Cat}(n)$$

Références : [Lehman et Walsh 72](#) (équations de récurrence + séries formelles) [Harer et Zagier 86](#) (intégrales de matrices).

Pas d'interprétation combinatoire !

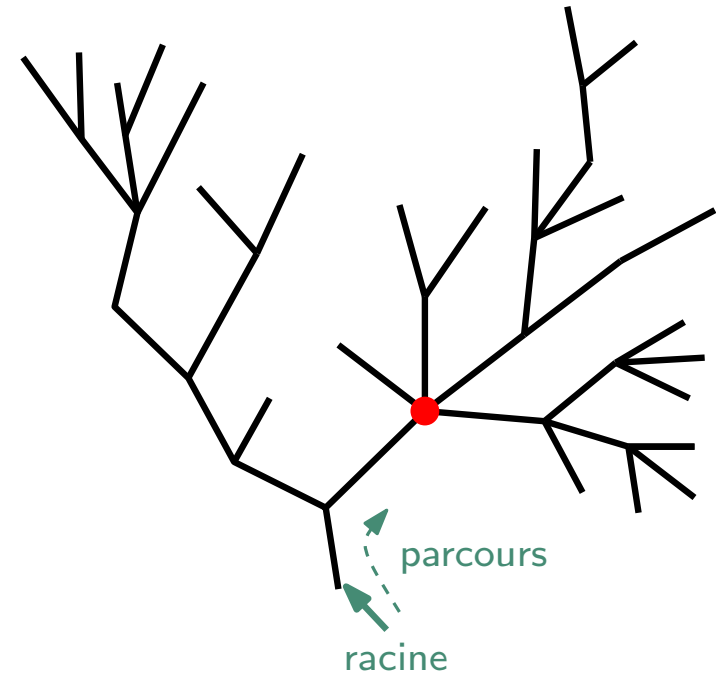
## La notion de trisection

Dans un arbre plan, l'ordre de parcours et l'ordre antihoraire coïncident autour de chaque sommet.



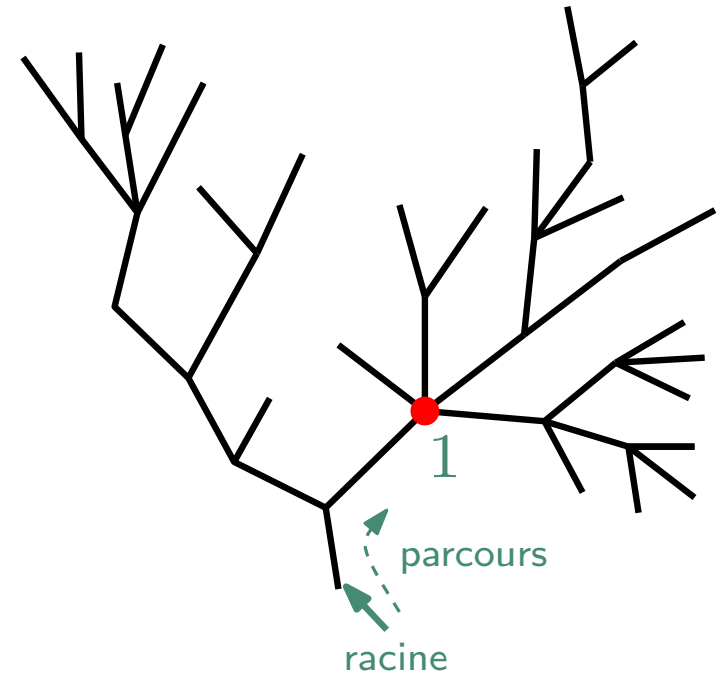
## La notion de trisection

Dans un arbre plan, l'ordre de parcours et l'ordre antihoraire coïncident autour de chaque sommet.



## La notion de trisection

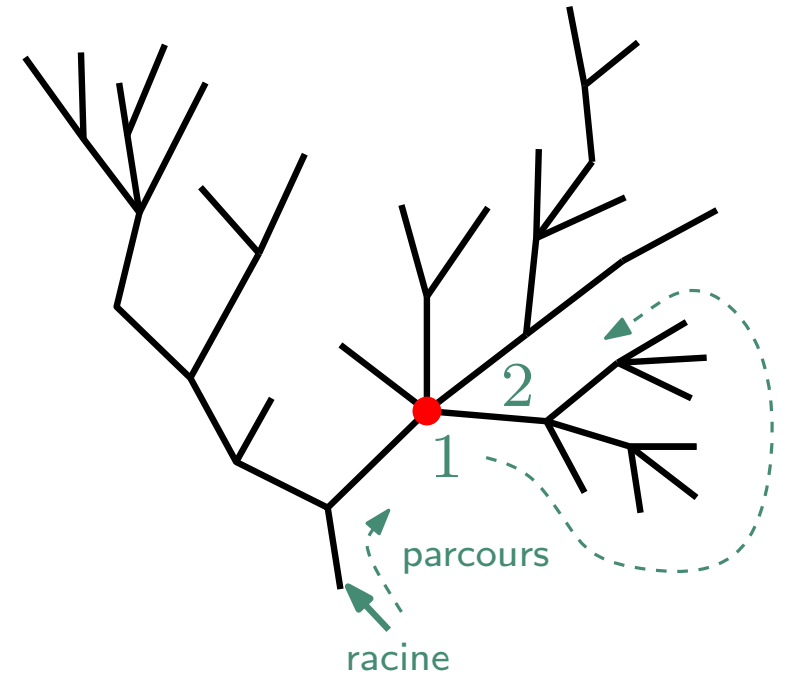
Dans un arbre plan, l'ordre de parcours et l'ordre antihoraire coïncident autour de chaque sommet.





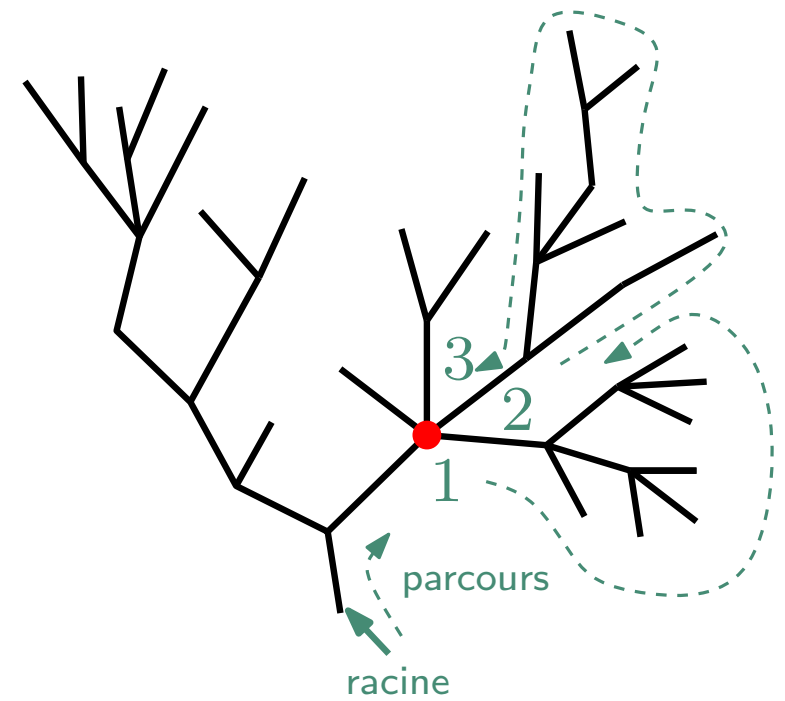
## La notion de trisection

Dans un arbre plan, l'ordre de parcours et l'ordre antihoraire coïncident autour de chaque sommet.



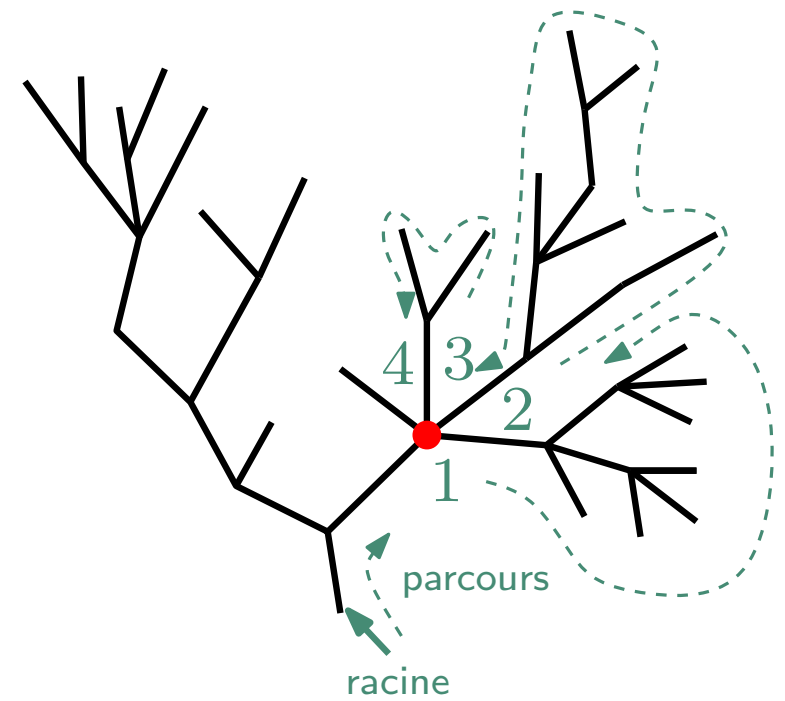
## La notion de trisection

Dans un arbre plan, l'ordre de parcours et l'ordre antihoraire coïncident autour de chaque sommet.



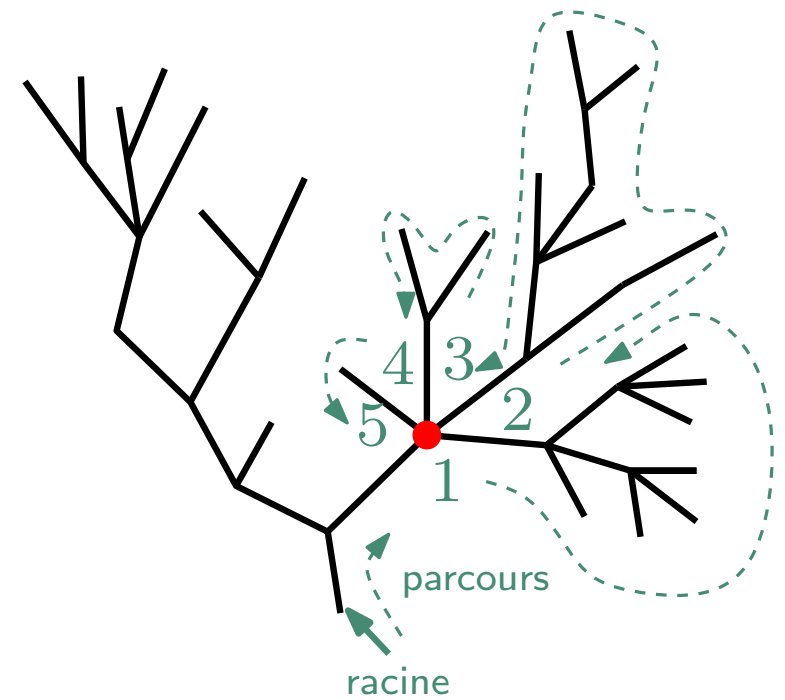
## La notion de trisection

Dans un arbre plan, l'ordre de parcours et l'ordre antihoraire coïncident autour de chaque sommet.



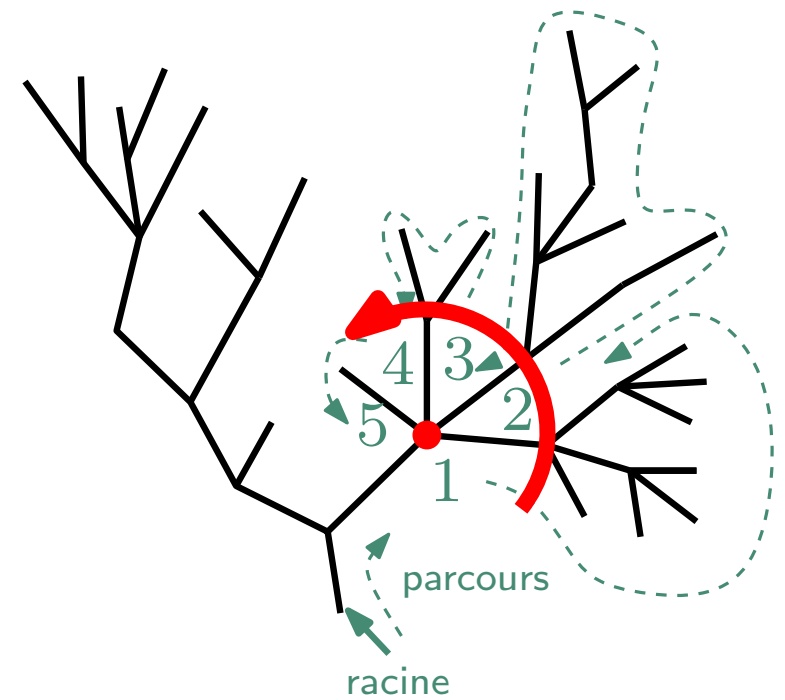
## La notion de trisection

Dans un arbre plan, l'ordre de parcours et l'ordre antihoraire coïncident autour de chaque sommet.



