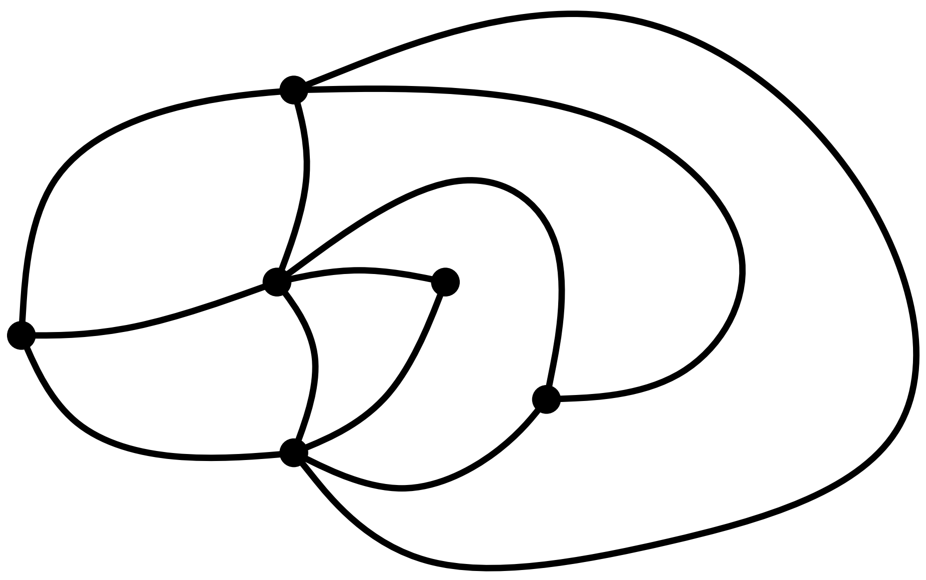
Cartes couvertes de genre supérieur.

Guillaume Chapuy, LIX, École Polytechnique
et
Olivier Bernardi, CNRS, Université d'Orsay.

Aléa, Mars 2009.

Arbres couvrants et dualité

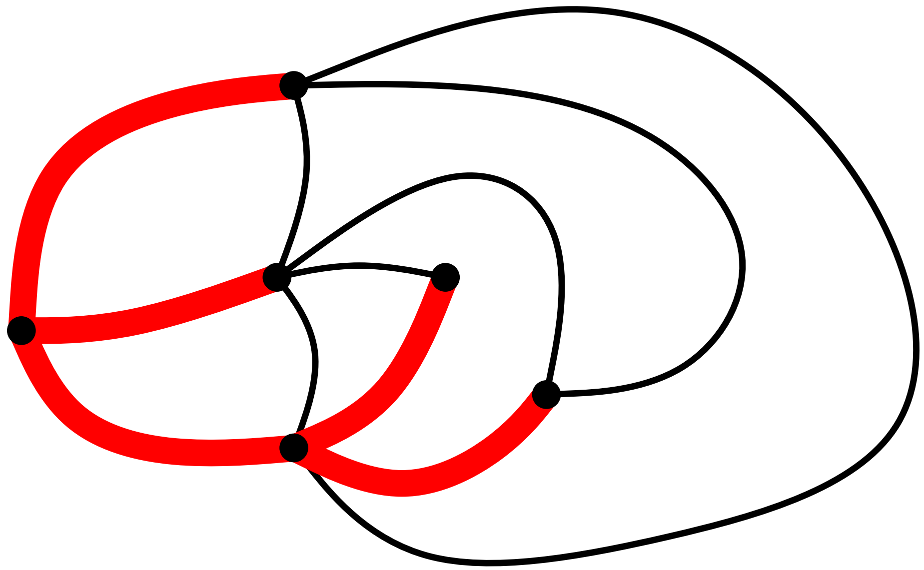
Une carte planaire est le dessin d'un graphe planaire dans le plan, sans croisements d'arêtes.



Arbres couvrants et dualité

Une carte planaire est le dessin d'un graphe planaire dans le plan, sans croisements d'arêtes.

Un arbre couvrant est un sous-graphe qui est un arbre et qui visite tous les sommets.

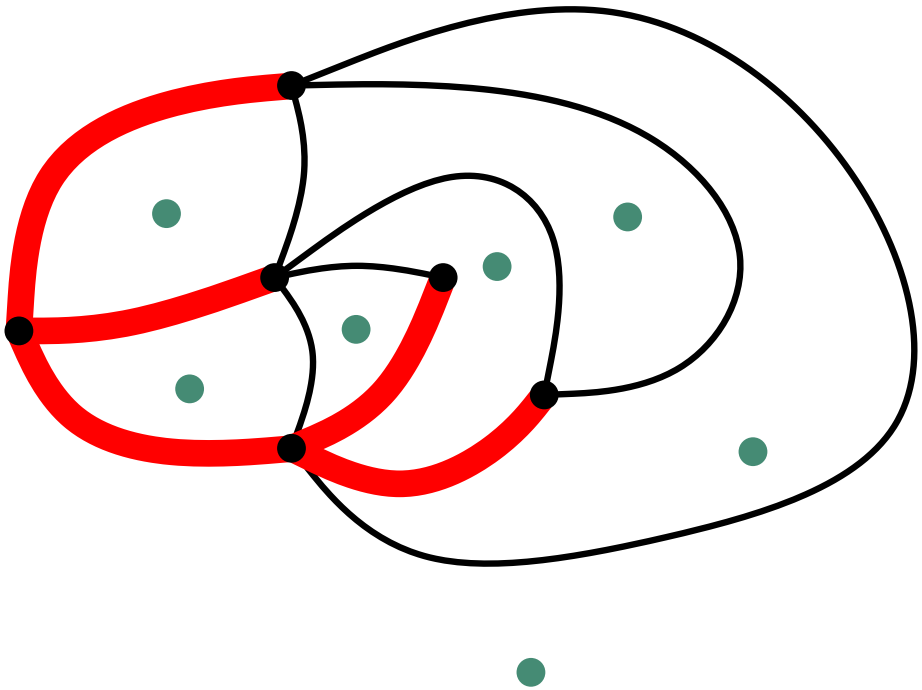


Arbres couvrants et dualité

Une carte planaire est le dessin d'un graphe planaire dans le plan, sans croisements d'arêtes.

Un arbre couvrant est un sous-graphe qui est un arbre et qui visite tous les sommets.

La carte duale est naturellement munie d'un arbre couvrant : l'arbre couvrant dual.

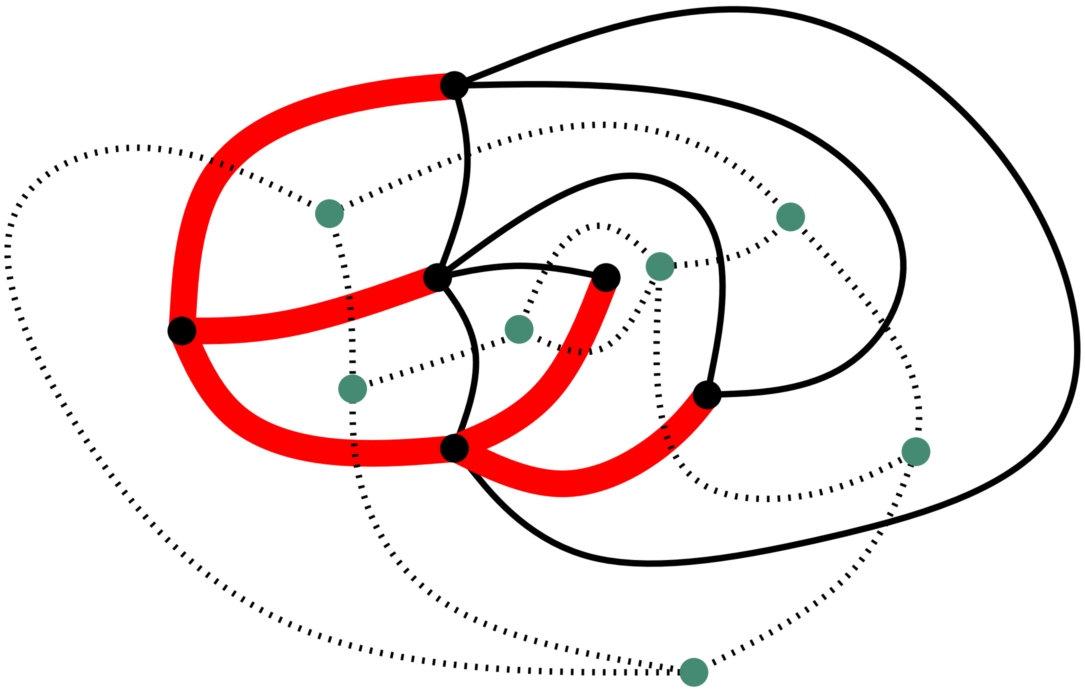


Arbres couvrants et dualité

Une carte planaire est le dessin d'un graphe planaire dans le plan, sans croisements d'arêtes.

Un arbre couvrant est un sous-graphe qui est un arbre et qui visite tous les sommets.

La carte duale est naturellement munie d'un arbre couvrant : l'arbre couvrant dual.

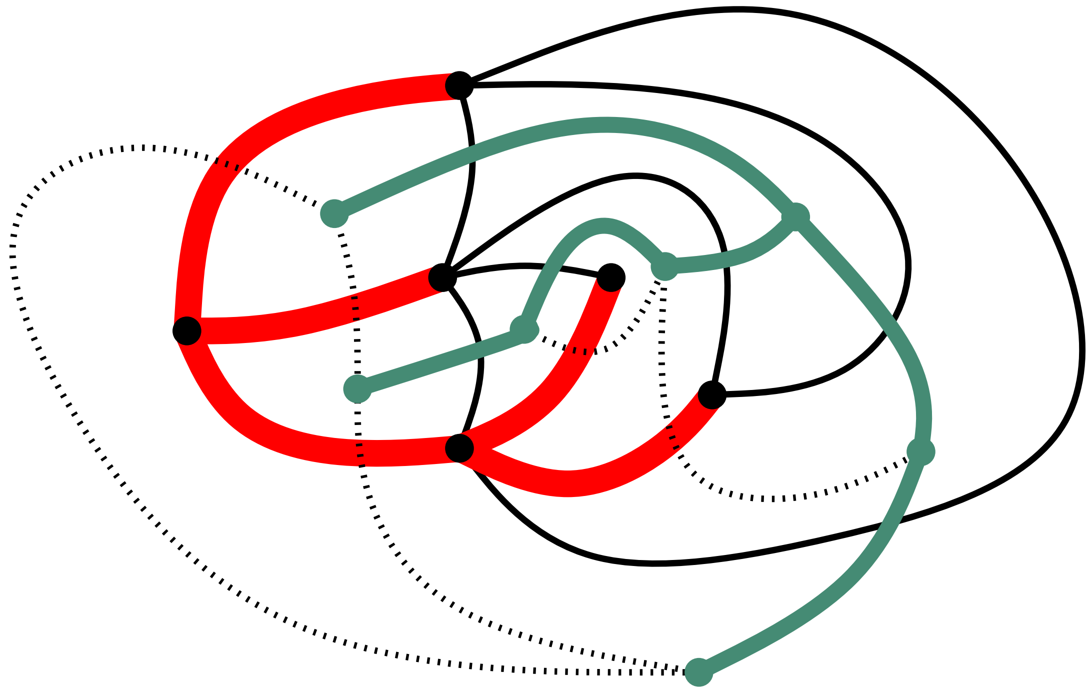


Arbres couvrants et dualité

Une carte planaire est le dessin d'un graphe planaire dans le plan, sans croisements d'arêtes.

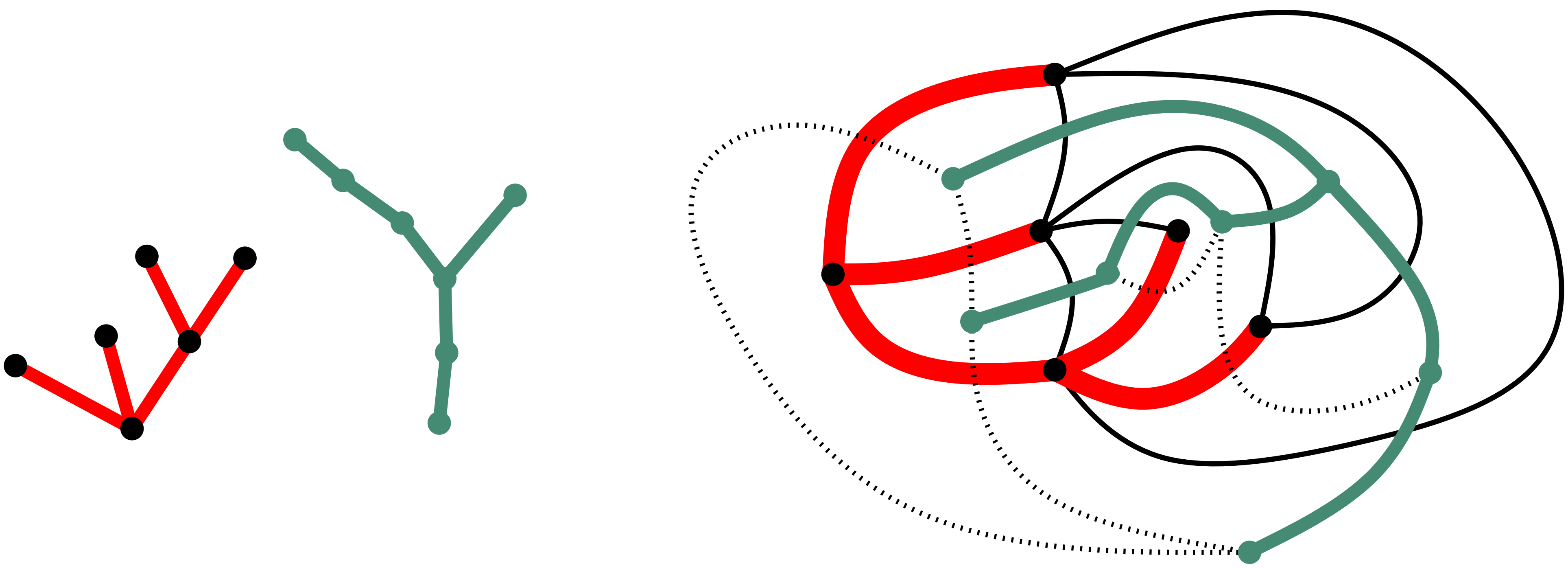
Un arbre couvrant est un sous-graphe qui est un arbre et qui visite tous les sommets.