## La notion de trisection

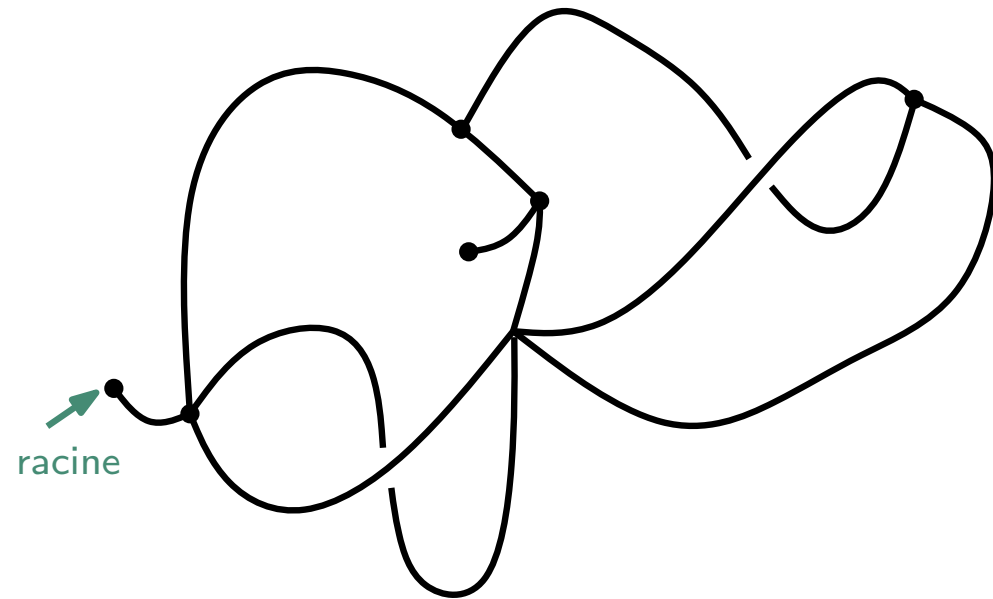
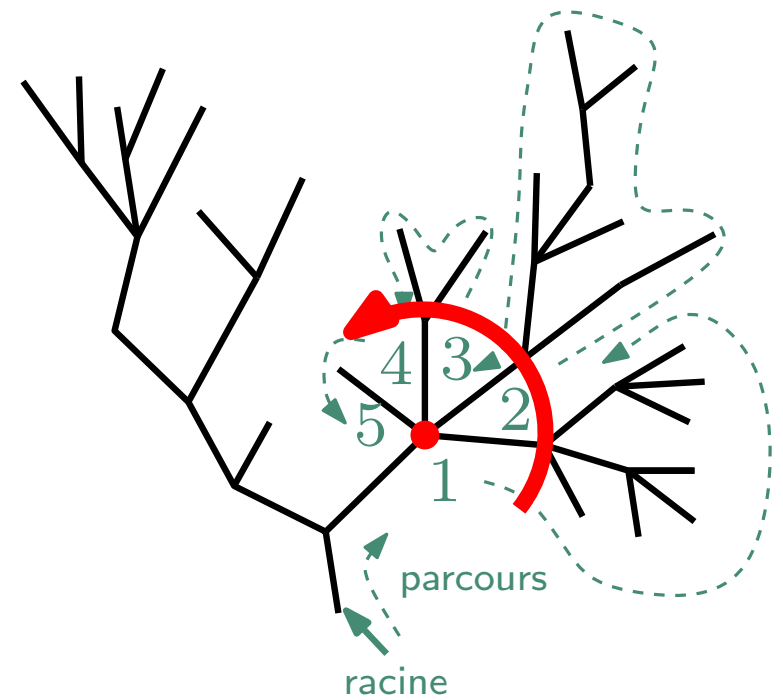
Dans un arbre plan, l'ordre de parcours et l'ordre antihoraire coïncident autour de chaque sommet.



## La notion de trisection

Dans un arbre plan, l'ordre de parcours et l'ordre antihoraire coïncident autour de chaque sommet.

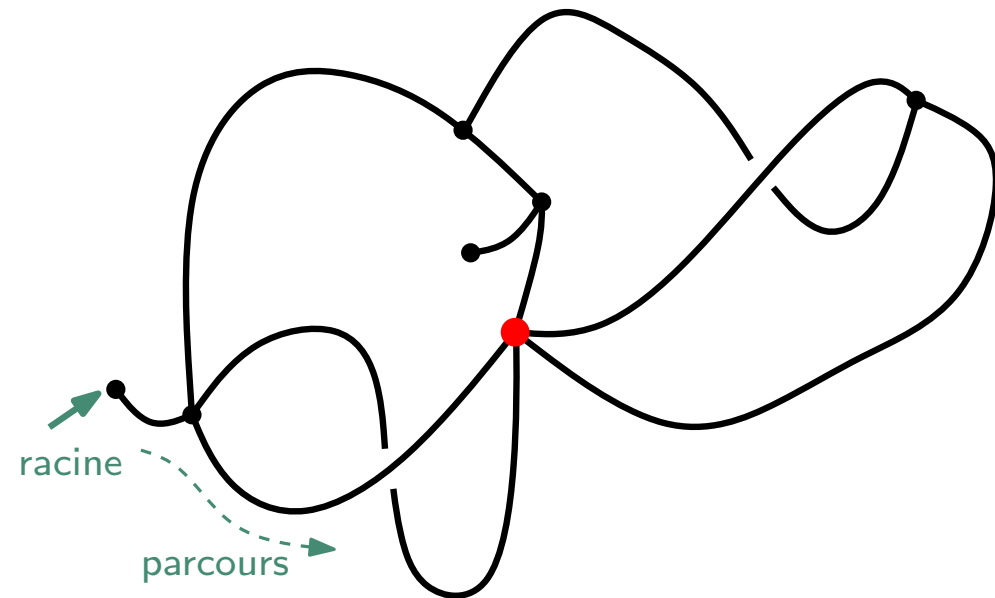
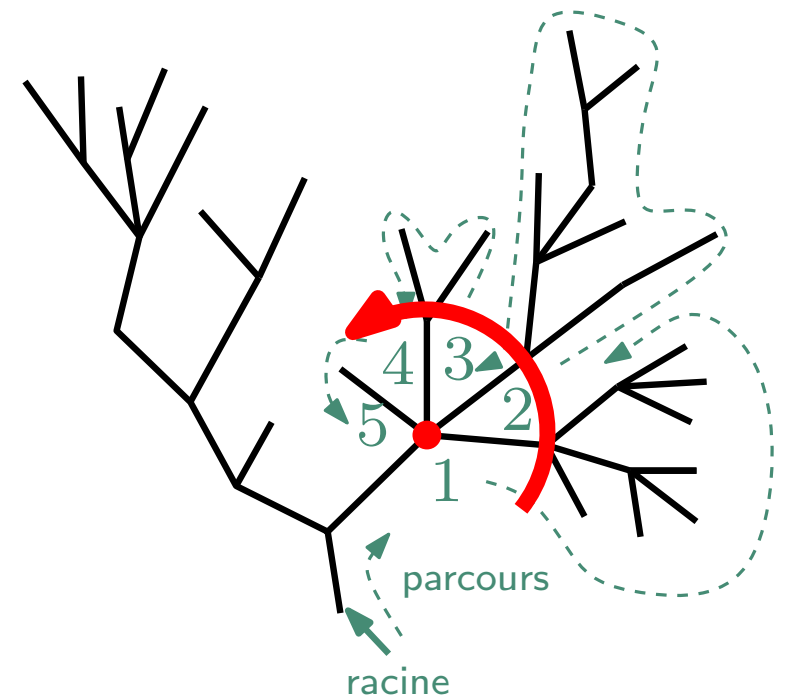
Ce n'est plus vrai dans une carte à une face de genre  $g > 0$ .



## La notion de trisection

Dans un arbre plan, l'ordre de parcours et l'ordre antihoraire coïncident autour de chaque sommet.

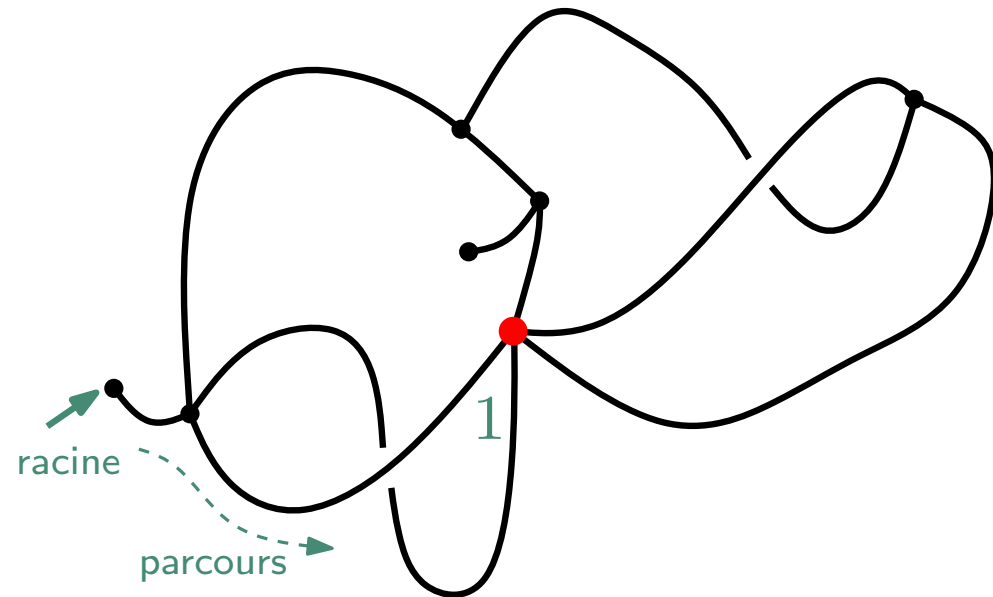
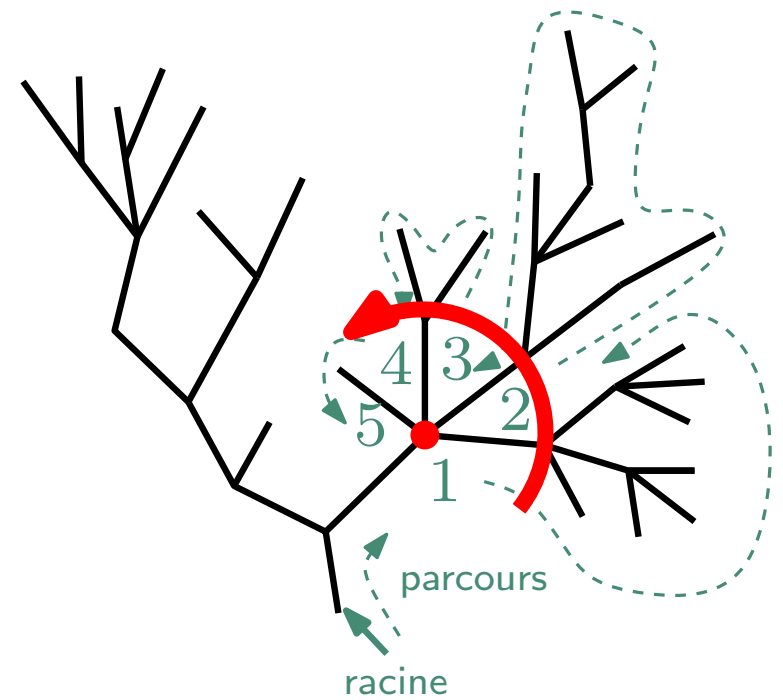
Ce n'est plus vrai dans une carte à une face de genre  $g > 0$ .



## La notion de trisection

Dans un arbre plan, l'ordre de parcours et l'ordre antihoraire coïncident autour de chaque sommet.

Ce n'est plus vrai dans une carte à une face de genre  $g > 0$ .

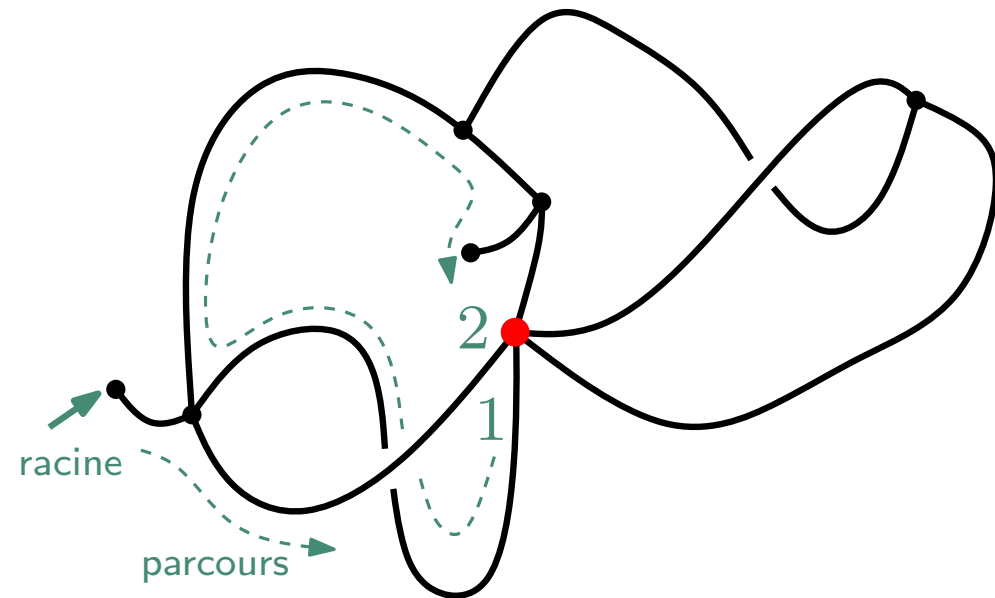
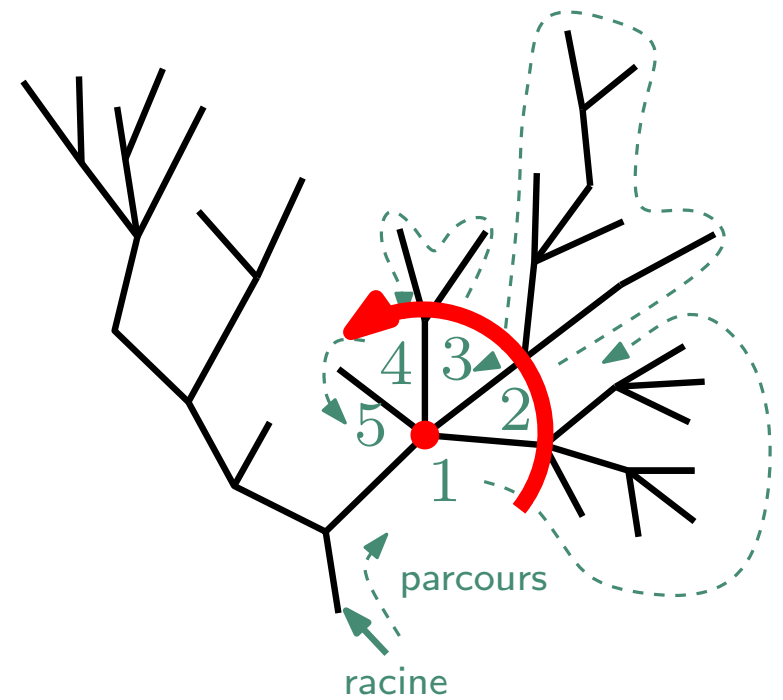




## La notion de trisection

Dans un arbre plan, l'ordre de parcours et l'ordre antihoraire coïncident autour de chaque sommet.

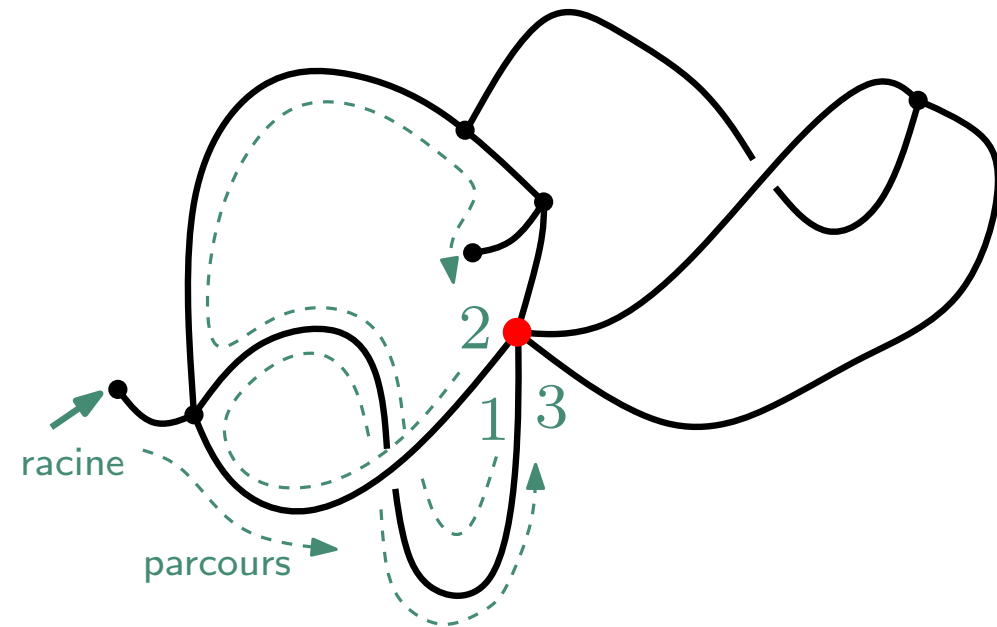
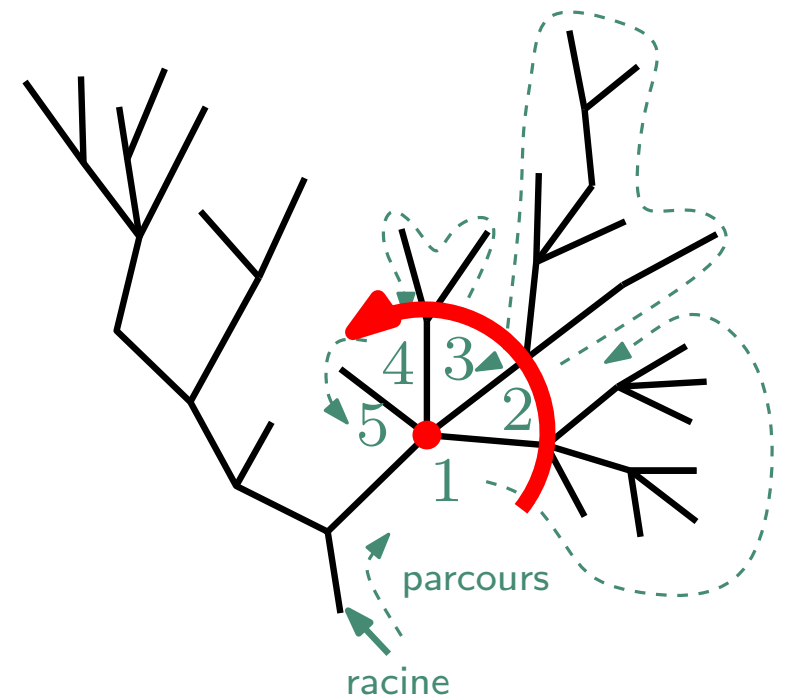
Ce n'est plus vrai dans une carte à une face de genre  $g > 0$ .



## La notion de trisection

Dans un arbre plan, l'ordre de parcours et l'ordre antihoraire coïncident autour de chaque sommet.

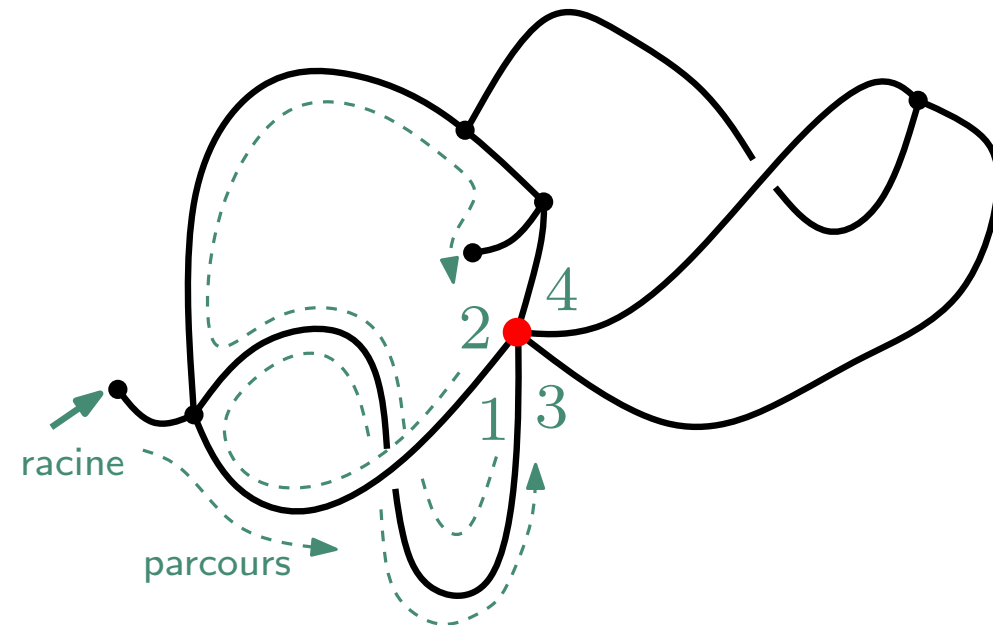
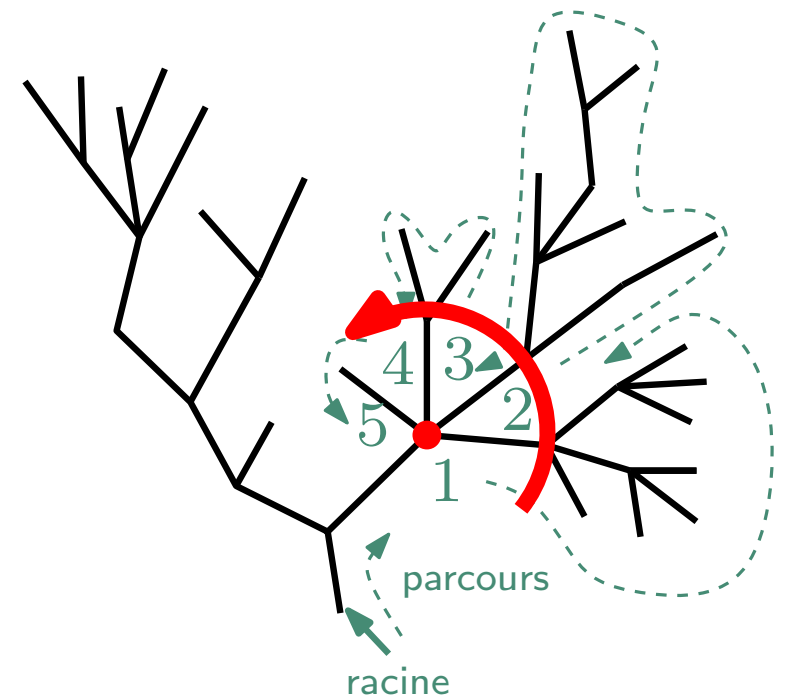
Ce n'est plus vrai dans une carte à une face de genre  $g > 0$ .



## La notion de trisection

Dans un arbre plan, l'ordre de parcours et l'ordre antihoraire coïncident autour de chaque sommet.

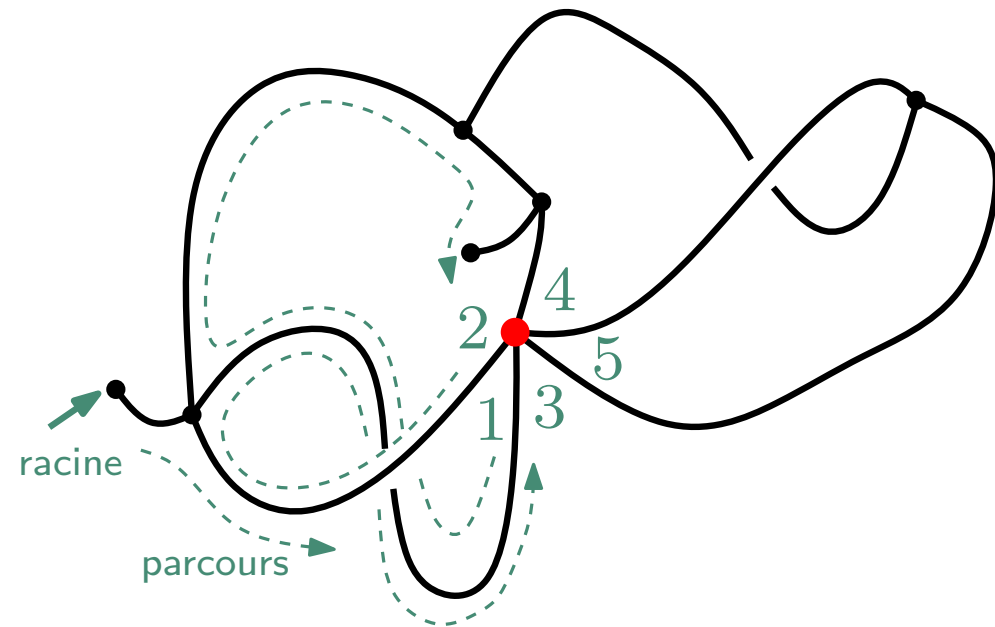
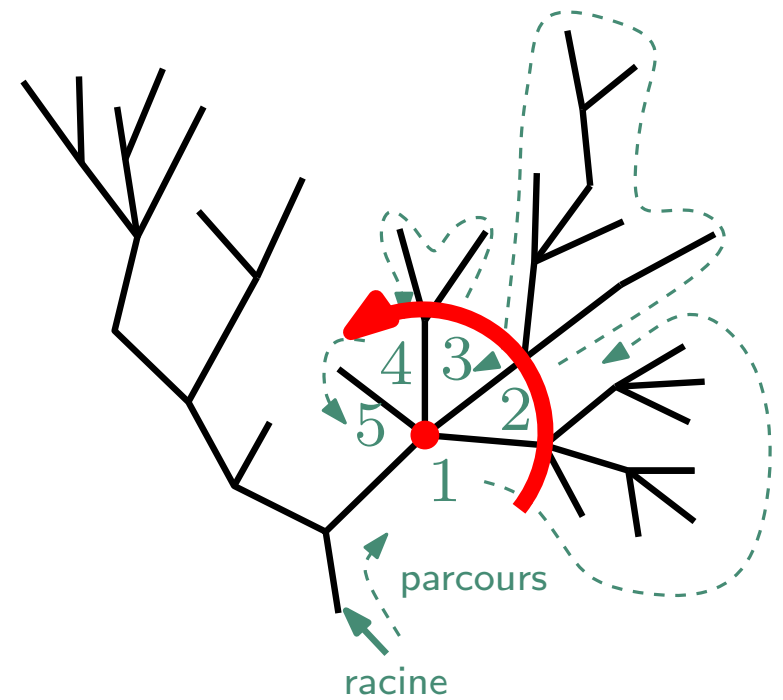
Ce n'est plus vrai dans une carte à une face de genre  $g > 0$ .



## La notion de trisection

Dans un arbre plan, l'ordre de parcours et l'ordre antihoraire coïncident autour de chaque sommet.

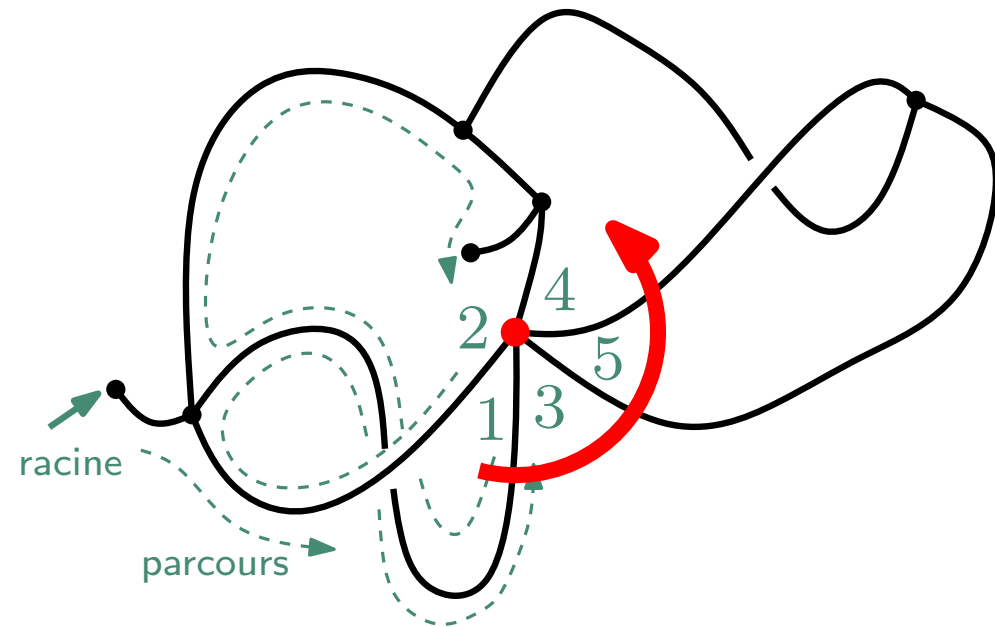
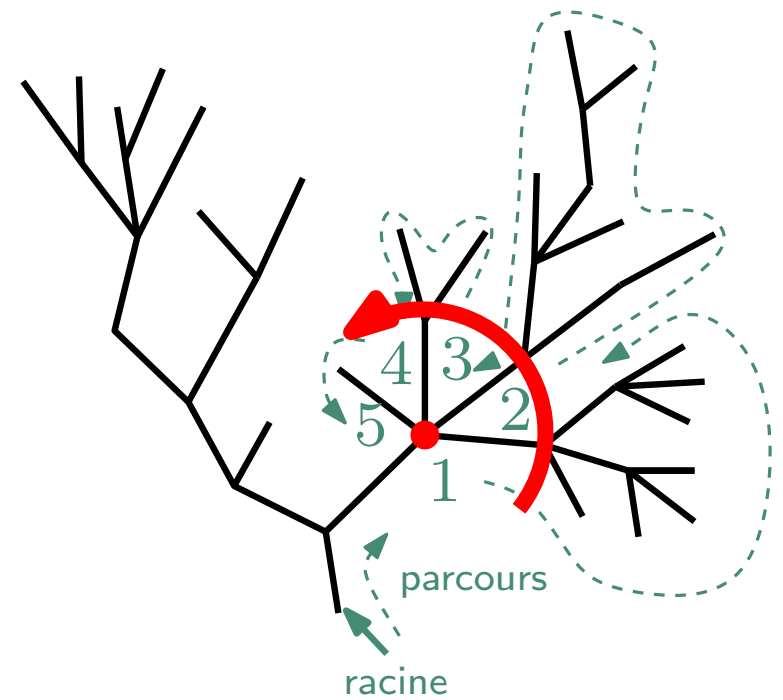
Ce n'est plus vrai dans une carte à une face de genre  $g > 0$ .