La carte duale est naturellement munie d'un arbre couvrant : l'arbre couvrant dual.



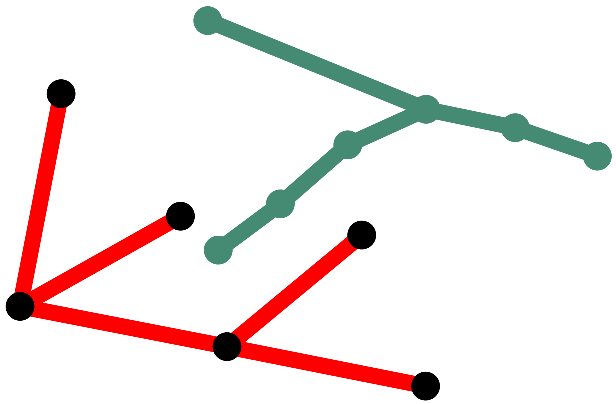
Arbres couvrants et dualité

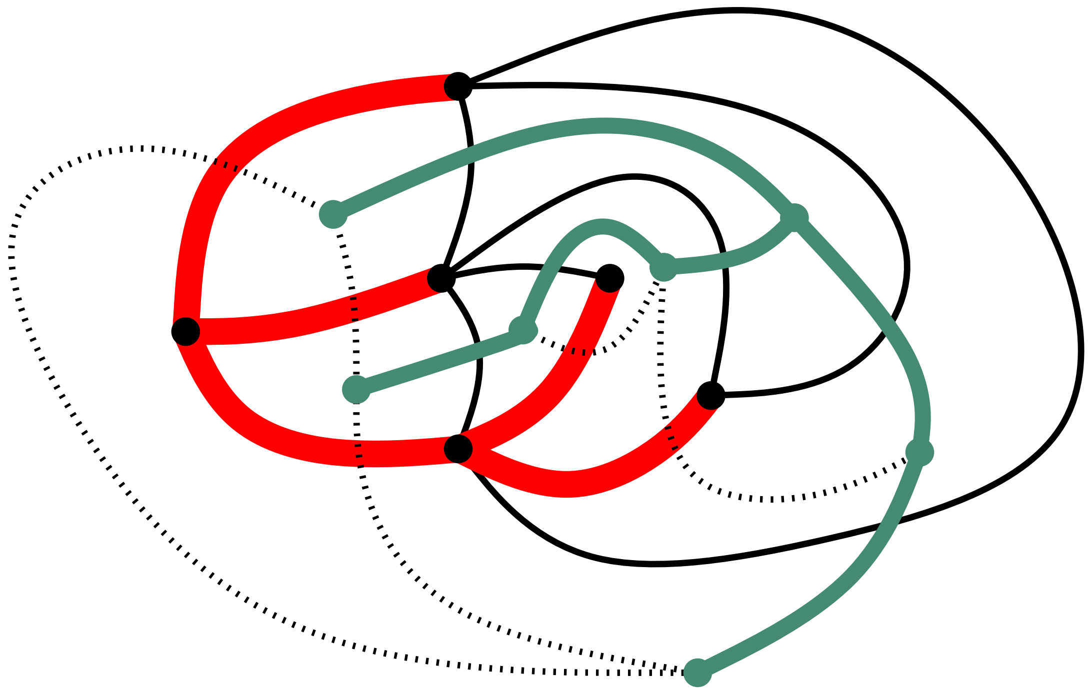
La carte est obtenue par le recollement bord à bord de l'arbre couvrant et de l'arbre couvrant dual :



Arbres couvrants et dualité

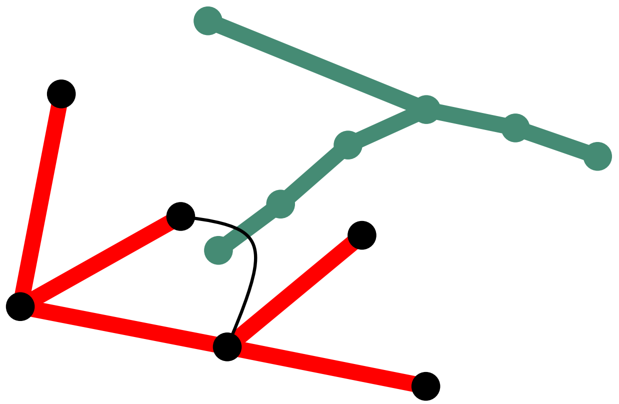
La carte est obtenue par le recollement bord à bord de l'arbre couvrant et de l'arbre couvrant dual :

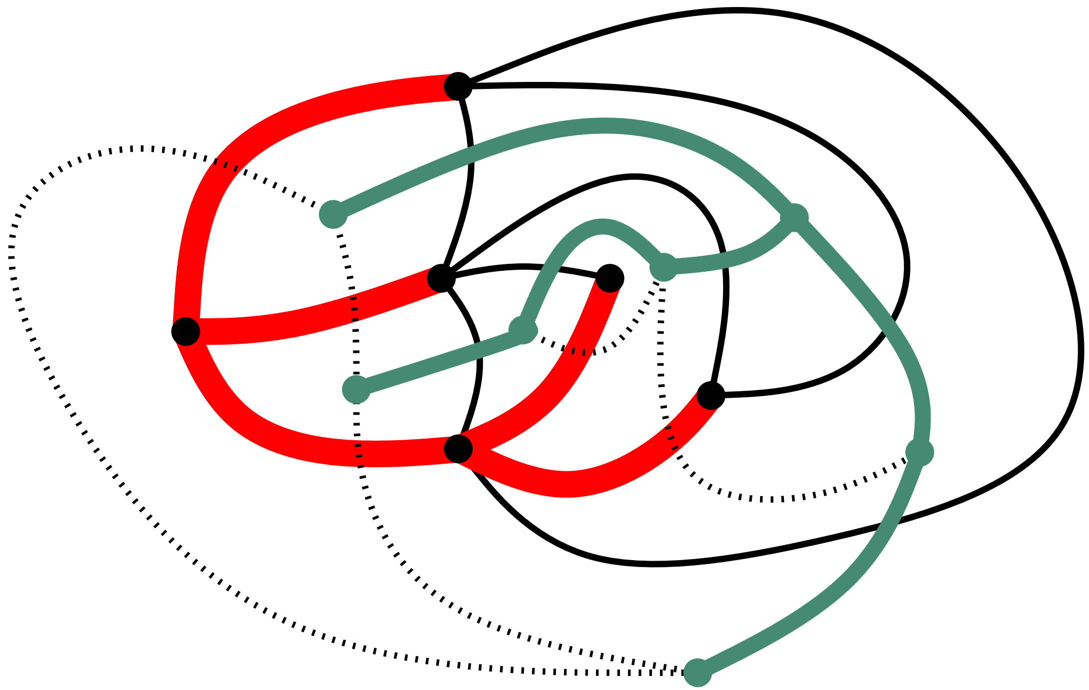




Arbres couvrants et dualité

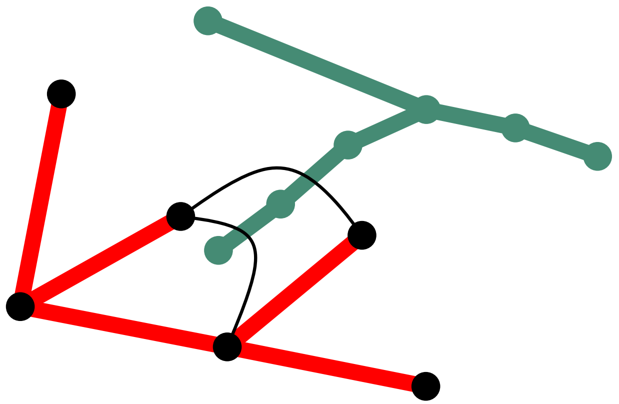
La carte est obtenue par le recollement bord à bord de l'arbre couvrant et de l'arbre couvrant dual :

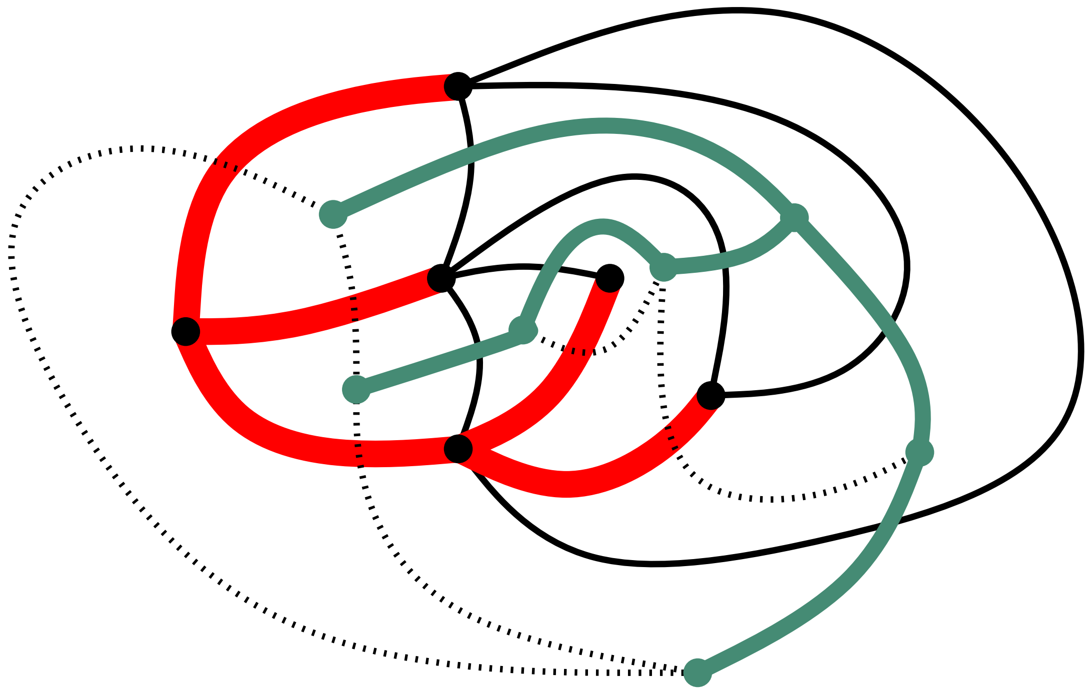




Arbres couvrants et dualité

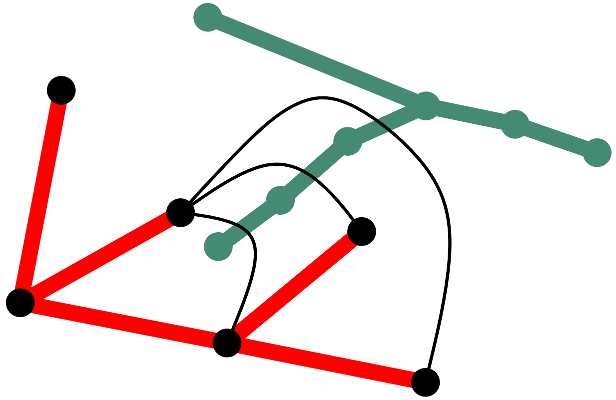
La carte est obtenue par le recollement bord à bord de l'arbre couvrant et de l'arbre couvrant dual :

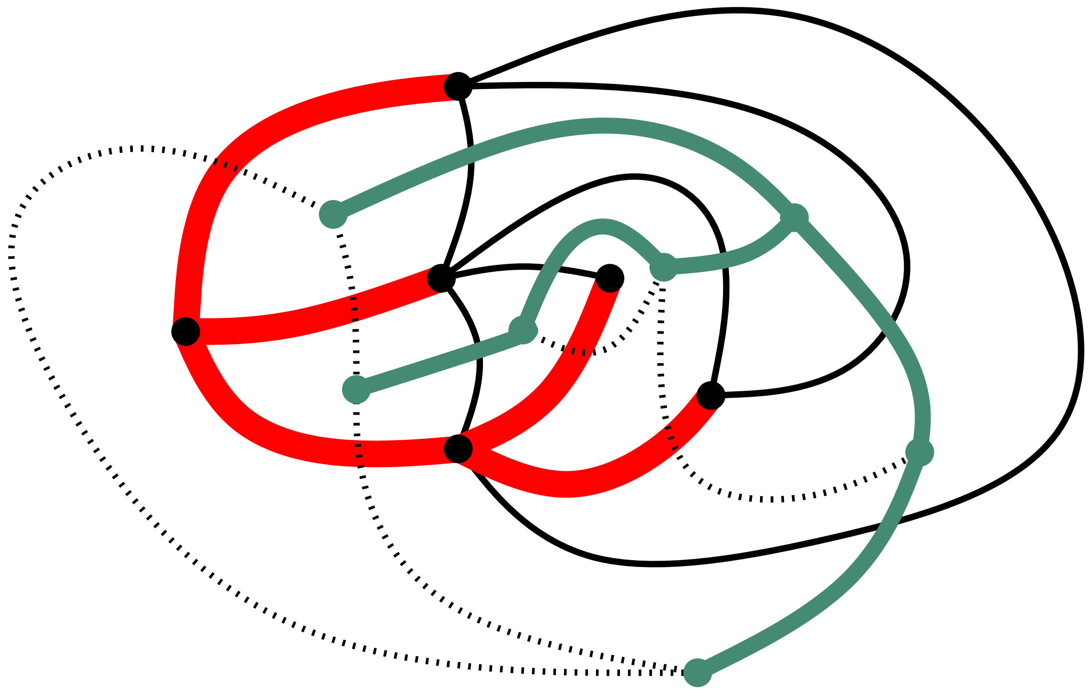




Arbres couvrants et dualité

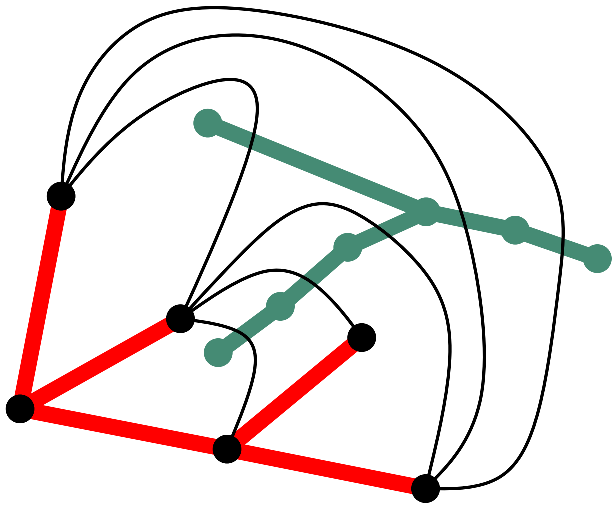
La carte est obtenue par le recollement bord à bord de l'arbre couvrant et de l'arbre couvrant dual :

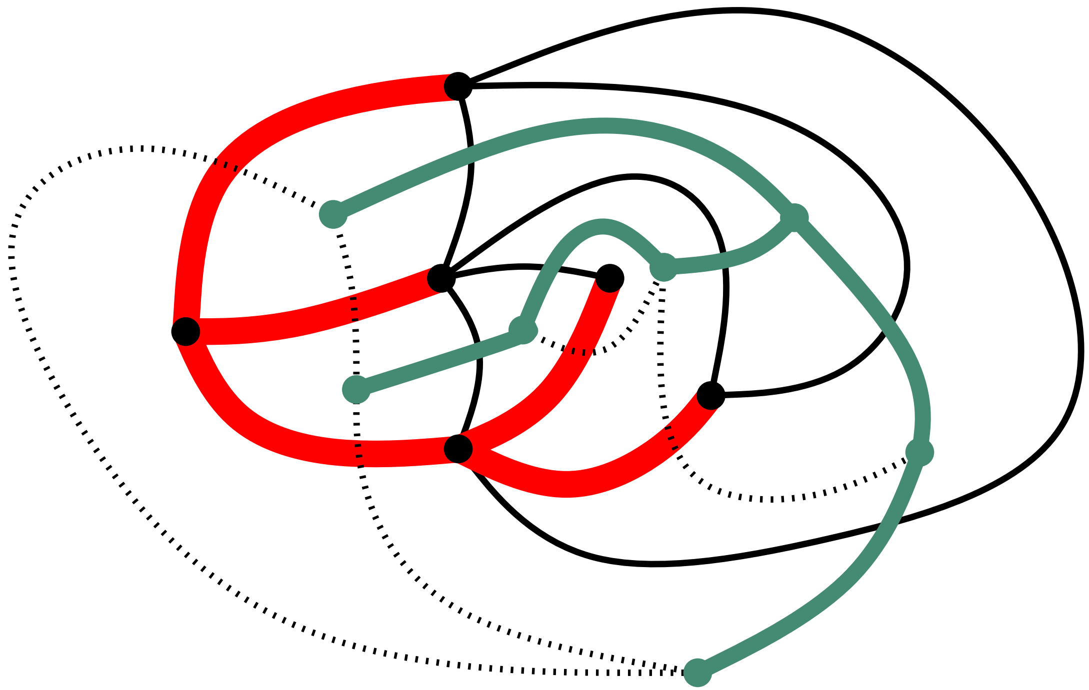




Arbres couvrants et dualité

La carte est obtenue par le recollement bord à bord de l'arbre couvrant et de l'arbre couvrant dual :

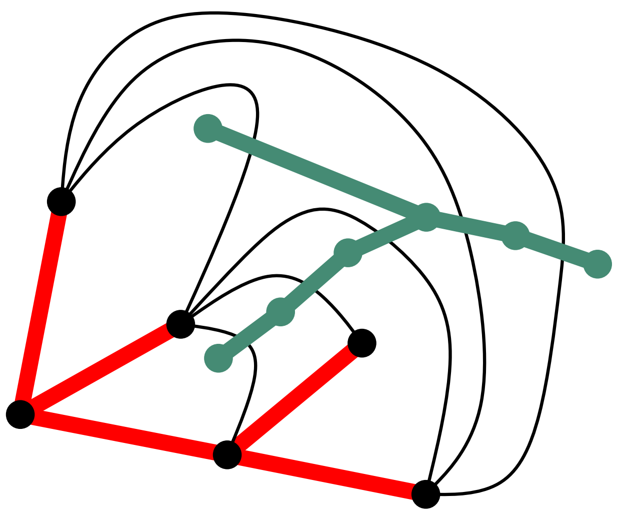


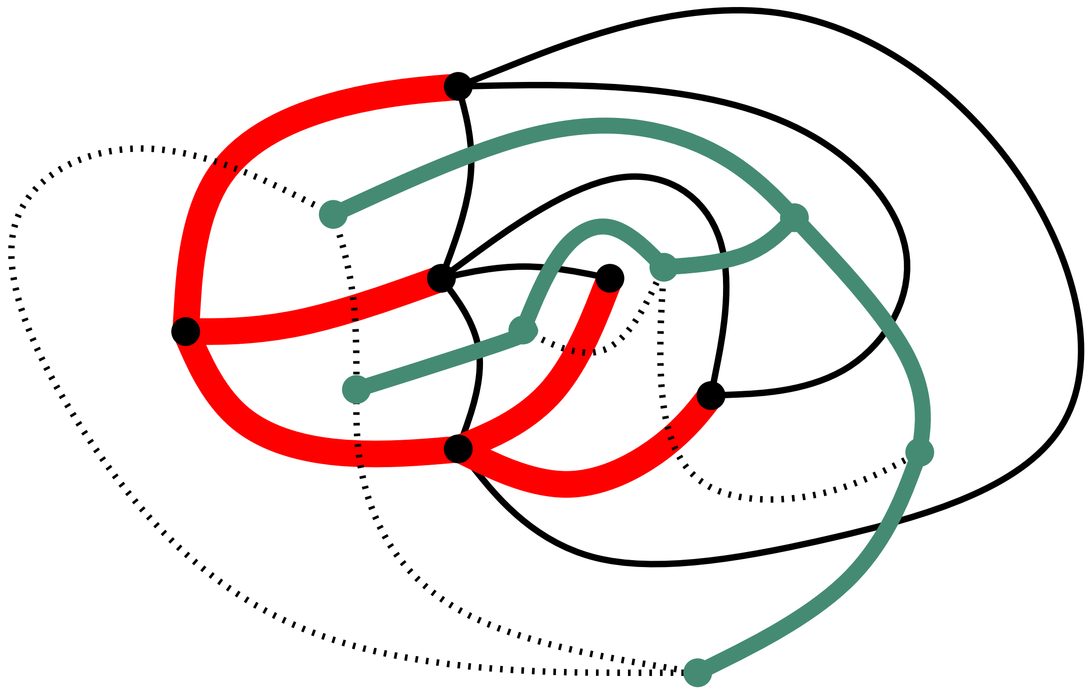


Arbres couvrants et dualité

La carte est obtenue par le recollement bord à bord de l'arbre couvrant et de l'arbre couvrant dual :

Le nombre de cartes munies d'un arbre couvrant à n arêtes est égal à : $$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} Cat(k) Cat(n-k) = Cat(n) Cat(n+1)$$





Arbres couvrants et dualité

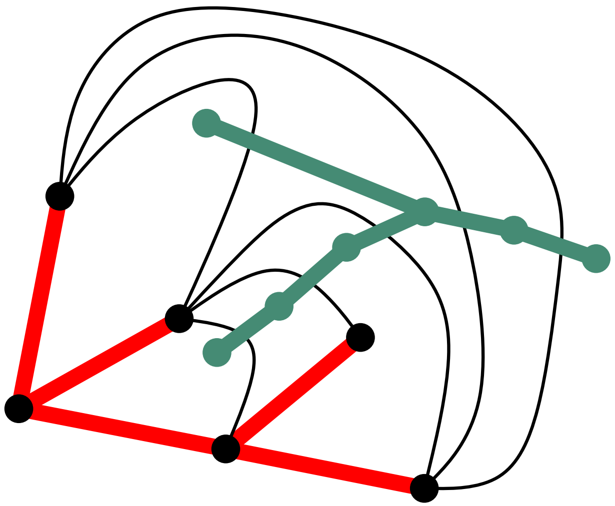
La carte est obtenue par le recollement bord à bord de l'arbre couvrant et de l'arbre couvrant dual :

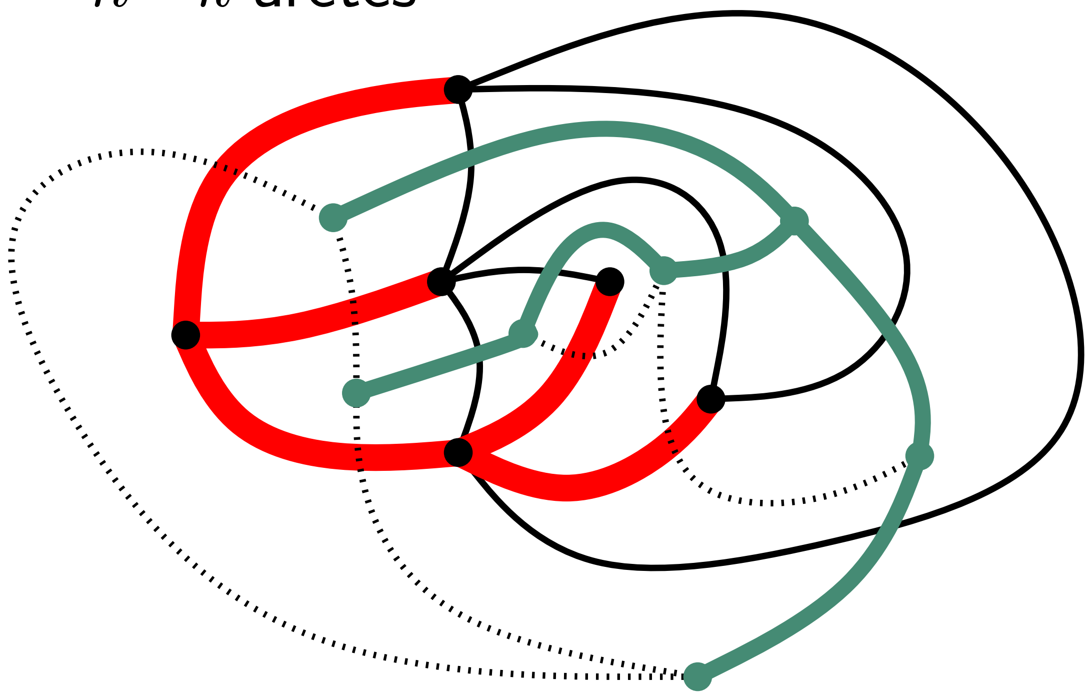
Le nombre de cartes munies d'un arbre couvrant à n arêtes est égal à :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} Cat(k) Cat(n-k) = Cat(n) Cat(n+1)$$

arbre couvrant,
k arêtes

arbre dual,
$n-k$ arêtes





Arbres couvrants et dualité

La carte est obtenue par le recollement bord à bord de l'arbre couvrant et de l'arbre couvrant dual :

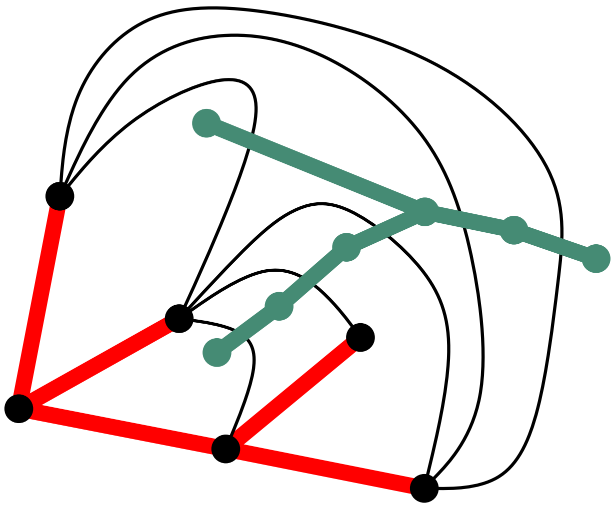
Le nombre de cartes munies d'un arbre couvrant à n arêtes est égal à :