## La notion de trisection

Dans un arbre plan, l'ordre de parcours et l'ordre antihoraire coïncident autour de chaque sommet.

Ce n'est plus vrai dans une carte à une face de genre  $g > 0$ .

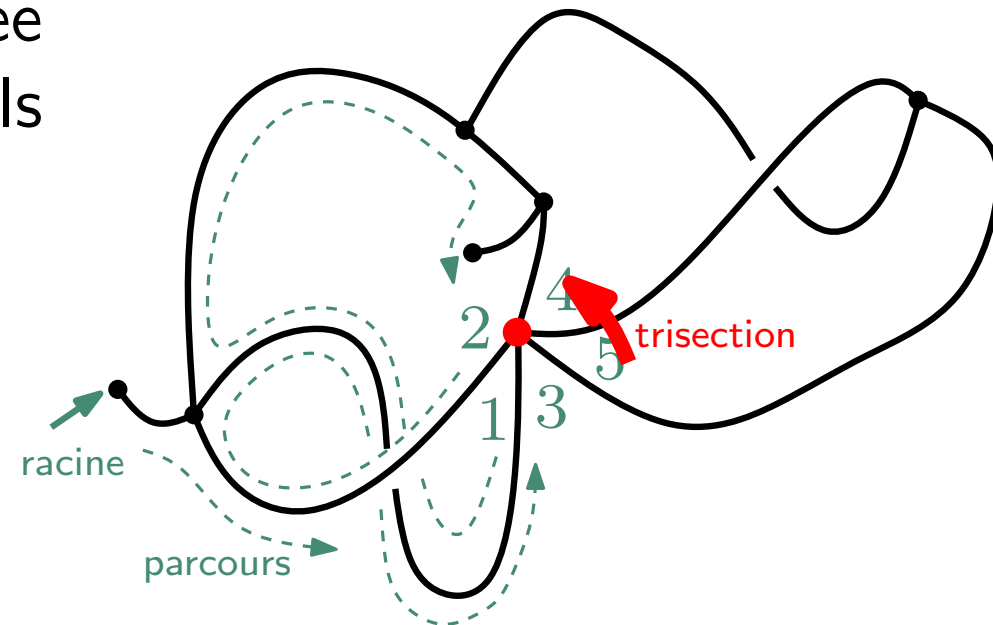
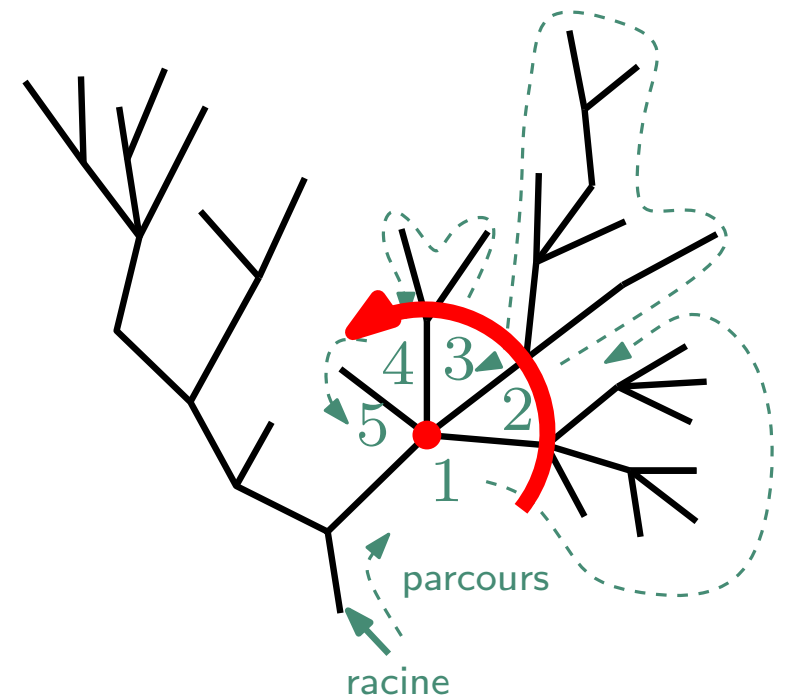


## La notion de trisection

Dans un arbre plan, l'ordre de parcours et l'ordre antihoraire coïncident autour de chaque sommet.

Ce n'est plus vrai dans une carte à une face de genre  $g > 0$ .

On appelle **trisection** une paire formée de deux coins consécutifs pour lesquels « ces ordres ne coïncident pas ».

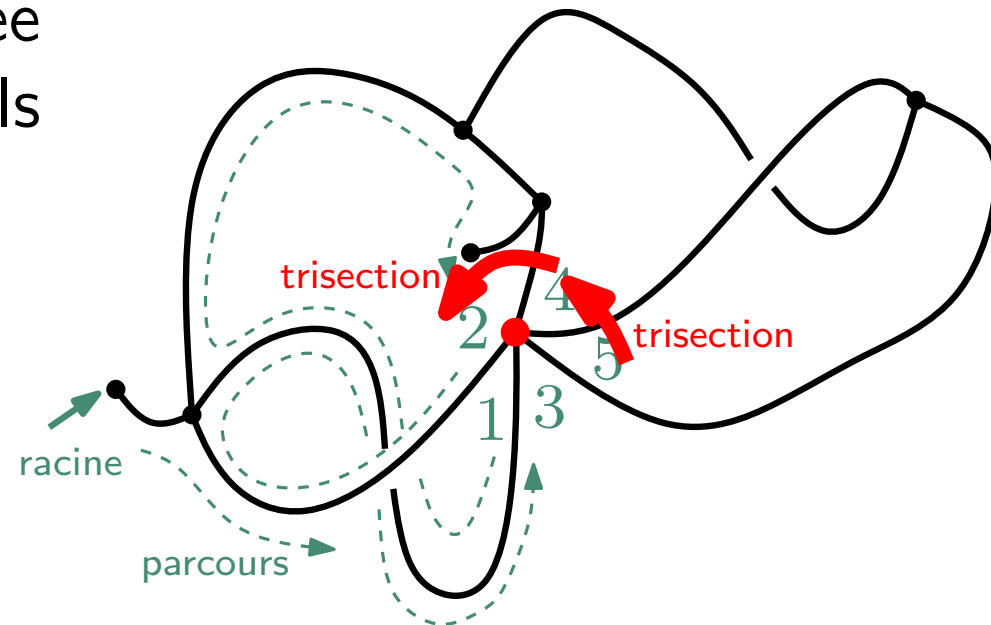
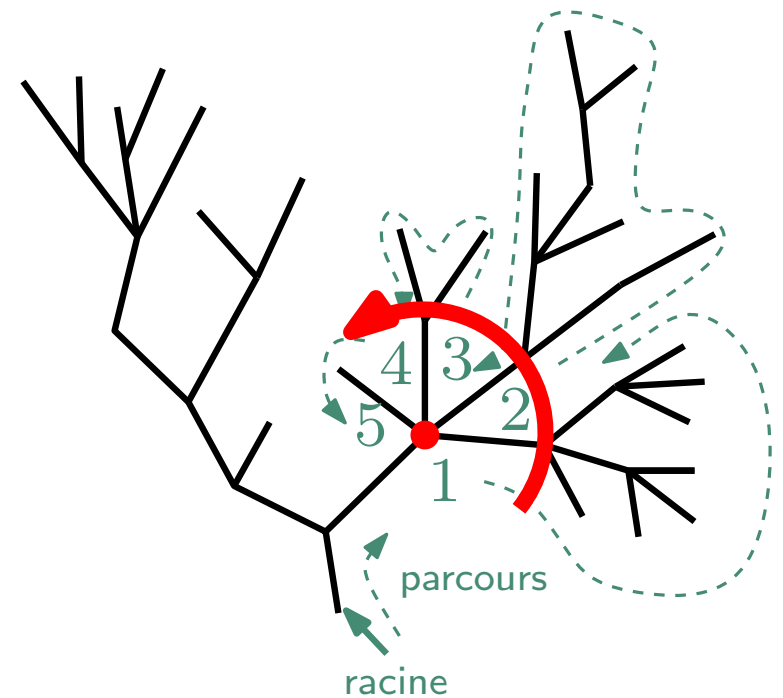


## La notion de trisection

Dans un arbre plan, l'ordre de parcours et l'ordre antihoraire coïncident autour de chaque sommet.

Ce n'est plus vrai dans une carte à une face de genre  $g > 0$ .

On appelle **trisection** une paire formée de deux coins consécutifs pour lesquels « ces ordres ne coïncident pas ».



## La notion de trisection

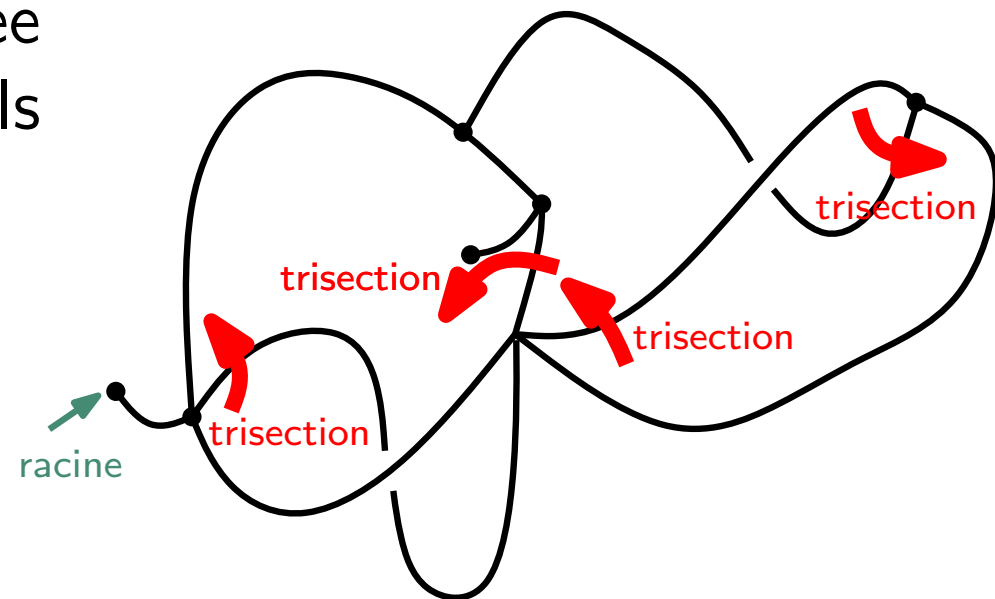
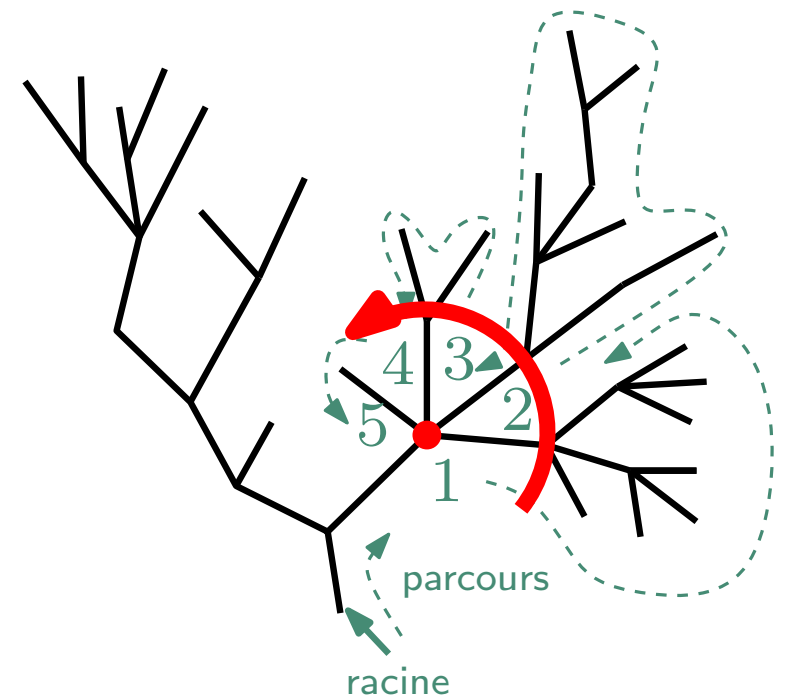
Dans un arbre plan, l'ordre de parcours et l'ordre antihoraire coïncident autour de chaque sommet.

Ce n'est plus vrai dans une carte à une face de genre  $g > 0$ .

On appelle **trisection** une paire formée de deux coins consécutifs pour lesquels « ces ordres ne coïncident pas ».

## Lemme des trisections

Une carte à une face de genre  $g$  a toujours **exactement  $2g$**  trisections.



→ réalisation combinatoire et « locale » des  $2g$  cycles de la surface.



## Théorème (asymptotique)

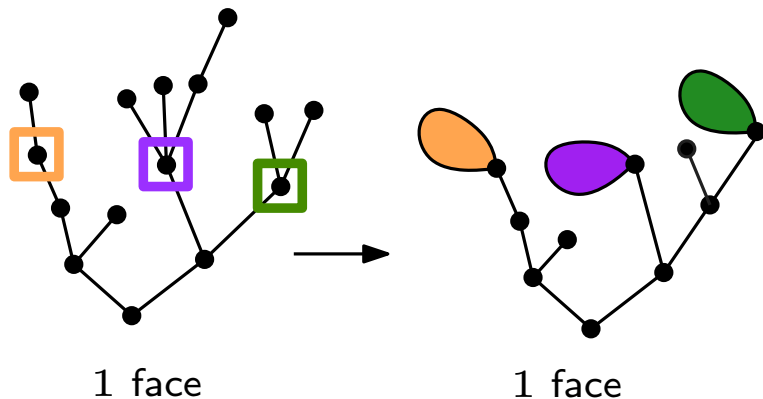
La plupart des cartes à une face de genre  $g$  munies d'une trisection marquée s'obtiennent de manière unique par le **recollement de trois sommets** dans une carte à une face de genre  $g - 1$ .

$$2g \cdot \epsilon_g(n) \sim \frac{n^3}{3!} \epsilon_{g-1}(n)$$

## Théorème (asymptotique)

La plupart des cartes à une face de genre  $g$  munies d'une trisection marquée s'obtiennent de manière unique par le **recollement de trois sommets** dans une carte à une face de genre  $g - 1$ .