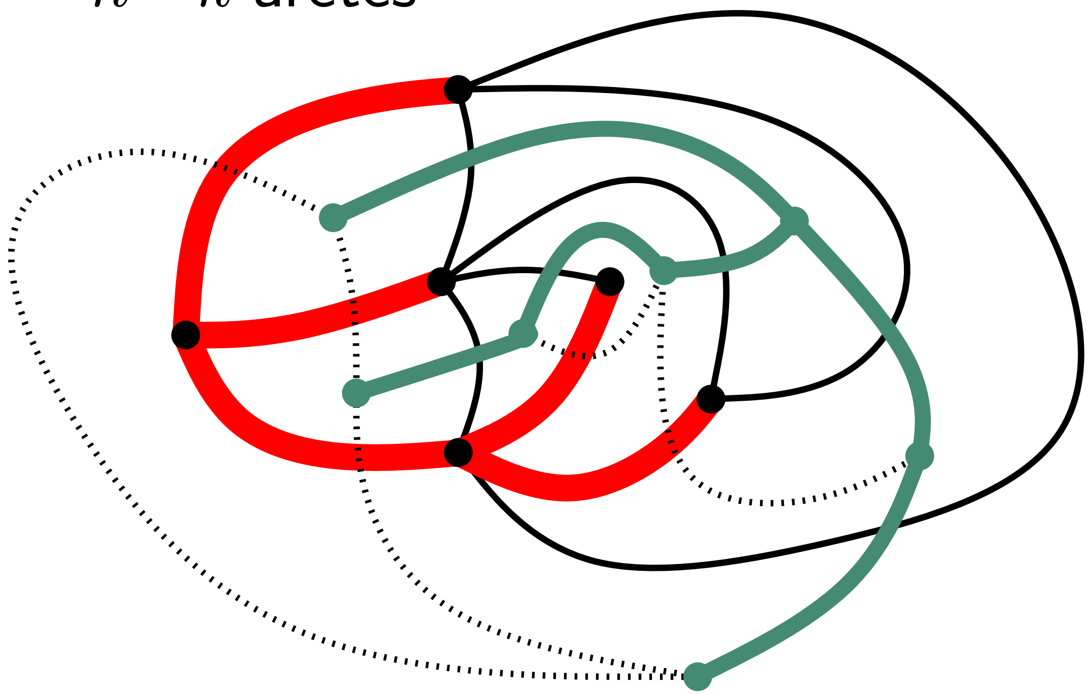
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} Cat(k) Cat(n-k) = Cat(n) Cat(n+1)$$

"mélange" des deux bords

arbre couvrant, k arêtes

arbre dual, $n-k$ arêtes





Arbres couvrants et dualité

La carte est obtenue par le recollement bord à bord de l'arbre couvrant et de l'arbre couvrant dual :

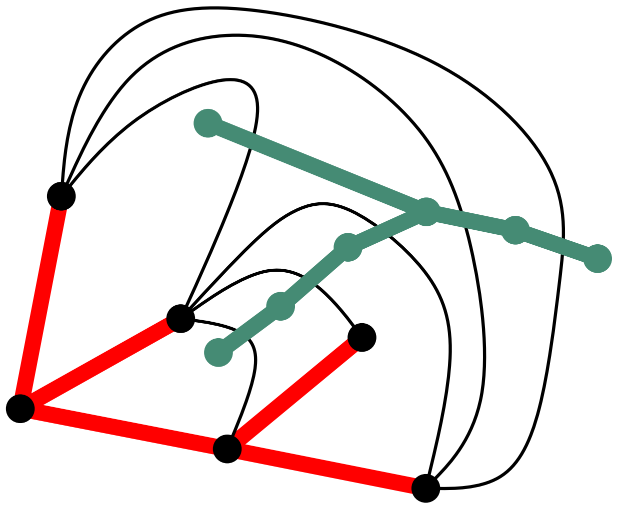
Le nombre de cartes munies d'un arbre couvrant à n arêtes est égal à :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} Cat(k) Cat(n-k) = \boxed{Cat(n)Cat(n+1)}$$

"mélange" des deux bords

arbre couvrant, k arêtes

arbre dual, $n-k$ arêtes

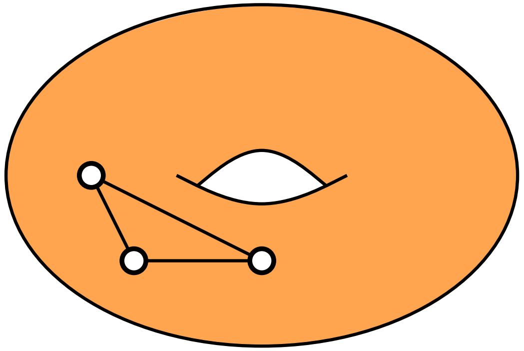


La bijection d'Olivier Bernardi explique ça très bien.

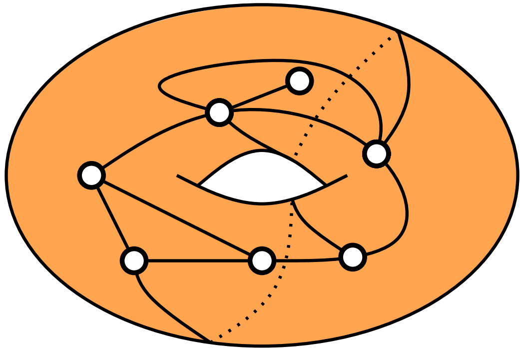
Carte de genre supérieur

Une carte de genre g est un graphe dessiné sur le tore à g anses, sans croisements d'arêtes.
On demande en plus que les faces soient simplement connexes.

Exemples :



pas une carte

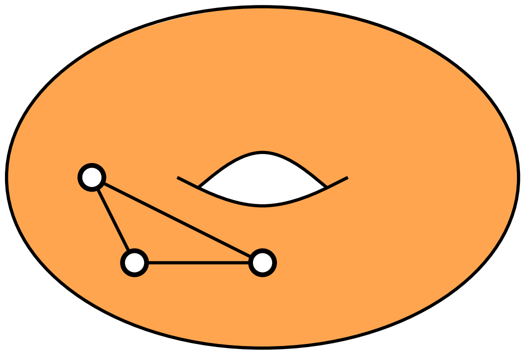


carte de genre 1

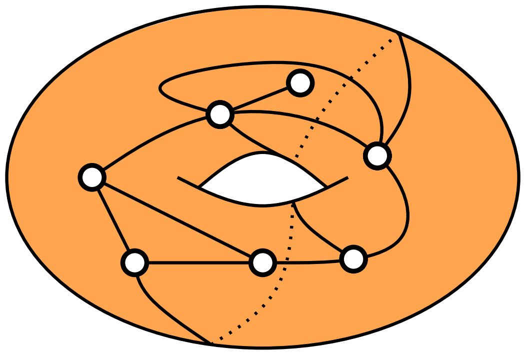
Carte de genre supérieur

Une carte de genre g est un graphe dessiné sur le tore à g anses, sans croisements d'arêtes.
On demande en plus que les faces soient simplement connexes.

Exemples :

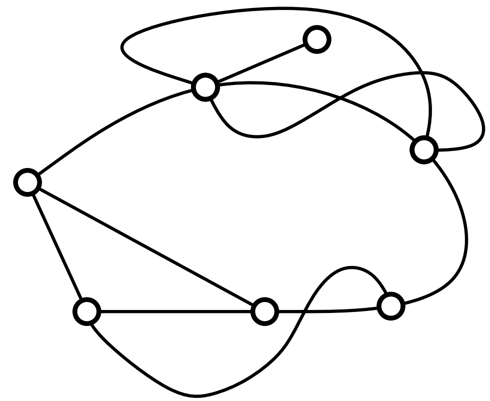


pas une carte



carte de genre 1

$=$



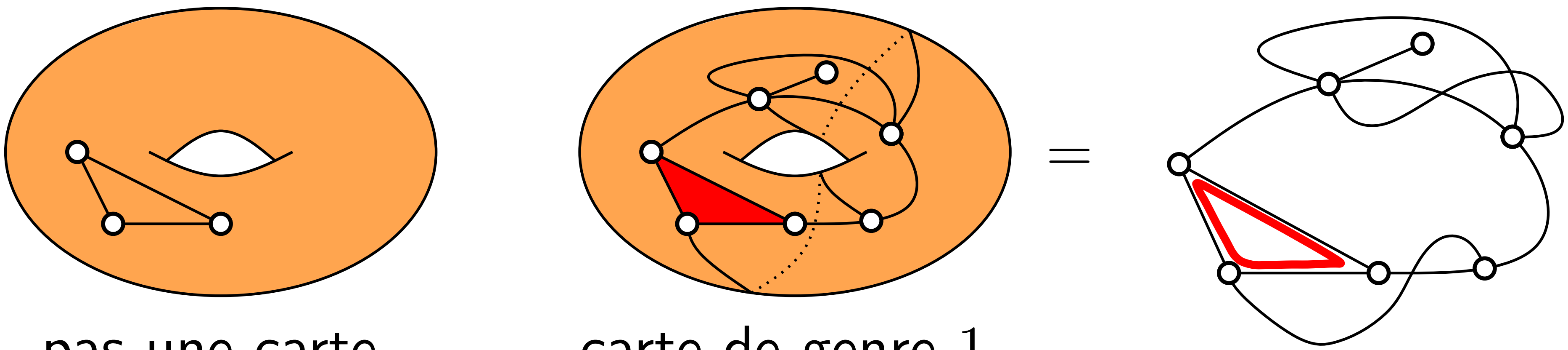
Une carte est la même chose qu'un graphe muni d'un système de rotation, i.e. d'un ordre cyclique des arêtes autour de chaque sommet.

(pas besoin de dessiner la surface).

Carte de genre supérieur

Une carte de genre g est un graphe dessiné sur le tore à g anses, sans croisements d'arêtes.
On demande en plus que les faces soient simplement connexes.

Exemples :



pas une carte

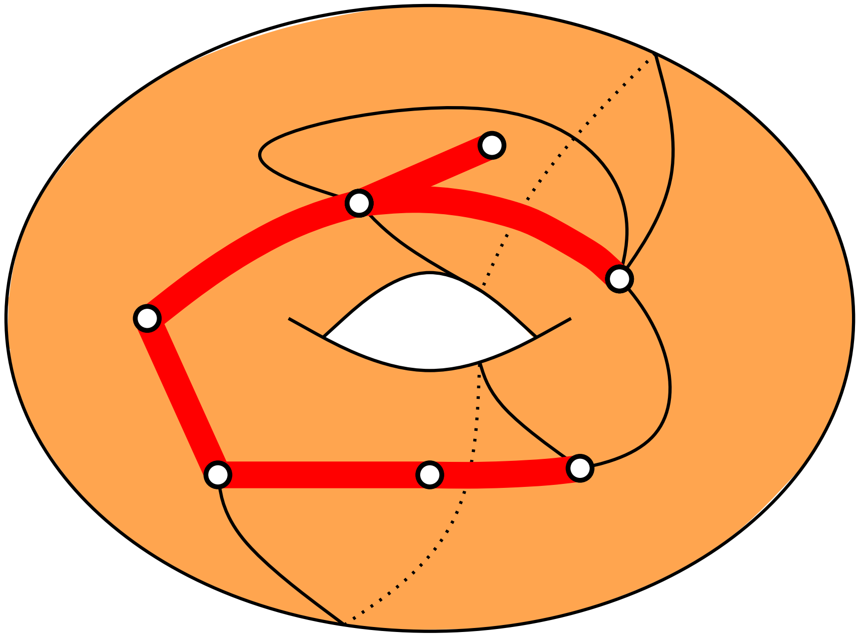
carte de genre 1

Une carte est la même chose qu'un graphe muni d'un système de rotation, i.e. d'un ordre cyclique des arêtes autour de chaque sommet.

(pas besoin de dessiner la surface).

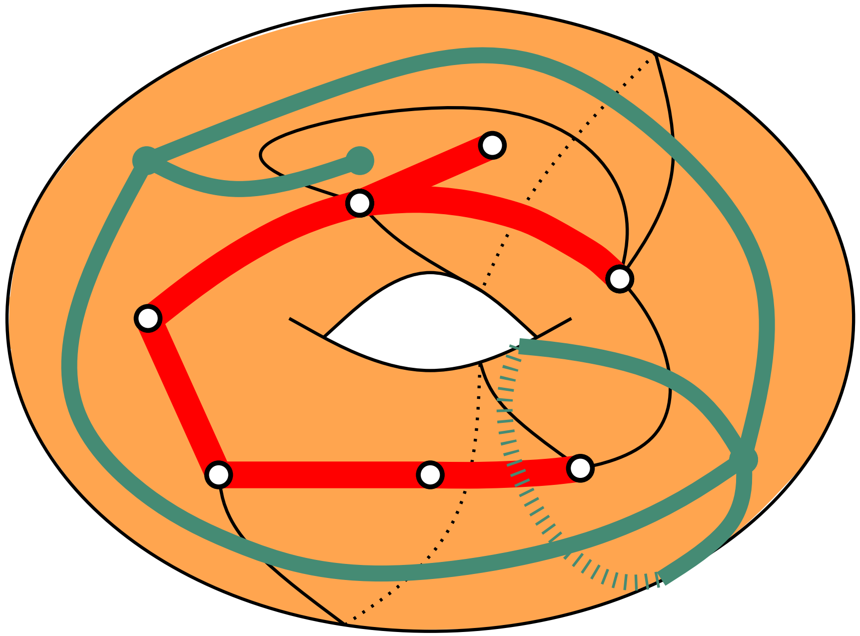
Arbre couvrant dual : ça ne marche plus.

Sur une carte de genre $g > 0$, le dual d'un arbre couvrant n'est pas un arbre couvrant...