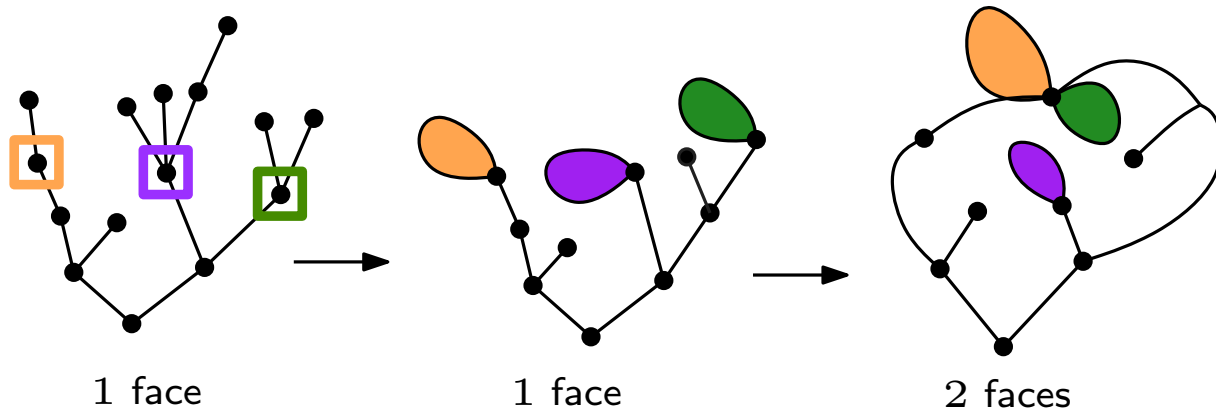
$$2g \cdot \epsilon_g(n) \sim \frac{n^3}{3!} \epsilon_{g-1}(n)$$



## Théorème (asymptotique)

La plupart des cartes à une face de genre  $g$  munies d'une trisection marquée s'obtiennent de manière unique par le **recollement de trois sommets** dans une carte à une face de genre  $g - 1$ .

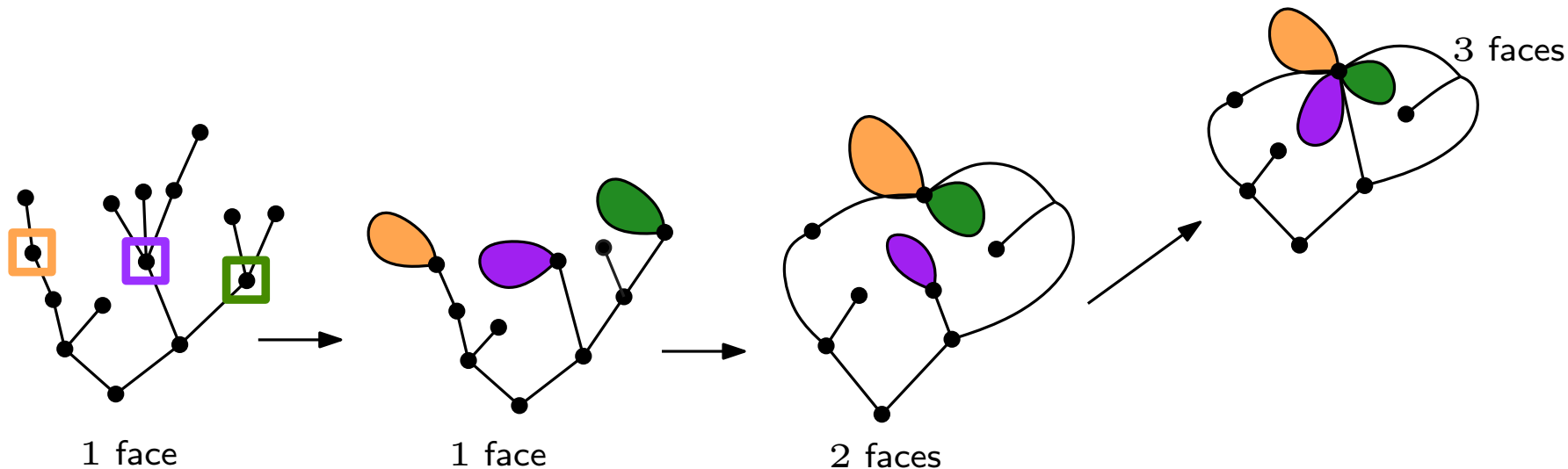
$$2g \cdot \epsilon_g(n) \sim \frac{n^3}{3!} \epsilon_{g-1}(n)$$



## Théorème (asymptotique)

La plupart des cartes à une face de genre  $g$  munies d'une trisection marquée s'obtiennent de manière unique par le **recollement de trois sommets** dans une carte à une face de genre  $g - 1$ .

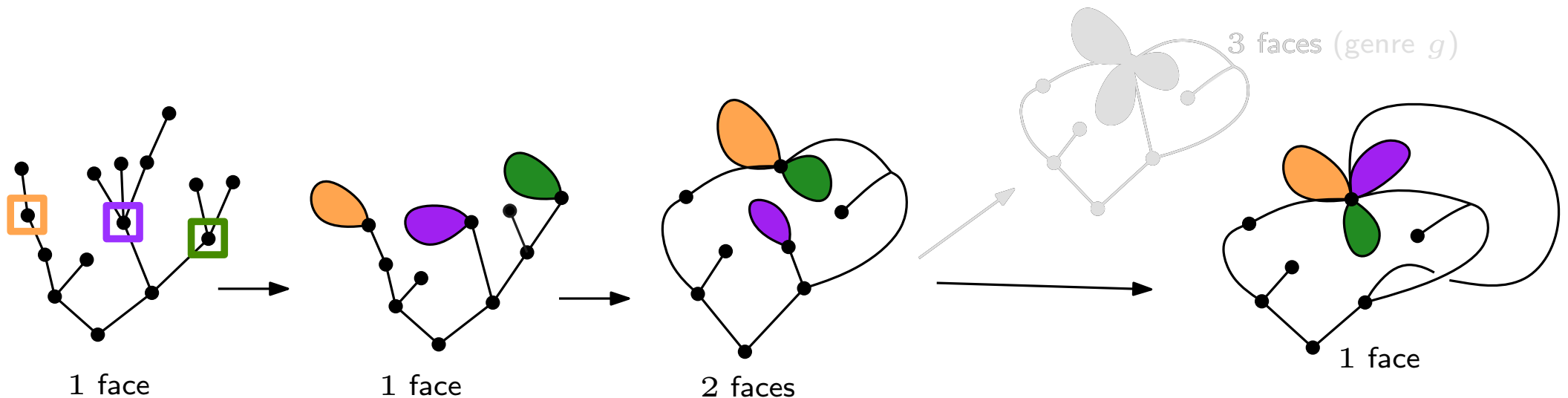
$$2g \cdot \epsilon_g(n) \sim \frac{n^3}{3!} \epsilon_{g-1}(n)$$



## Théorème (asymptotique)

La plupart des cartes à une face de genre  $g$  munies d'une trisection marquée s'obtiennent de manière unique par le **recollement de trois sommets** dans une carte à une face de genre  $g - 1$ .

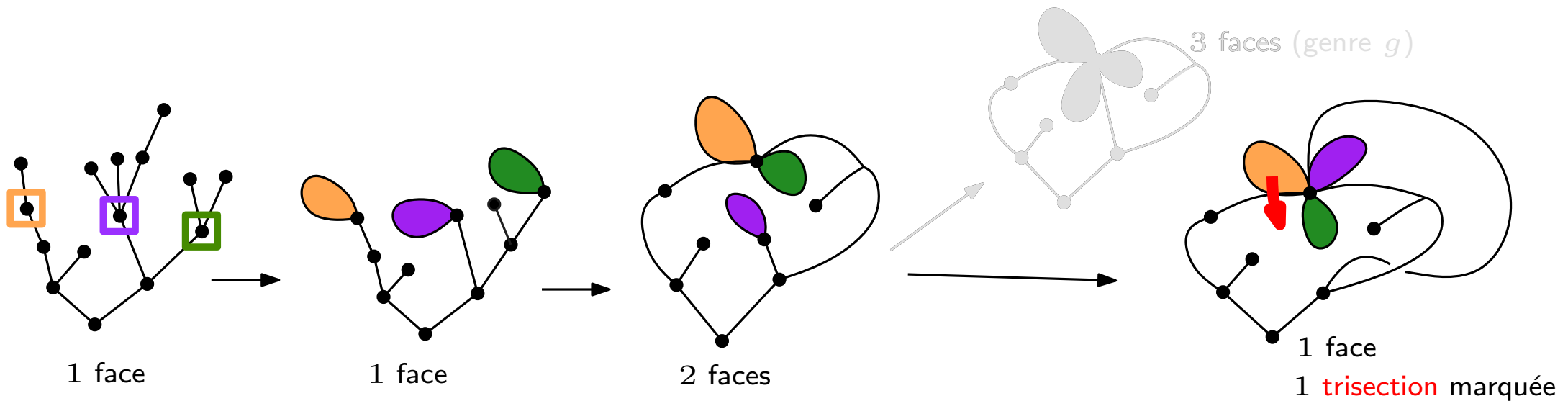
$$2g \cdot \epsilon_g(n) \sim \frac{n^3}{3!} \epsilon_{g-1}(n)$$



## Théorème (asymptotique)

La plupart des cartes à une face de genre  $g$  munies d'une trisection marquée s'obtiennent de manière unique par le **recollement de trois sommets** dans une carte à une face de genre  $g - 1$ .

$$2g \cdot \epsilon_g(n) \sim \frac{n^3}{3!} \epsilon_{g-1}(n)$$



# Théorème (asymptotique)

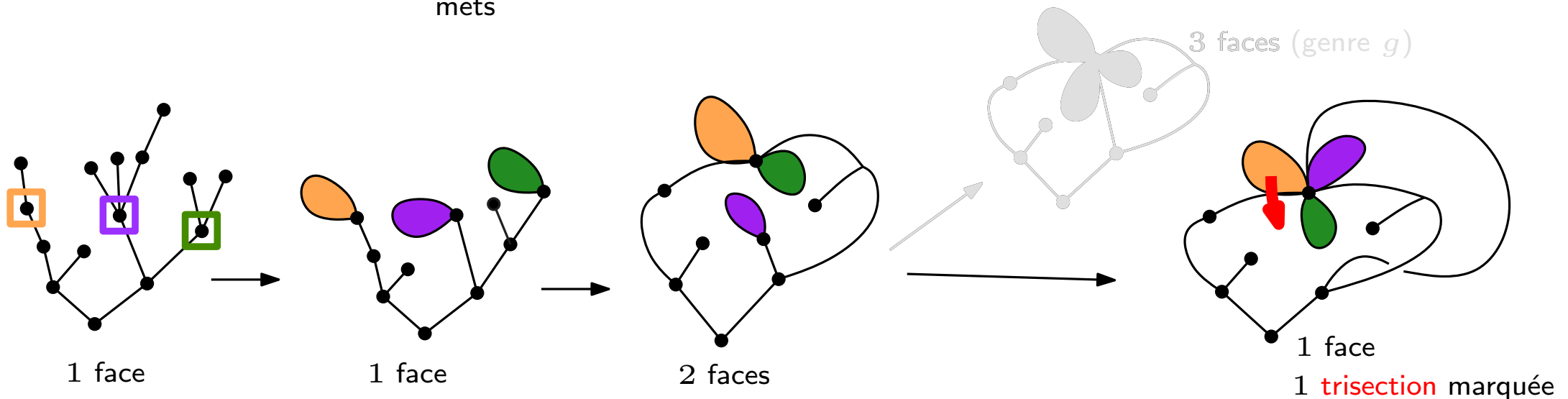
La plupart des cartes à une face de genre  $g$  munies d'une trisection marquée s'obtiennent de manière unique par le **recollement de trois sommets** dans une carte à une face de genre  $g - 1$ .

$$2g \cdot \epsilon_g(n) \sim \frac{n^3}{3!} \epsilon_{g-1}(n)$$

## Version itérée

$$\epsilon_g(n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} n^{-3/2} 4^n \times \frac{n^{3g}}{(3!)^g} \times \frac{1}{2^g g!} \quad \text{i.e.} \quad \epsilon_g(n) \sim \frac{n^{3g - \frac{3}{2}}}{12^g g! \sqrt{\pi}} 4^n$$

Catalan
distinguer  $g$  triplets de sommets
 $2^g g!$  façons d'obtenir chaque carte
[Bender-Canfield-Robinson]



## Théorème (asymptotique)

La plupart des cartes à une face de genre  $g$  munies d'une trisection marquée s'obtiennent de manière unique par le recollement de trois sommets dans une carte à une face de genre  $g - 1$ .

$$2g \cdot \epsilon_g(n) \sim \frac{n^3}{3!} \epsilon_{g-1}(n)$$

## Version itérée

$$\epsilon_g(n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} n^{-3/2} 4^n \times \frac{n^{3g}}{(3!)^g} \times \frac{1}{2^g g!} \quad \text{i.e.} \quad \epsilon_g(n) \sim \frac{n^{3g - \frac{3}{2}}}{12^g g! \sqrt{\pi}} 4^n$$

Catalan                      distinguer  $g$  triplets de sommets                       $2^g g!$  façons d'obtenir chaque carte

[Bender-Canfield-Robinson]

## On peut aller plus loin...

Les trisections qui ne peuvent pas s'obtenir par recollement de trois sommets en genre  $g - 1$  peuvent s'obtenir en recollant cinq sommets en genre  $g - 2$ ....



## Théorème (asymptotique)

La plupart des cartes à une face de genre  $g$  munies d'une trisection marquée s'obtiennent de manière unique par le recollement de trois sommets dans une carte à une face de genre  $g - 1$ .

$$2g \cdot \epsilon_g(n) \sim \frac{n^3}{3!} \epsilon_{g-1}(n)$$

## Version itérée

$$\epsilon_g(n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} n^{-3/2} 4^n \times \frac{n^{3g}}{(3!)^g} \times \frac{1}{2^g g!} \quad \text{i.e.} \quad \epsilon_g(n) \sim \frac{n^{3g - \frac{3}{2}}}{12^g g! \sqrt{\pi}} 4^n$$

Catalan                      distinguer  $g$  triplets de sommets                       $2^g g!$  façons d'obtenir chaque carte

[Bender-Canfield-Robinson]

## On peut aller plus loin...

Les trisections qui ne peuvent pas s'obtenir par recollement de trois sommets en genre  $g - 1$  peuvent s'obtenir en recollant cinq sommets en genre  $g - 2$ ... ou sept sommets en genre  $g - 3$ ...