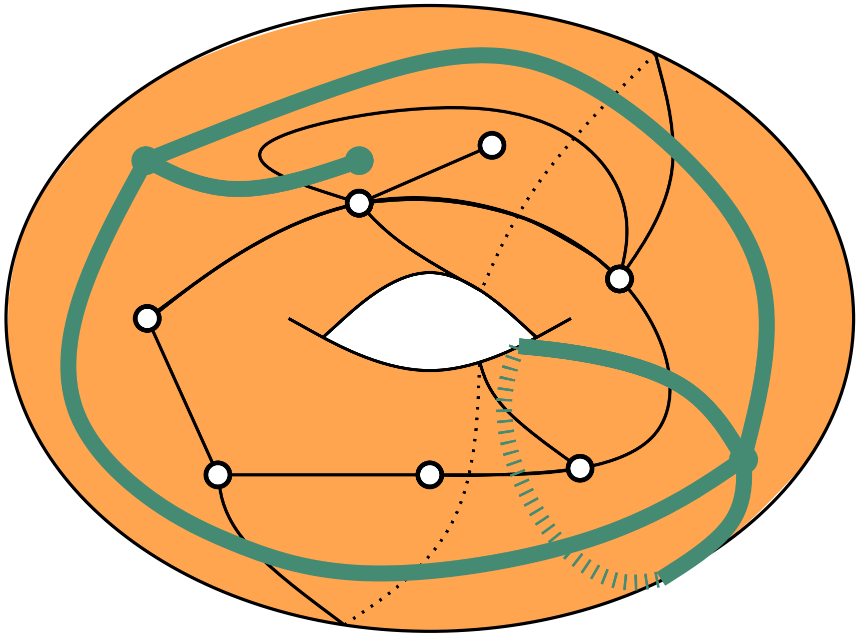
Arbre couvrant dual : ça ne marche plus.

Sur une carte de genre $g > 0$, le dual d'un arbre couvrant n'est pas un arbre couvrant...



Arbre couvrant dual : ça ne marche plus.

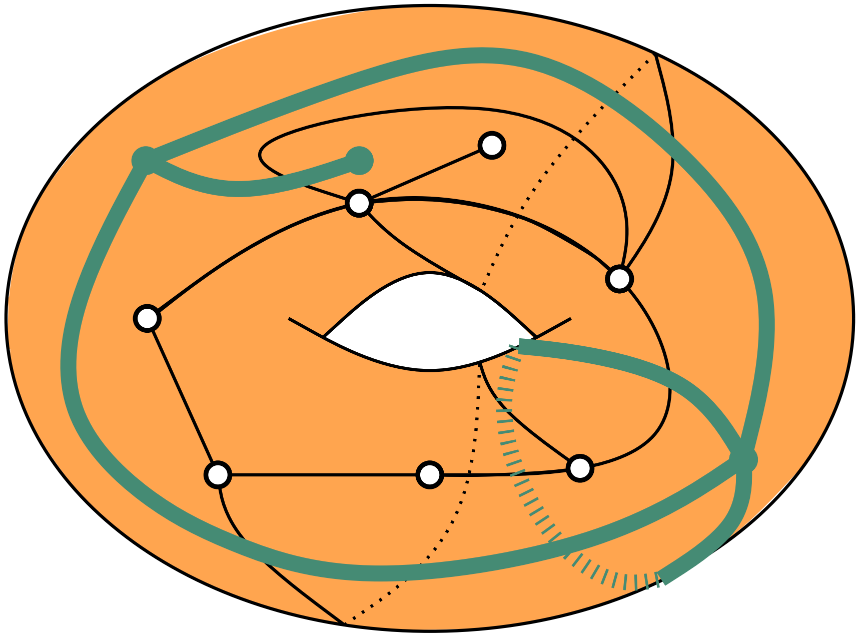
Sur une carte de genre $g > 0$, le dual d'un arbre couvrant n'est pas un arbre couvrant...



...mais une carte de genre g à une seule face.

Arbre couvrant dual : ça ne marche plus.

Sur une carte de genre $g > 0$, le dual d'un arbre couvrant n'est pas un arbre couvrant...

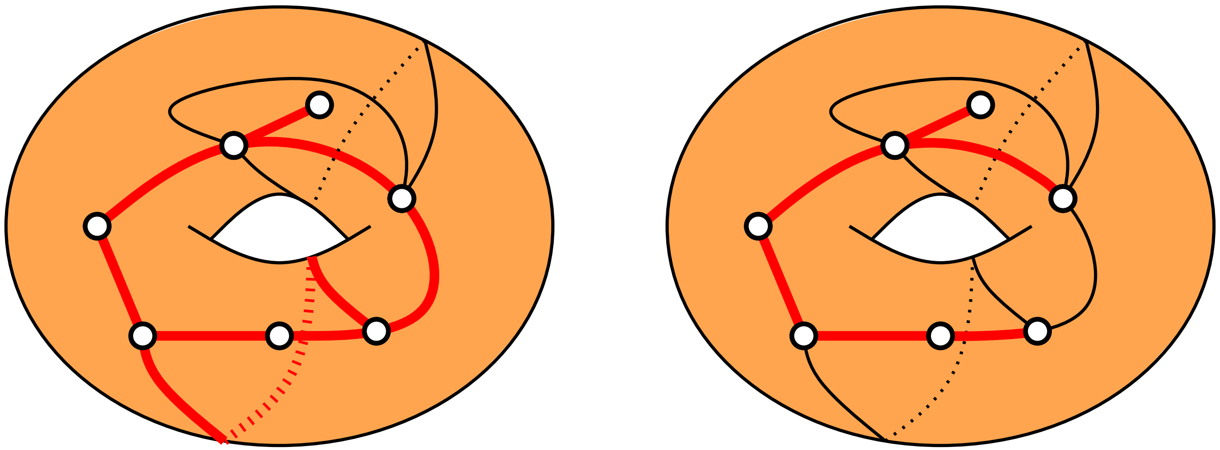


...mais une carte de genre g à une seule face.

La notion d'arbre couvrant n'est pas stable par dualité !

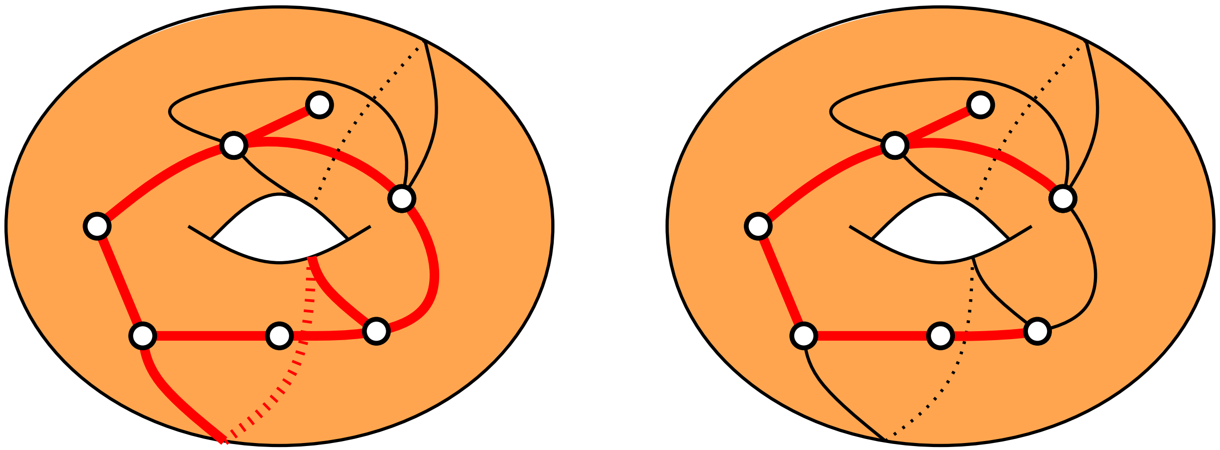
Rétablissons la dualité :

Une carte couverte est une carte munie d'une sous-carte couvrante qui a elle-même une seule face.

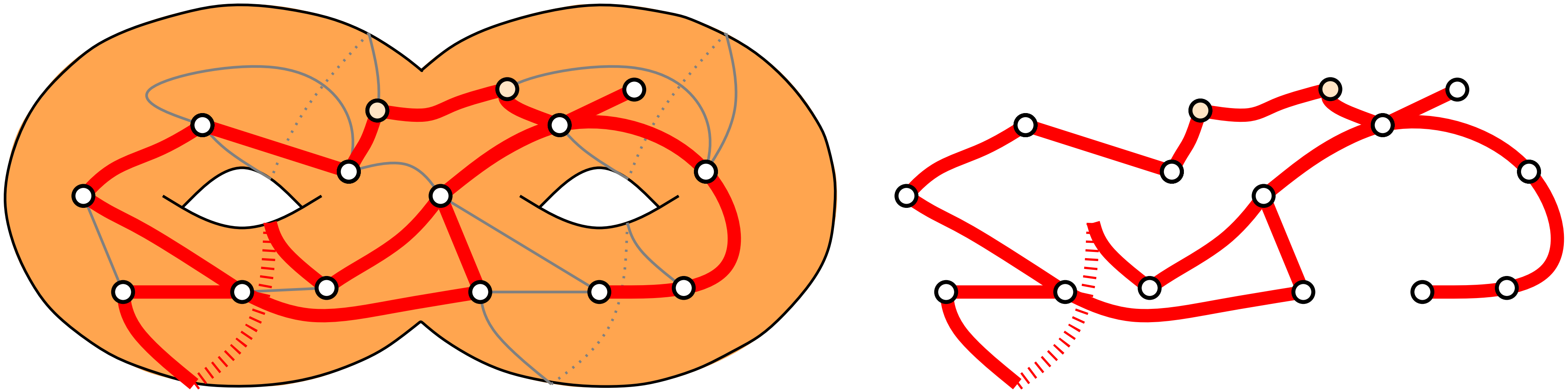


Rétablissons la dualité :

Une carte couverte est une carte munie d'une sous-carte couvrante qui a elle-même une seule face.



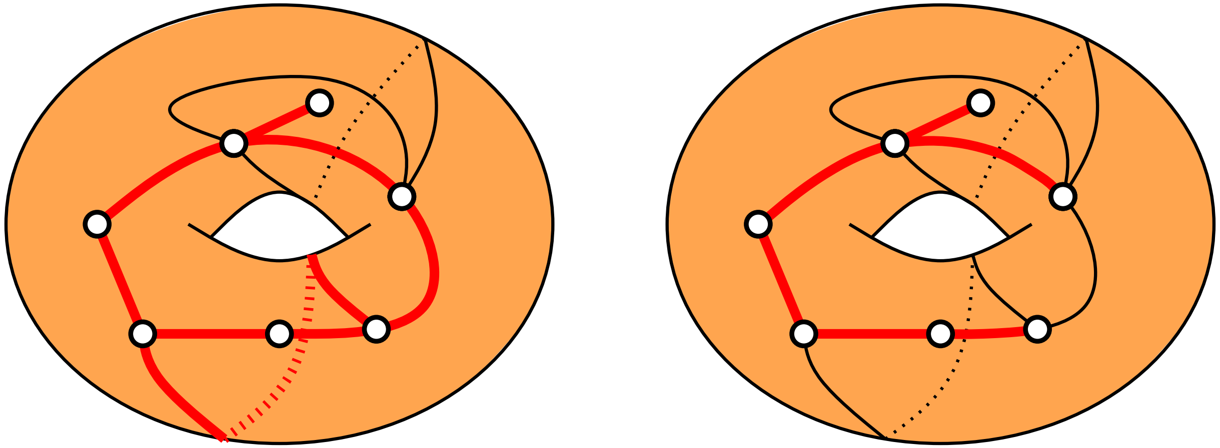
Le genre g_1 de la sous-carte est compris entre 0 et g.



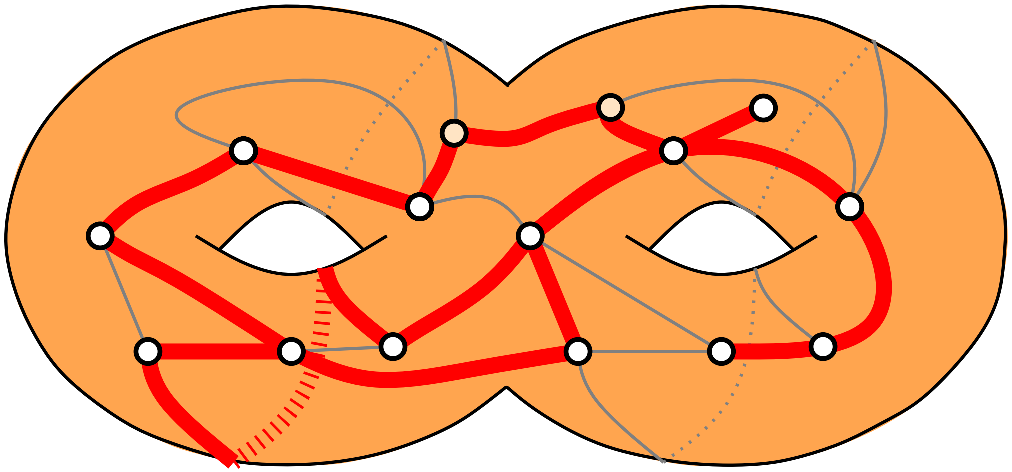
carte de genre 2 sous-carte de genre 1

Rétablissons la dualité :

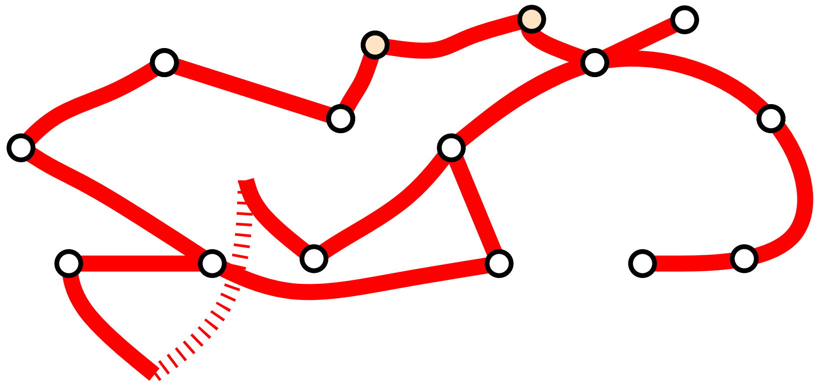
Une carte couverte est une carte munie d'une sous-carte couvrante qui a elle-même une seule face.



Le genre g_1 de la sous-carte est compris entre 0 et g.



carte de genre 2



sous-carte de genre 1

Rétablissons la dualité :

Une carte couverte est une carte munie d'une sous-carte couvrante qui a elle-même une seule face.