## Théorème (asymptotique)

La plupart des cartes à une face de genre  $g$  munies d'une trisection marquée s'obtiennent de manière unique par le recollement de trois sommets dans une carte à une face de genre  $g - 1$ .

$$2g \cdot \epsilon_g(n) \sim \frac{n^3}{3!} \epsilon_{g-1}(n)$$

## Version itérée

$$\epsilon_g(n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} n^{-3/2} 4^n \times \frac{n^{3g}}{(3!)^g} \times \frac{1}{2^g g!} \quad \text{i.e.} \quad \epsilon_g(n) \sim \frac{n^{3g - \frac{3}{2}}}{12^g g! \sqrt{\pi}} 4^n$$

Catalan                      distinguer  $g$  triplets de sommets                       $2^g g!$  façons d'obtenir chaque carte

[Bender-Canfield-Robinson]

## On peut aller plus loin...

Les trisections qui ne peuvent pas s'obtenir par recollement de trois sommets en genre  $g - 1$  peuvent s'obtenir en recollant cinq sommets en genre  $g - 2$ ... ou sept sommets en genre  $g - 3$ ...  
ou neuf sommets en genre  $g - 4$ ...

## Théorème (asymptotique)

La plupart des cartes à une face de genre  $g$  munies d'une trisection marquée s'obtiennent de manière unique par le recollement de trois sommets dans une carte à une face de genre  $g - 1$ .

$$2g \cdot \epsilon_g(n) \sim \frac{n^3}{3!} \epsilon_{g-1}(n)$$

## Version itérée

$$\epsilon_g(n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} n^{-3/2} 4^n \times \frac{n^{3g}}{(3!)^g} \times \frac{1}{2^g g!} \quad \text{i.e.} \quad \epsilon_g(n) \sim \frac{n^{3g - \frac{3}{2}}}{12^g g! \sqrt{\pi}} 4^n$$

Catalan                      distinguer  $g$  triplets de sommets                       $2^g g!$  façons d'obtenir chaque carte

[Bender-Canfield-Robinson]

## On peut aller plus loin...

Les trisections qui ne peuvent pas s'obtenir par recollement de trois sommets en genre  $g - 1$  peuvent s'obtenir en recollant cinq sommets en genre  $g - 2$ ... ou sept sommets en genre  $g - 3$ ...  
ou neuf sommets en genre  $g - 4$ ...  
etc...

## Théorème (structure des cartes à une face)

Il existe une bijection simple :

$$\left( \begin{array}{c} \text{genre } g, \text{ une trisection} \\ \text{marquée} \end{array} \right) \stackrel{\text{bij.}}{=} \bigcup_{i > 0} \left( \begin{array}{c} \text{genre } g - i \text{ et } 2i + 1 \\ \text{sommets marqués.} \end{array} \right)$$

## Théorème (structure des cartes à une face)

Il existe une bijection simple :

$$\left( \begin{array}{c} \text{genre } g, \text{ une trisection} \\ \text{marquée} \end{array} \right) \stackrel{\text{bij.}}{=} \bigcup_{i > 0} \left( \begin{array}{c} \text{genre } g - i \text{ et } 2i + 1 \\ \text{sommets marqués.} \end{array} \right)$$

**Une nouvelle identité combinatoire :**

$$2g \cdot \epsilon_g(n) = \binom{n+3-2g}{3} \epsilon_{g-1}(n) + \binom{n+5-2g}{5} \epsilon_{g-2}(n) + \dots + \binom{n+1}{2g+1} \text{Cat}(n)$$

## Théorème (structure des cartes à une face)

Il existe une bijection simple :

$$\left( \begin{array}{c} \text{genre } g, \text{ une trisection} \\ \text{marquée} \end{array} \right) \stackrel{\text{bij.}}{=} \bigcup_{i > 0} \left( \begin{array}{c} \text{genre } g - i \text{ et } 2i + 1 \\ \text{sommets marqués.} \end{array} \right)$$

### Une nouvelle identité combinatoire :

$$2g \cdot \epsilon_g(n) = \binom{n+3-2g}{3} \epsilon_{g-1}(n) + \binom{n+5-2g}{5} \epsilon_{g-2}(n) + \dots + \binom{n+1}{2g+1} \text{Cat}(n)$$

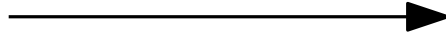
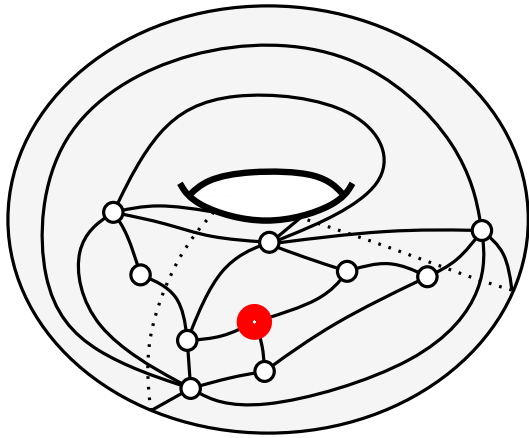
et donc :

$$\epsilon_g(n) = \underbrace{(\text{un polynôme})}_{\text{« nombre » de possibilités pour les choix successifs de sommets.}} \times \text{Cat}(n)$$

$$= \sum_{0=g_0 < g_1 < \dots < g_r = g} \prod_{i=1}^r \frac{1}{2g_i} \binom{n+1-2g_{i-1}}{2(g_i - g_{i-1}) + 1}$$

# Distances dans une carte de genre $g$

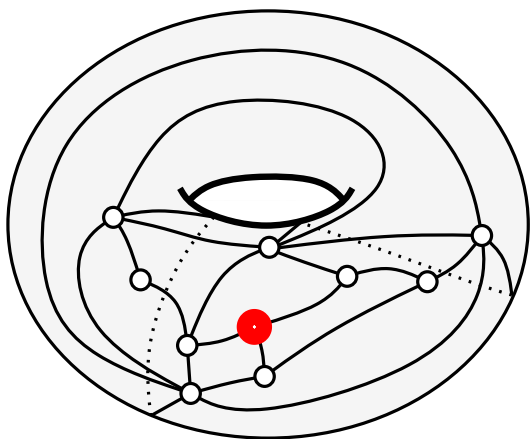
On peut composer les deux bijections précédentes :



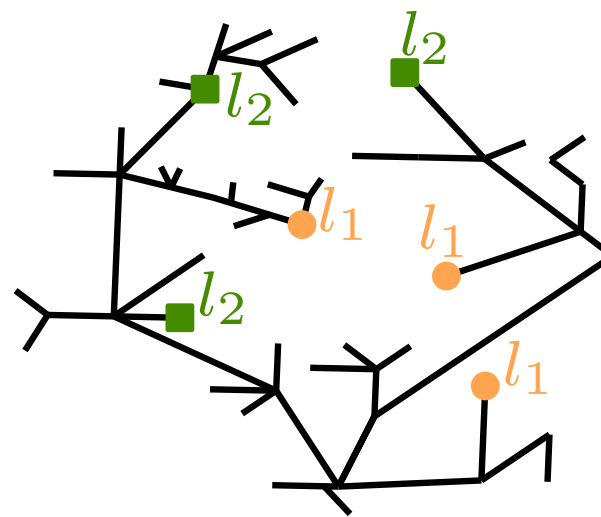
quadrangulations de  
genre  $g$  à  $n$  faces,  
mesure uniforme  
(sur une proportion  $1 - o(1)$ )



On peut composer les deux bijections précédentes :

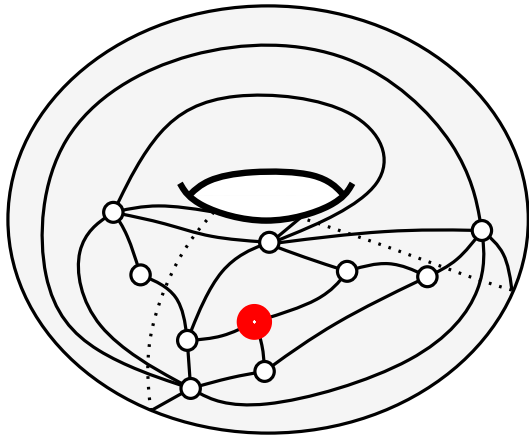


quadrangulations de  
genre  $g$  à  $n$  faces,  
mesure uniforme  
(sur une proportion  $1 - o(1)$ )

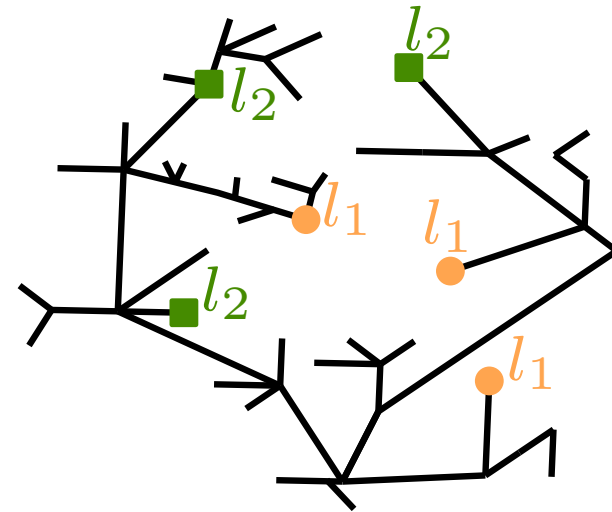


arbres étiquetés portant  $g$   
triplets de sommets marqués  
d'étiquettes compatibles 3 à 3,  
mesure uniforme  
(sur une proportion  $1 - o(1)$ )

On peut composer les deux bijections précédentes :



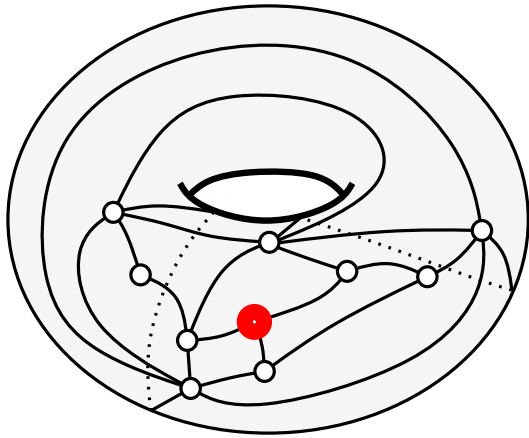
quadrangulations de  
genre  $g$  à  $n$  faces,  
mesure uniforme  
(sur une proportion  $1 - o(1)$ )



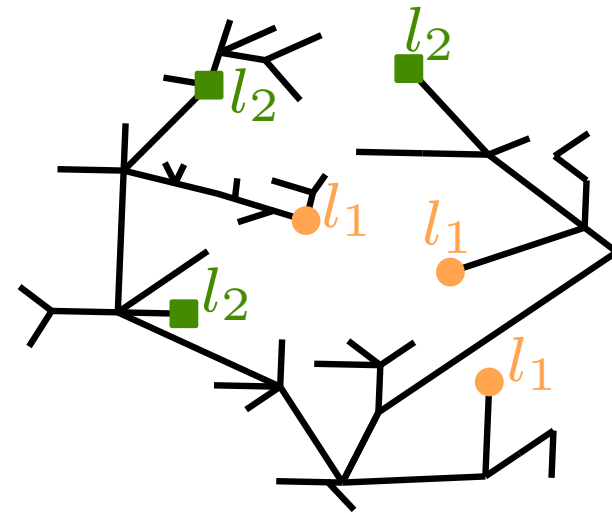
arbres étiquetés portant  $g$   
triplets de sommets marqués  
d'étiquettes compatibles 3 à 3,  
mesure uniforme  
(sur une proportion  $1 - o(1)$ )

1. Les distances au sommet pointé dans la carte de gauche sont les étiquettes dans l'arbre de droite.

## On peut composer les deux bijections précédentes :



quadrangulations de  
genre  $g$  à  $n$  faces,  
mesure uniforme  
(sur une proportion  $1 - o(1)$ )



arbres étiquetés portant  $g$   
triplets de sommets marqués  
d'étiquettes compatibles 3 à 3,  
mesure uniforme  
(sur une proportion  $1 - o(1)$ )

1. Les **distances au sommet pointé** dans la carte de gauche sont les **étiquettes** dans l'arbre de droite.
2. La mesure induite sur les arbres étiquetés n'est **pas uniforme** : chaque arbre étiqueté  $t$  est choisi **proportionnellement** au nombre de  **$g$ -uplets de triplets de sommets de même étiquette** qu'il contient.

## Profil d'une quadrangulation

Soit  $q$  une quadrangulation à  $n$  arêtes de genre  $g$  choisie uniformément, et  $v_0$  un sommet de  $q$  pris au hasard.

## Profil d'une quadrangulation

Soit  $q$  une quadrangulation à  $n$  arêtes de genre  $g$  choisie uniformément, et  $v_0$  un sommet de  $q$  pris au hasard.

Le profil est la mesure aléatoire :

$$P_n^g := \frac{1}{n + 2 - 2g} \sum_{v \text{ sommet}} \delta_{d_q(v_0, v)}$$

masse de Dirac au point « distance de  $v$  à  $v_0$  »

## Profil d'une quadrangulation

Soit  $q$  une quadrangulation à  $n$  arêtes de genre  $g$  choisie uniformément, et  $v_0$  un sommet de  $q$  pris au hasard.

Le profil **normalisé** est la mesure aléatoire :

$$\mathbf{p}_n^g := \frac{1}{n + 2 - 2g} \sum_{v \text{ sommet}} \delta_{n-1/4} d_q(v_0, v)$$

## Profil d'une quadrangulation

Soit  $q$  une quadrangulation à  $n$  arêtes de genre  $g$  choisie uniformément, et  $v_0$  un sommet de  $q$  pris au hasard.

Le profil **normalisé** est la mesure aléatoire :

$$p_n^g := \frac{1}{n + 2 - 2g} \sum_{v \text{ sommet}} \delta_{n^{-1/4} d_q(v_0, v)}$$

## Cas planaire

**Théorème [Chassaing et Schaeffer]**

Le profil normalisé  $p_n^0$  converge vers une mesure de probabilités aléatoire sur  $\mathbb{R}_+$  appelée ISE.

## Profil d'une quadrangulation

Soit  $q$  une quadrangulation à  $n$  arêtes de genre  $g$  choisie uniformément, et  $v_0$  un sommet de  $q$  pris au hasard.

Le profil **normalisé** est la mesure aléatoire :

$$p_n^g := \frac{1}{n + 2 - 2g} \sum_{v \text{ sommet}} \delta_{n^{-1/4} d_q(v_0, v)}$$

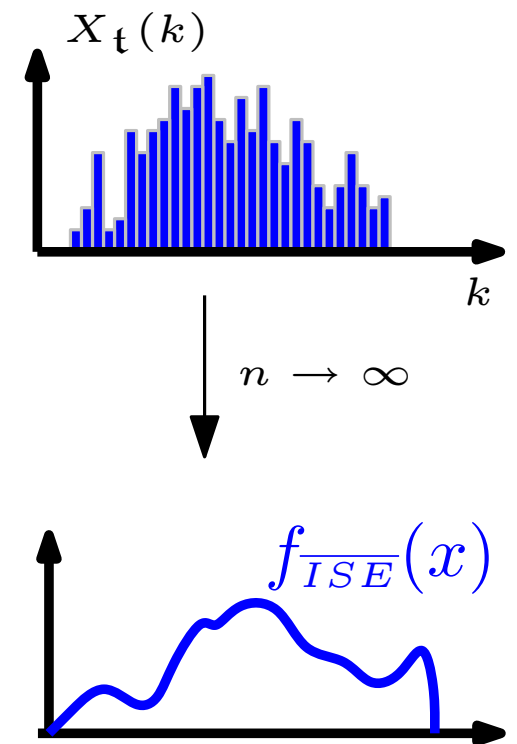
## Cas planaire

**Théorème [Chassaing et Schaeffer]**

Le profil normalisé  $p_n^0$  converge vers une mesure de probabilités aléatoire sur  $\mathbb{R}_+$  appelée ISE.

**Théorème [Bousquet-Mélou et Janson]**

La mesure ISE a presque-sûrement une densité continue à support compact  $f_{ISE}(x)$ .





## Théorème [C]

Le profil normalisé  $p_n^g$  converge en loi vers une mesure aléatoire sur  $\mathbb{R}_+$ , dont la loi est la loi de  $\overline{ISE}$  « pondérée » par la fonctionnelle :

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{ISE}}(x)^3 dx \right)^g .$$

## Théorème [C]

Le profil normalisé  $p_n^g$  converge en loi vers une mesure aléatoire sur  $\mathbb{R}_+$ , dont la loi est la loi de  $\overline{ISE}$  « pondérée » par la fonctionnelle :

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{ISE}}(x)^3 dx \right)^g.$$

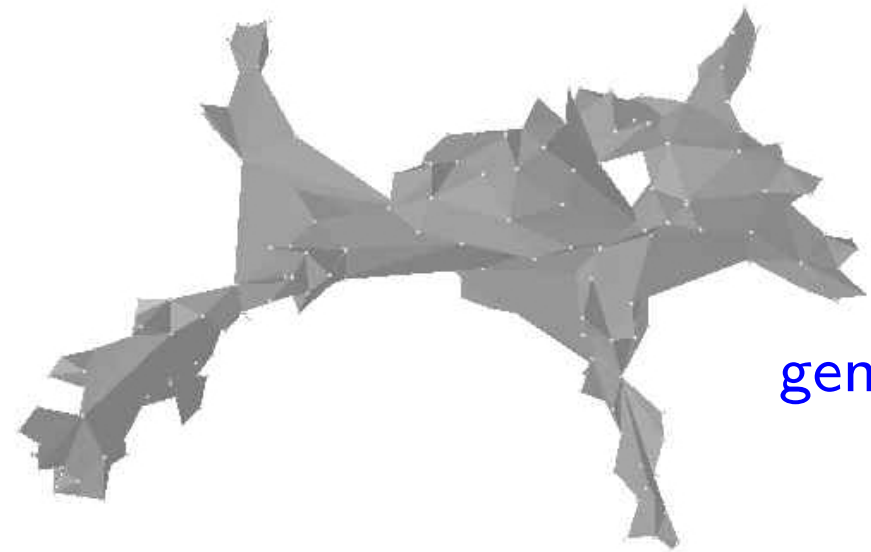
« Démonstration » : en discret, les arbres étiquetés sont pondérés par la fonctionnelle

$$\left( \sum_k X_t(k)(X_t(k) - 1)(X_t(k) - 2) \right)^g$$

qui est le nombre de  $g$ -uplets de triplets de sommets de même étiquette de  $t$ .

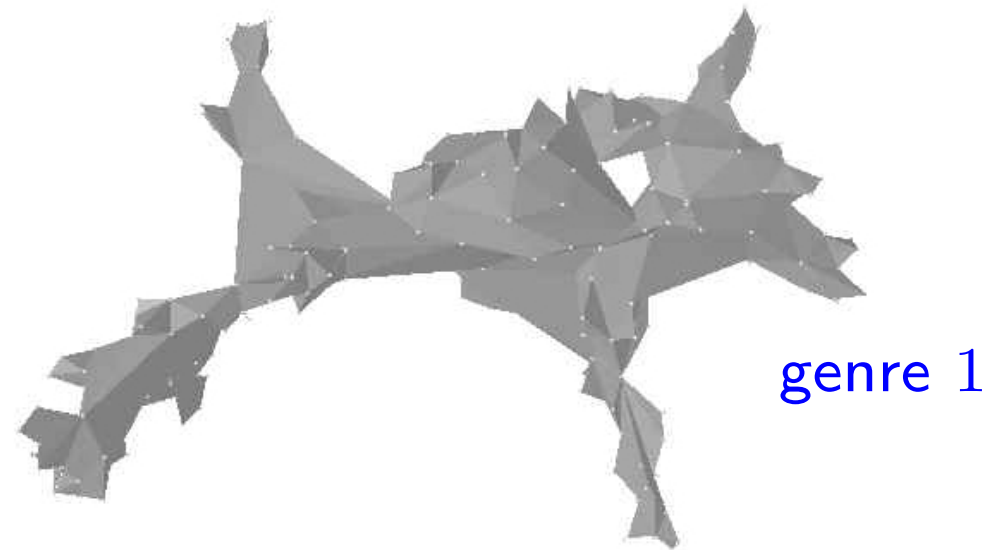
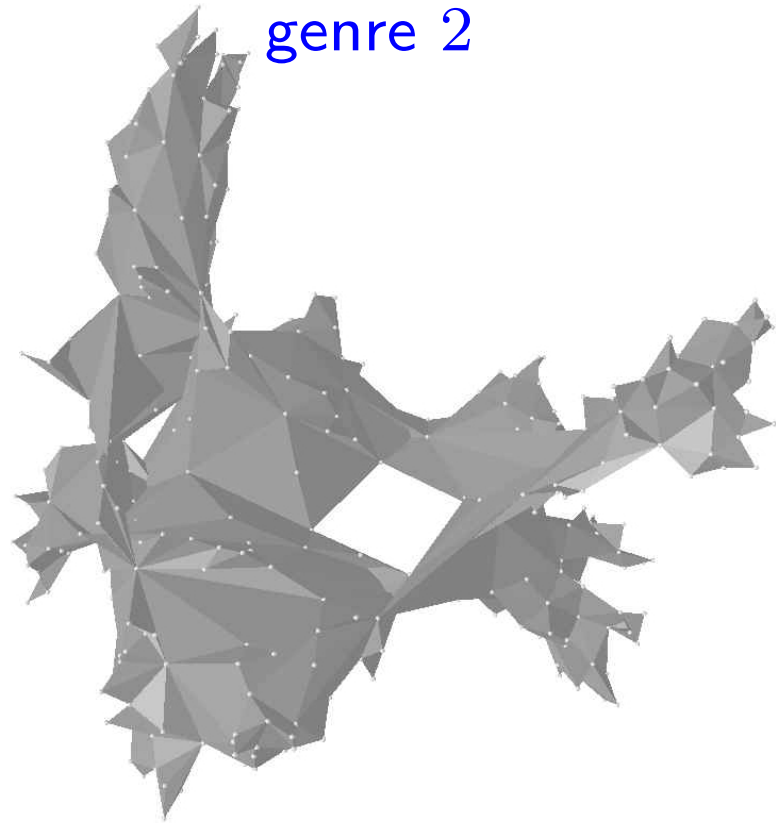
**Au fait, à quoi ressemble une carte aléatoire de genre  $g$  ?**

Au fait, à quoi ressemble une carte aléatoire de genre  $g$  ?

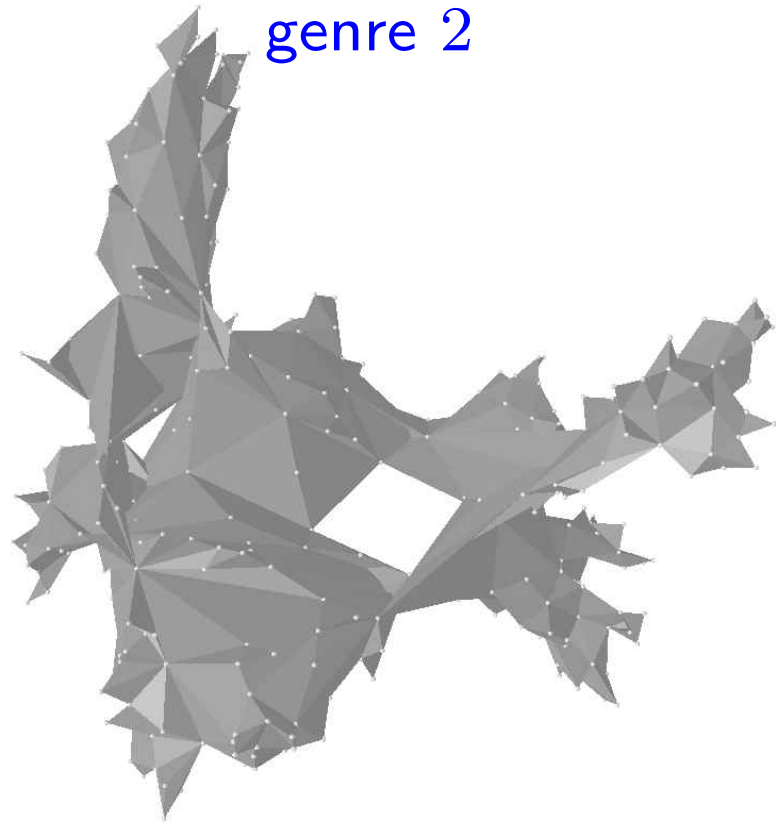


genre 1

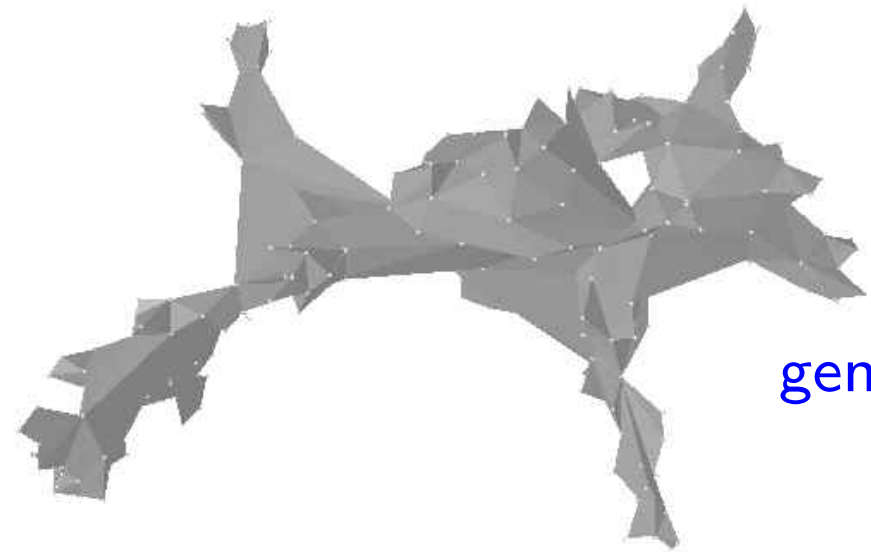
Au fait, à quoi ressemble une carte aléatoire de genre  $g$  ?



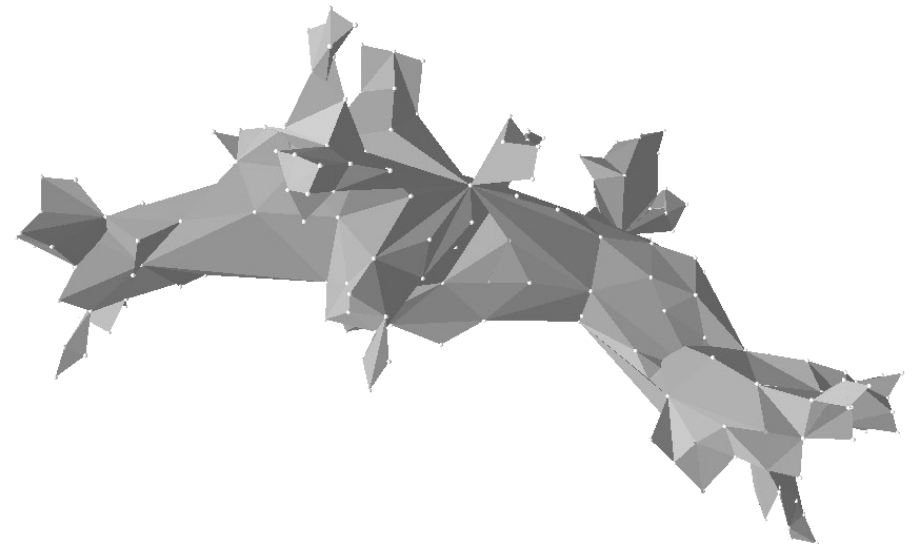
Au fait, à quoi ressemble une carte aléatoire de genre  $g$  ?