Une carte couverte est formée par le recollement bord à bord d'une carte à une face de genre g_1, et d'une carte à une face de genre g_2, avec $g_1 + g_2 = g$.

Rétablissons la dualité :

Une carte couverte est une carte munie d'une sous-carte couvrante qui a elle-même une seule face.

Une carte couverte est formée par le recollement bord à bord d'une carte à une face de genre g_1, et d'une carte à une face de genre g_2, avec $g_1 + g_2 = g$.

Fait 1 : les cartes couvertes sont stables par dualité.

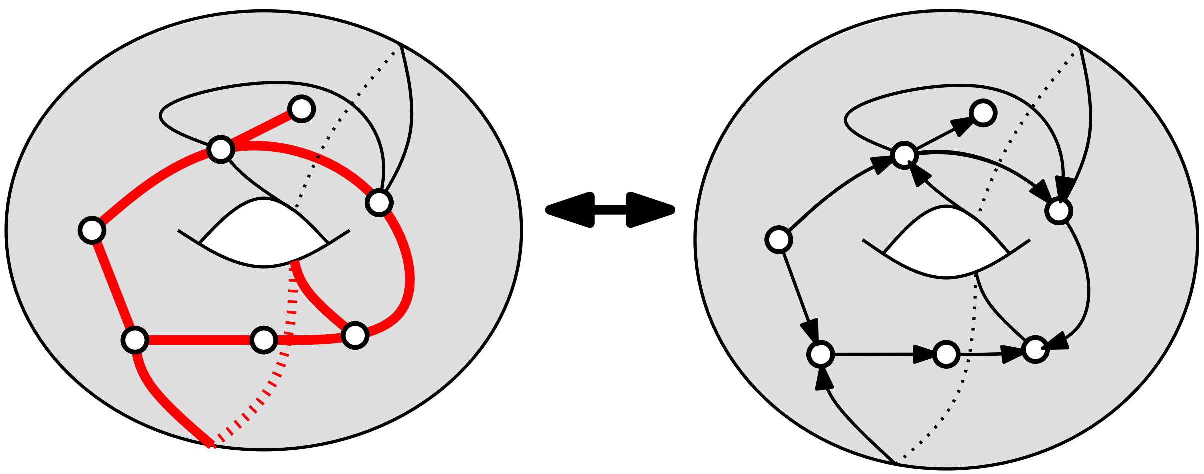
Fait 2 : les cartes couvertes sont de bons objets.

Les bonnes propriétés des arbres couvrants dans le cas planaire sont en fait des propriétés des cartes couvertes.

La bijection d'Olivier Bernardi se généralise dans ce cadre.

Théorème :

Les cartes couvertes sont en bijection avec certaines cartes orientées appelées orientations gauches.



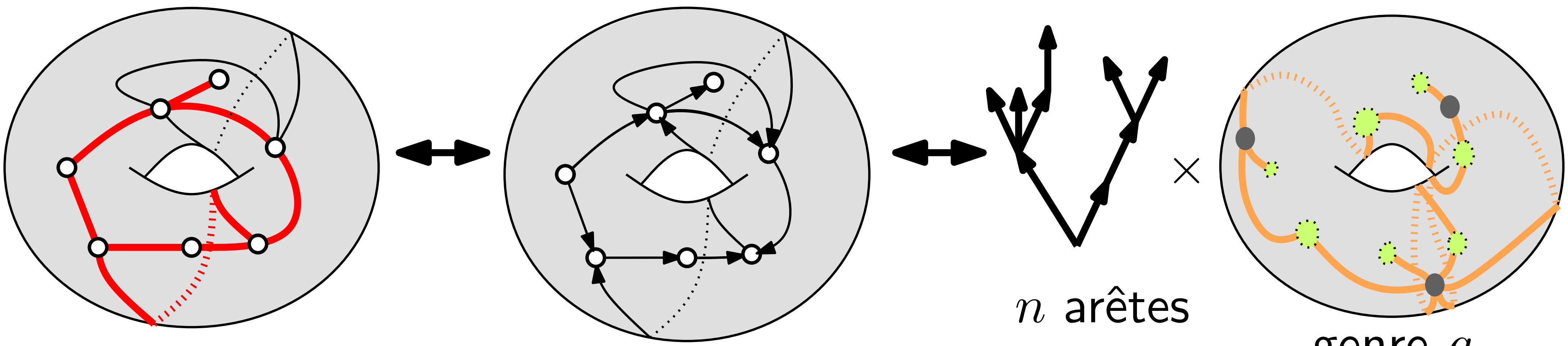
cartes couvertes
genre g,
n arêtes

orientations gauches
genre g,
n arêtes

Théorème :

Les cartes couvertes sont en bijection avec certaines cartes orientées appelées orientations gauches.

Ces orientations sont elles-mêmes en bijection avec des paires (t, m), où : t est un arbre plan ;
m est une carte à une face bipartie de genre g.



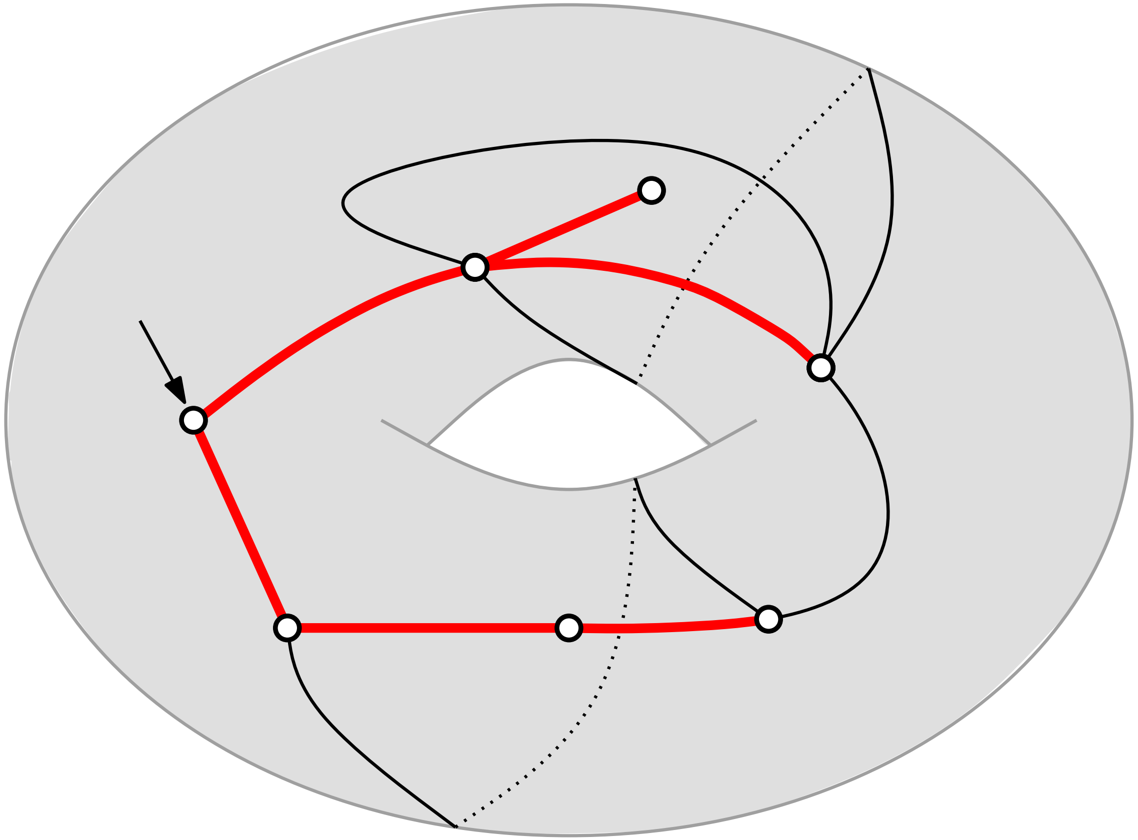
cartes couvertes
genre g,
n arêtes

orientations gauches
genre g,
n arêtes

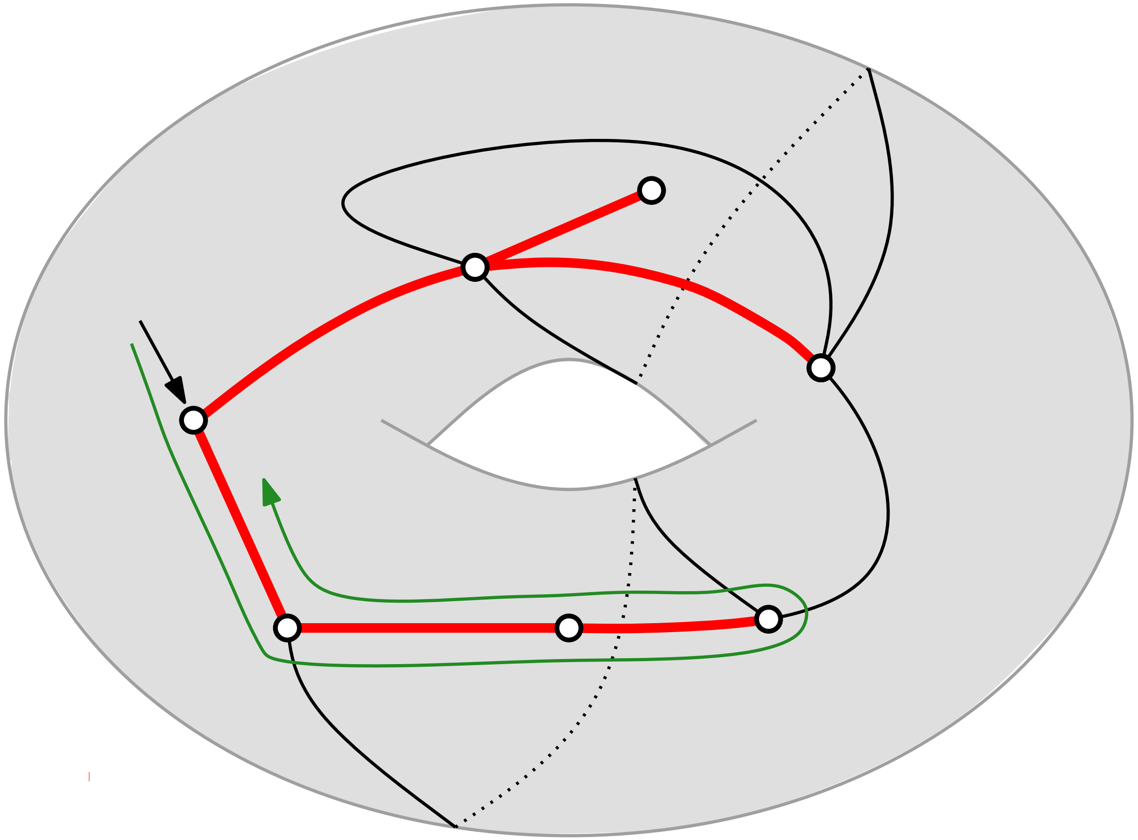
n arêtes

genre g,
$n+1$ arêtes,
1 face

Les orientations gauches.



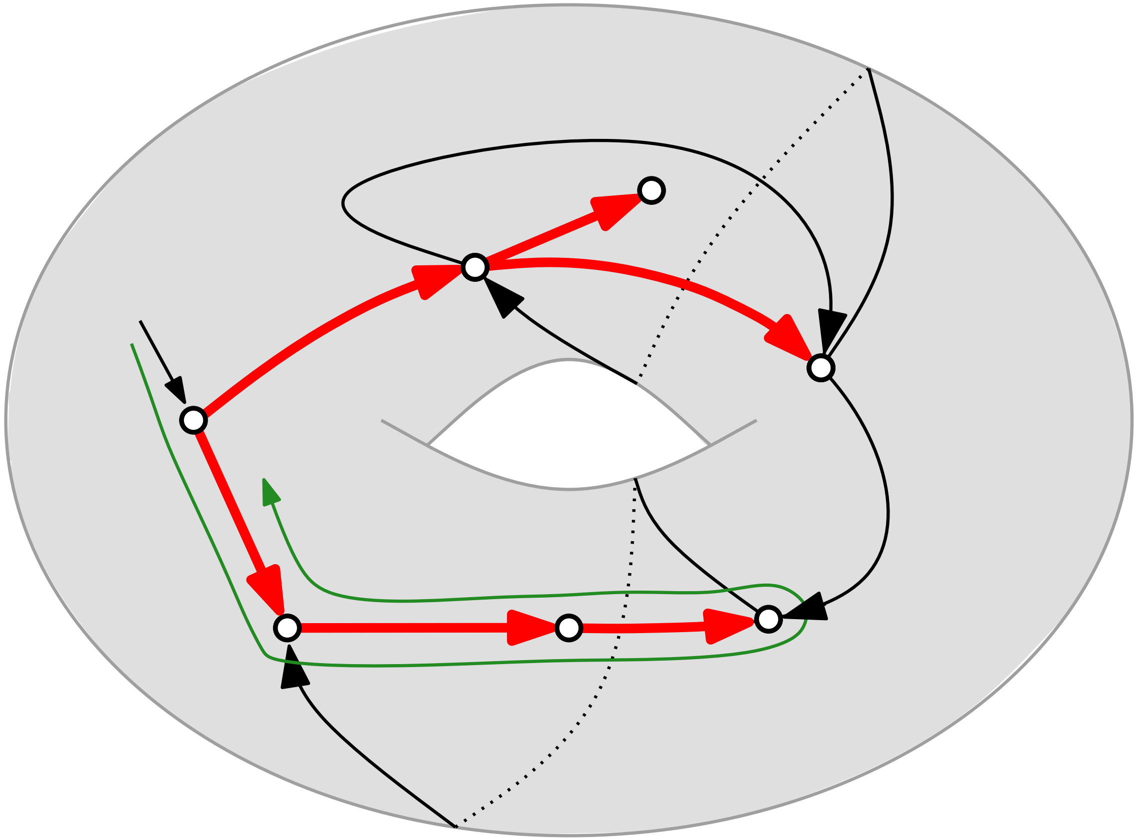
Les orientations gauches.



On fait le tour de la sous-carte, et on oriente les arêtes :

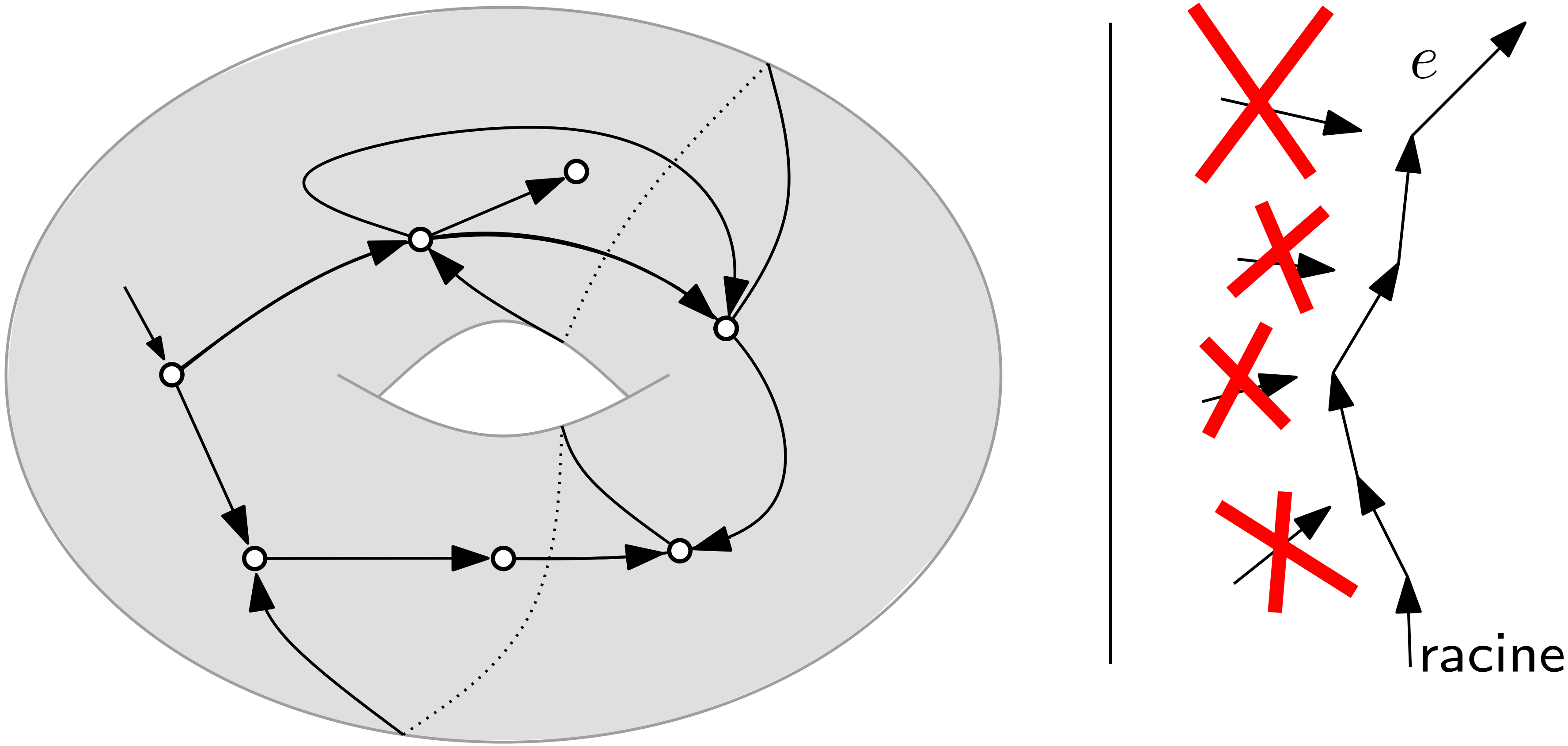
- rouges comme on les emprunte pour la première fois
- noires de sorte à croiser leur tête avant leur queue.

Les orientations gauches.



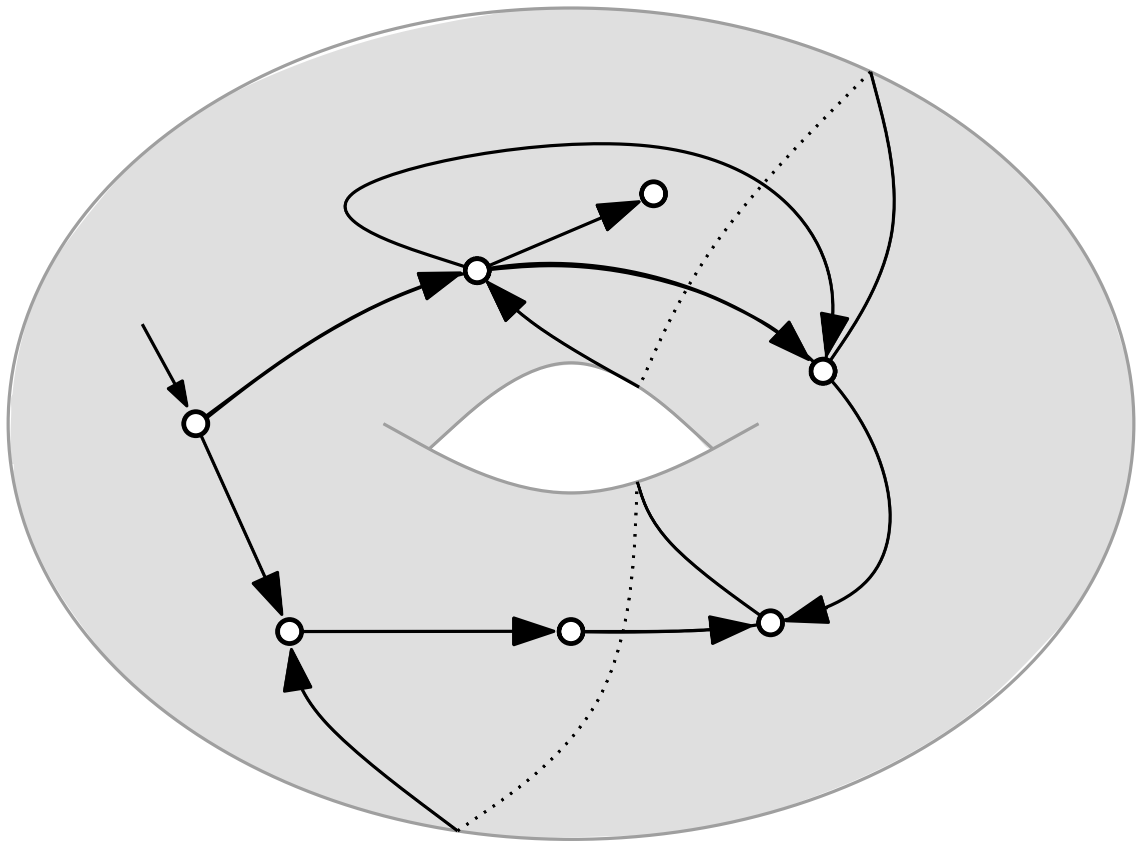
On fait le tour de la sous-carte, et on oriente les arêtes :
- rouges comme on les emprunte pour la première fois
- noires de sorte à croiser leur tête avant leur queue.

Les orientations gauches.

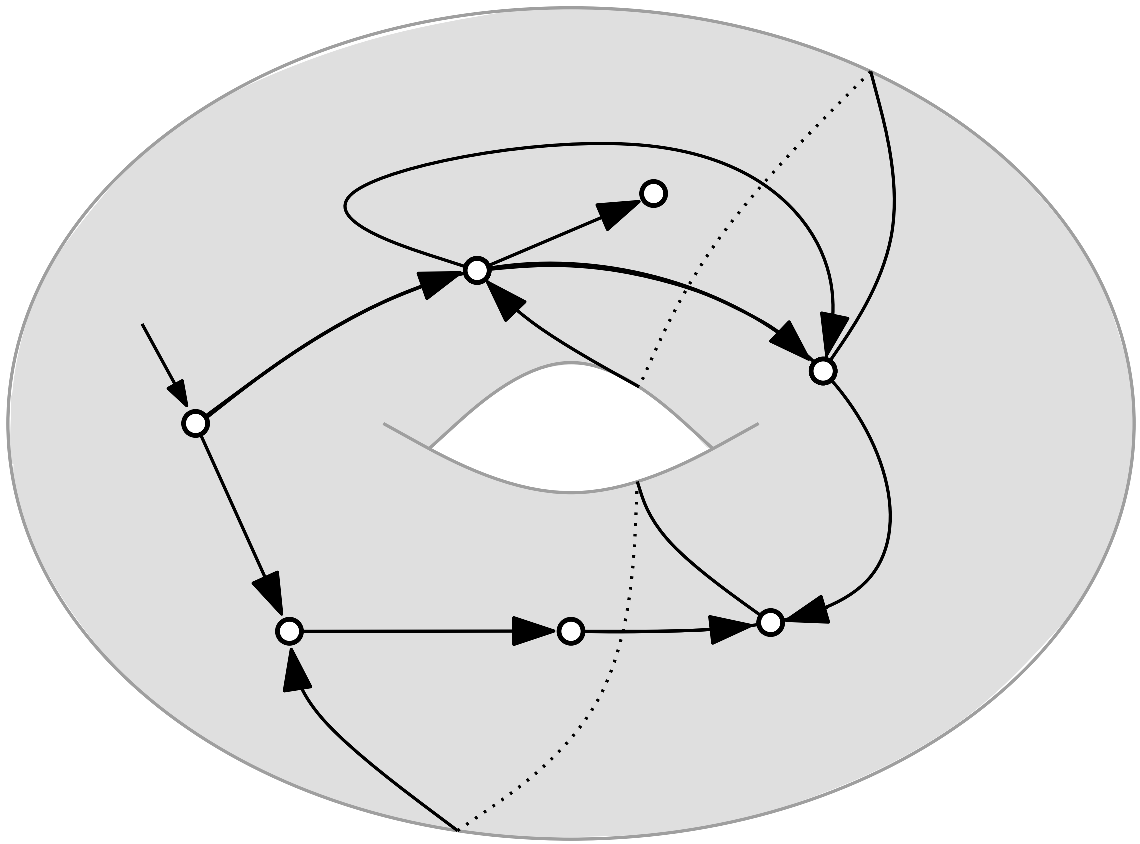


On obtient une orientation gauche : chaque arête est l'extrémité d'un chemin gauche partant de la racine.

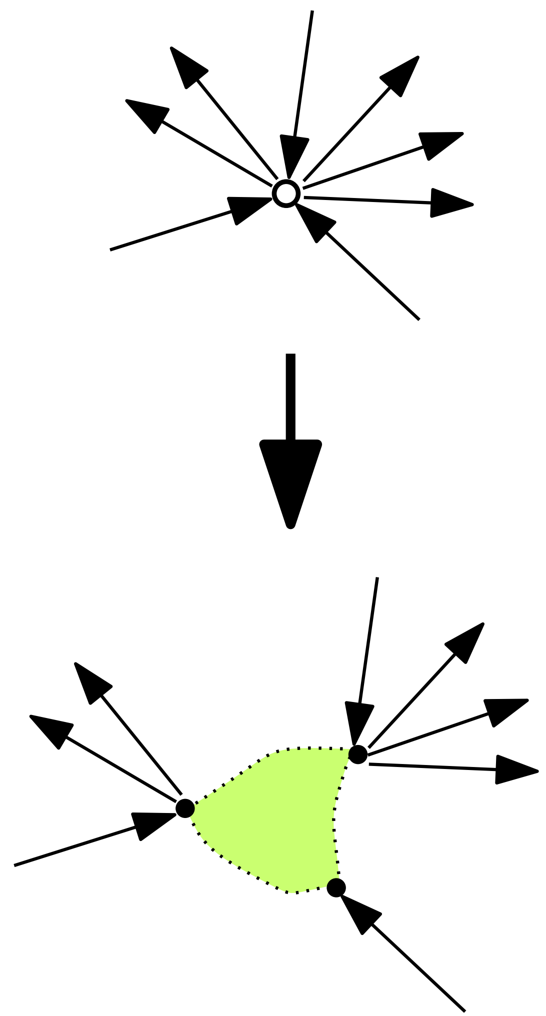
Un processus d'éclatement...