genre 2

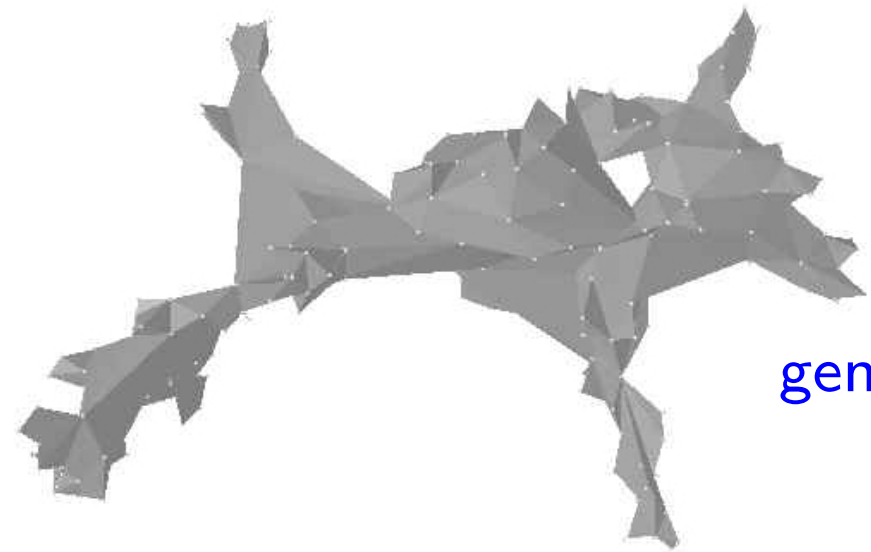
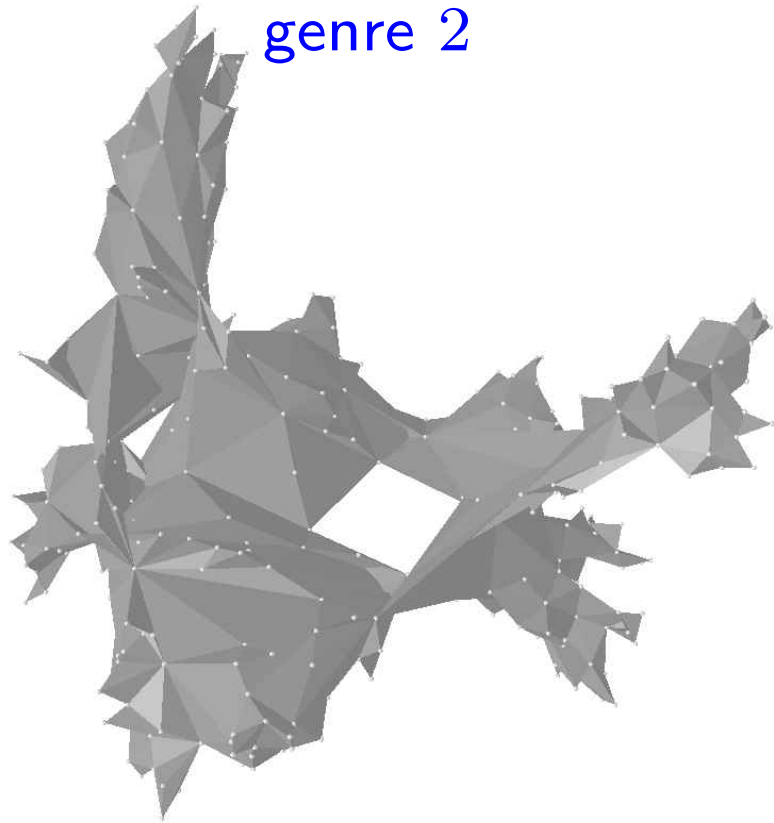


genre 1

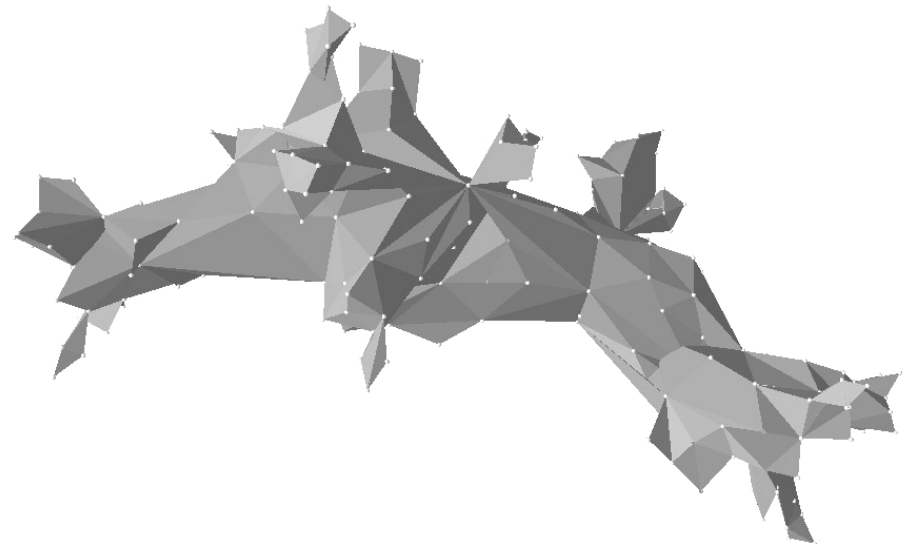


genre 0

# Au fait, à quoi ressemble une carte aléatoire de genre $g$ ?



Les **bijections** conduisent à des algorithmes de **génération aléatoire** efficaces.



## Bilan de l'exposé

Cartes à une face :

- bijection naturelle, interprétation de la forme polynomiale des formules pour  $\epsilon_g(n)$ .



## Bilan de l'exposé

### Cartes à une face :

- bijection naturelle, interprétation de la forme polynomiale des formules pour  $\epsilon_g(n)$ .

### Cartes générales où à degrés contraints :

- comptage asymptotique : universalité de l'exposant  $\frac{5(g-1)}{2}$  et de la constante  $t_g$ , constantes multiplicatives intervenant comme paramètres de normalisation « locale » des arbres associés.

## Bilan de l'exposé

### Cartes à une face :

- bijection naturelle, interprétation de la forme polynomiale des formules pour  $\epsilon_g(n)$ .

### Cartes générales où à degrés contraints :

- comptage asymptotique : universalité de l'exposant  $\frac{5(g-1)}{2}$  et de la constante  $t_g$ , constantes multiplicatives intervenant comme paramètres de normalisation « locale » des arbres associés.

### Cartes aléatoires

- convergence du profil renormalisé et caractérisation du profil limite continu des quadrangulations de genre  $g$ .

# Bilan de l'exposé

## Cartes à une face :

- bijection naturelle, interprétation de la forme polynomiale des formules pour  $\epsilon_g(n)$ .

## Cartes générales où à degrés contraints :

- comptage asymptotique : universalité de l'exposant  $\frac{5(g-1)}{2}$  et de la constante  $t_g$ , constantes multiplicatives intervenant comme paramètres de normalisation « locale » des arbres associés.

## Cartes aléatoires

- convergence du profil renormalisé et caractérisation du profil limite continu des quadrangulations de genre  $g$ .

## Génération :

- algorithmes approchés efficaces.

## Bilan de l'exposé

### Cartes à une face :

- bijection naturelle, interprétation de la forme polynomiale des formules pour  $\epsilon_g(n)$ .

### Cartes générales où à degrés contraints :

- comptage asymptotique : universalité de l'exposant  $\frac{5(g-1)}{2}$  et de la constante  $t_g$ , constantes multiplicatives intervenant comme paramètres de normalisation « locale » des arbres associés.

### Cartes aléatoires

- convergence du profil renormalisé et caractérisation du profil limite continu des quadrangulations de genre  $g$ .

### Génération :

- algorithmes approchés efficaces.

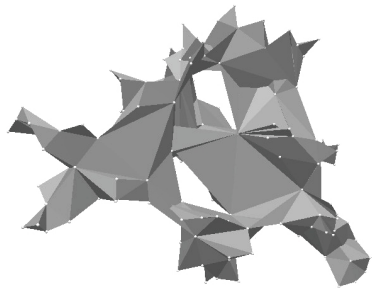
**Problème :** la constante  $t_g$ .  $(m_g(n) \sim t_g n^{\frac{5(g-1)}{2}} 12^n)$

**Au final, tout ça se ramène aux arbres étiquetés...**

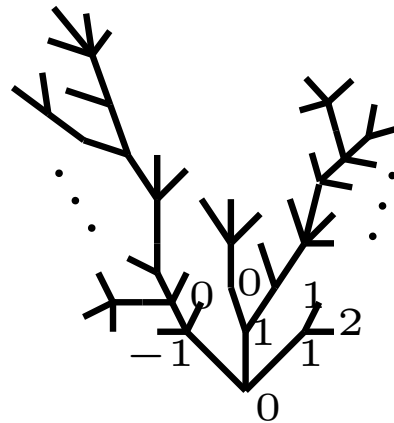
...que l'on comprend encore trop mal...

# Au final, tout ça se ramène aux arbres étiquetés...

...que l'on comprend encore trop mal...



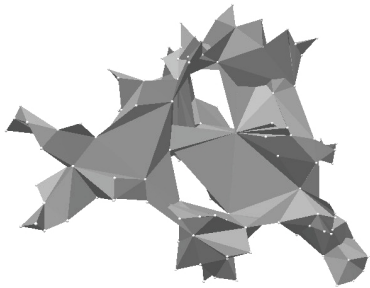
cartes de  
genre  $g$



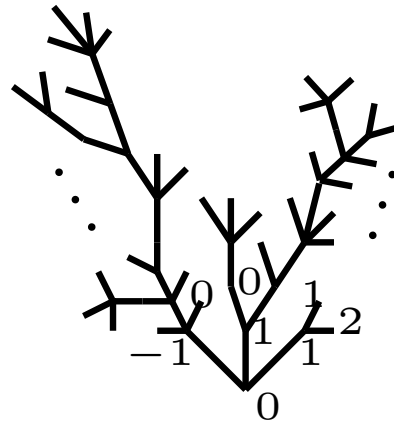
arbres étiquetés

# Au final, tout ça se ramène aux arbres étiquetés...

...que l'on comprend encore trop mal...



cartes de  
genre  $g$



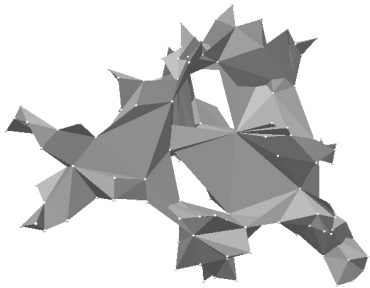
arbres étiquetés

Formules **BDFG** :

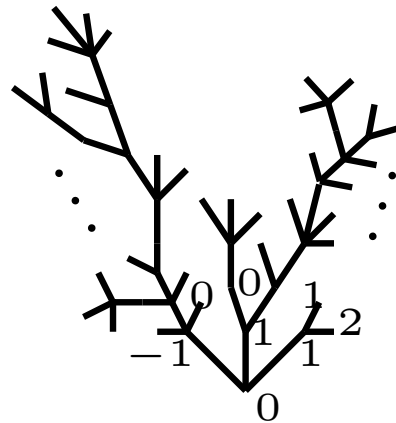
$$R_i = R \frac{(1 - X^{i+1})(1 - X^{i+4})}{(1 - X^{i+2})(1 - X^{i+3})}$$

# Au final, tout ça se ramène aux arbres étiquetés...

...que l'on comprend encore trop mal...



cartes de  
genre  $g$



arbres étiquetés

Formules **BDFG** :

$$R_i = R \frac{(1 - X^{i+1})(1 - X^{i+4})}{(1 - X^{i+2})(1 - X^{i+3})}$$

« Double-scaling limit » **[Witten...]**

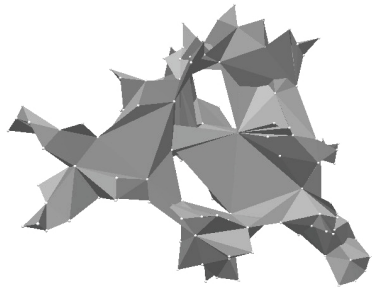
$$\frac{25g^2 - 1}{12} u_g = \sum_{i=0}^{g+1} u_i u_{g+1-i}$$

$$\text{où } u_g = \Gamma\left(\frac{5g-1}{2}\right) 4^{g-1} t_g.$$

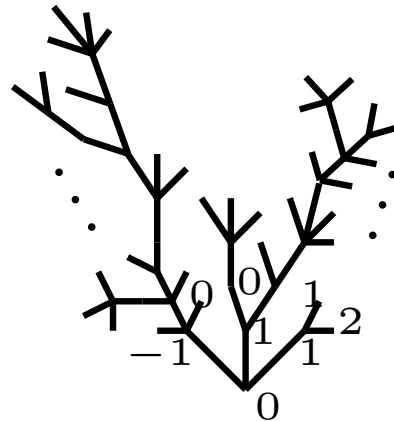


# Au final, tout ça se ramène aux arbres étiquetés...

...que l'on comprend encore trop mal...



cartes de  
genre  $g$



arbres étiquetés

Formules **BDFG** :

$$R_i = R \frac{(1 - X^{i+1})(1 - X^{i+4})}{(1 - X^{i+2})(1 - X^{i+3})}$$

« Double-scaling limit » **[Witten...]**

$$\frac{25g^2 - 1}{12} u_g = \sum_{i=0}^{g+1} u_i u_{g+1-i}$$

$$\text{où } u_g = \Gamma\left(\frac{5g-1}{2}\right) 4^{g-1} t_g.$$

... mais qui doivent bien avoir une structure cachée !

## Post-scriptum : graphes

Le **genre minimal** d'un graphe est le genre minimal d'une carte dont il est le graphe sous-jacent.

### Théorème [C-Fusy-Gimenez-Mohar-Noy-Rue]

Le nombre  $a_g(n)$  de graphes de genre minimal  $g$  sur  $\{1, 2, \dots, n\}$  satisfait :

$$a_g(n) \sim s_g \cdot n^{\frac{5g-7}{2}} \gamma^n n! \quad (\gamma \approx 27, \dots)$$

## Post-scriptum : graphes

Le **genre minimal** d'un graphe est le genre minimal d'une carte dont il est le graphe sous-jacent.

### Théorème [C-Fusy-Gimenez-Mohar-Noy-Rue]

Le nombre  $a_g(n)$  de graphes de genre minimal  $g$  sur  $\{1, 2, \dots, n\}$  satisfait :

$$a_g(n) \sim s_g \cdot n^{\frac{5g-7}{2}} \gamma^n n! \quad (\gamma \approx 27, \dots)$$

Avec proba tendant vers 1, un graphe de genre minimal  $g$  :

- a une unique composante 3-connexe de taille linéaire. Elle est de genre minimal  $g$ , et son plongement en genre  $g$  est **unique** ;
- n'a pas de cycles non-contractibles de longueur  $O(1)$  ;

## Post-scriptum : graphes

Le **genre minimal** d'un graphe est le genre minimal d'une carte dont il est le graphe sous-jacent.

### Théorème [C-Fusy-Gimenez-Mohar-Noy-Rue]

Le nombre  $a_g(n)$  de graphes de genre minimal  $g$  sur  $\{1, 2, \dots, n\}$  satisfait :

$$a_g(n) \sim s_g \cdot n^{\frac{5g-7}{2}} \gamma^n n! \quad (\gamma \approx 27, \dots)$$

Avec proba tendant vers 1, un graphe de genre minimal  $g$  :

- a une unique composante 3-connexe de taille linéaire. Elle est de genre minimal  $g$ , et son plongement en genre  $g$  est **unique** ;
- n'a pas de cycles non-contractibles de longueur  $O(1)$  ;
- a pour nombre chromatique **4 ou 5**.

votre

de

attention.

Merci