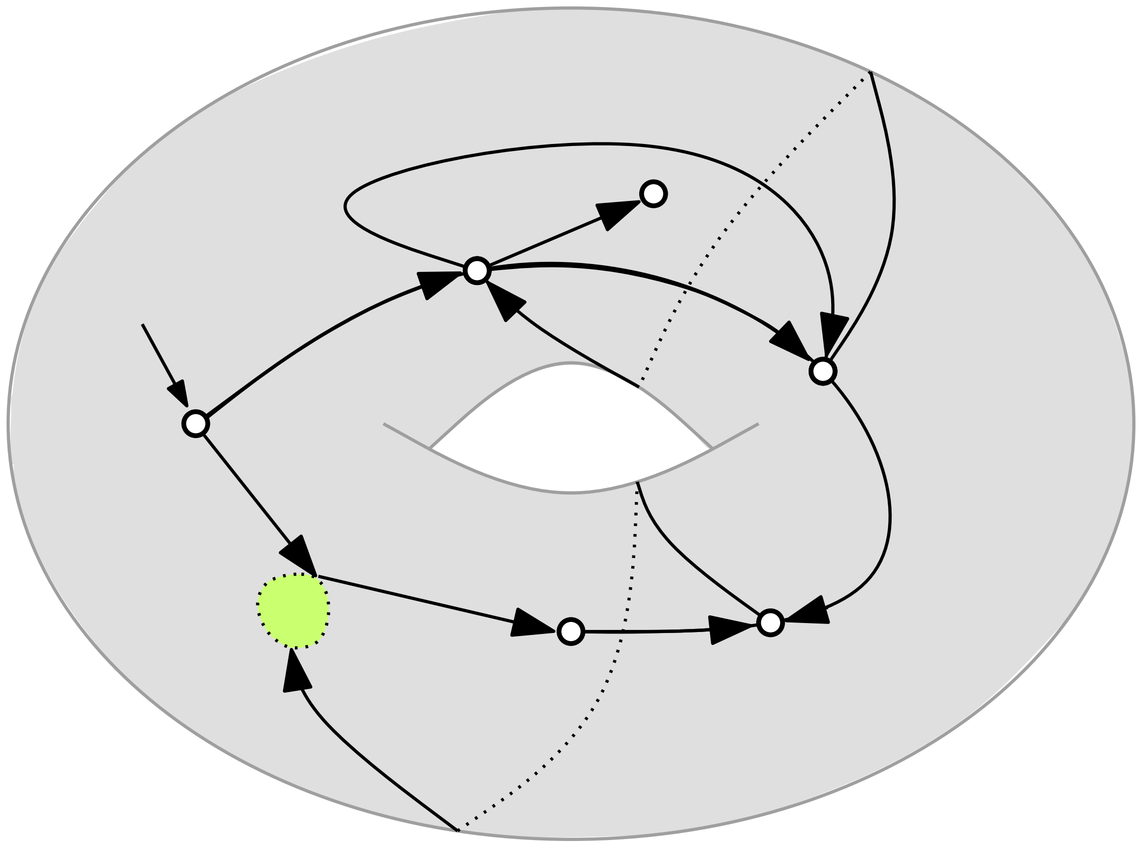
Un processus d'éclatement...



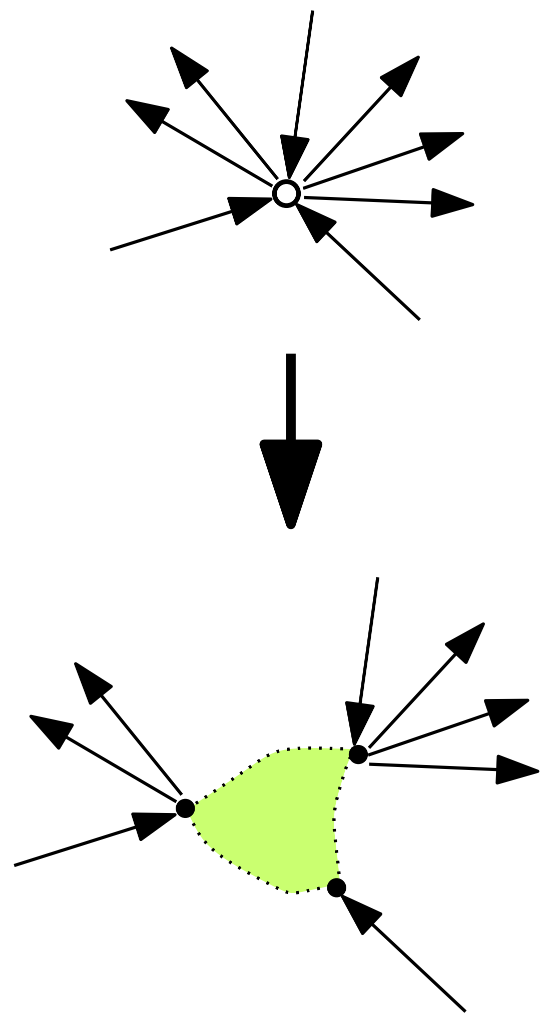
Éclatement d'un sommet :



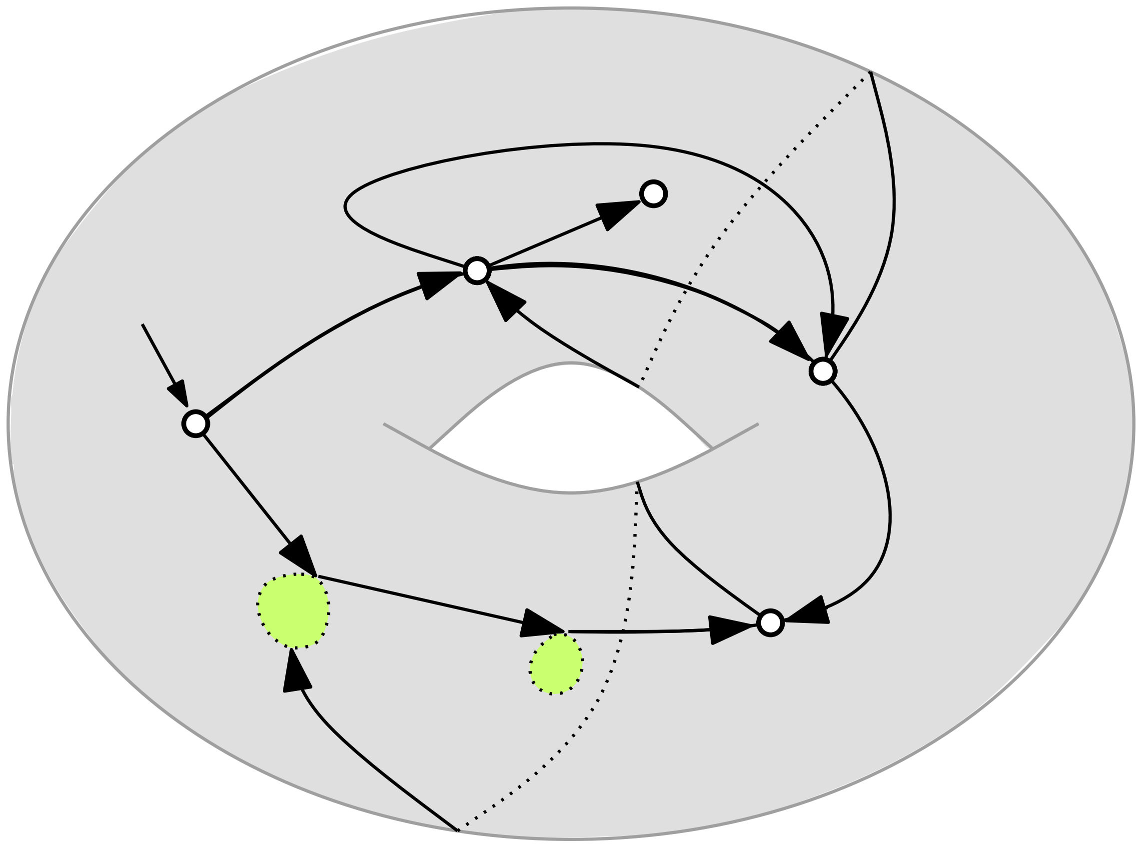
Un processus d'éclatement...



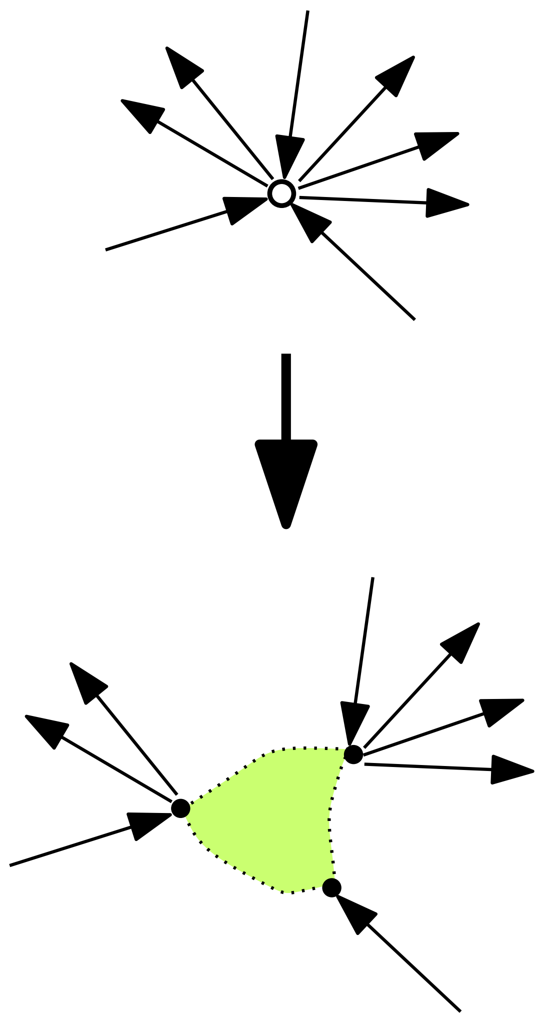
Éclatement d'un sommet :



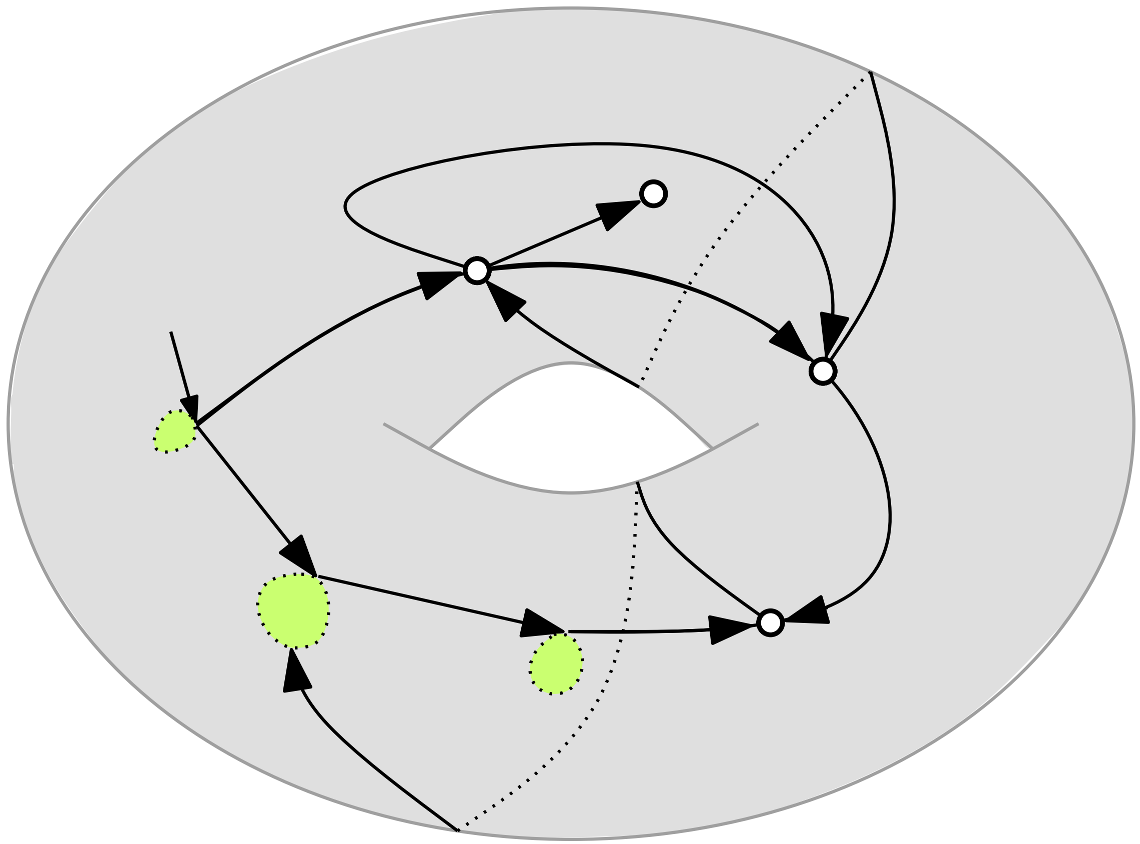
Un processus d'éclatement...



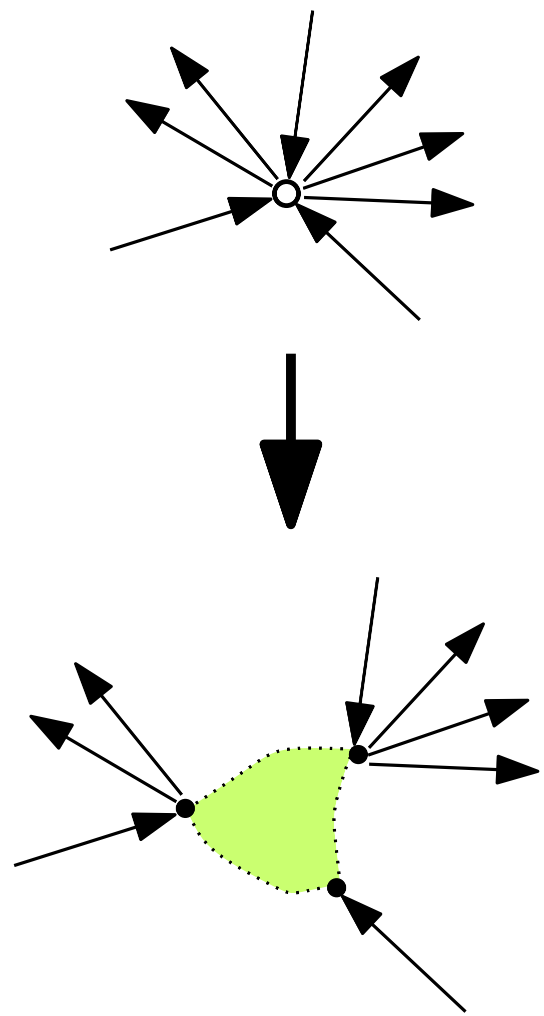
Éclatement d'un sommet :



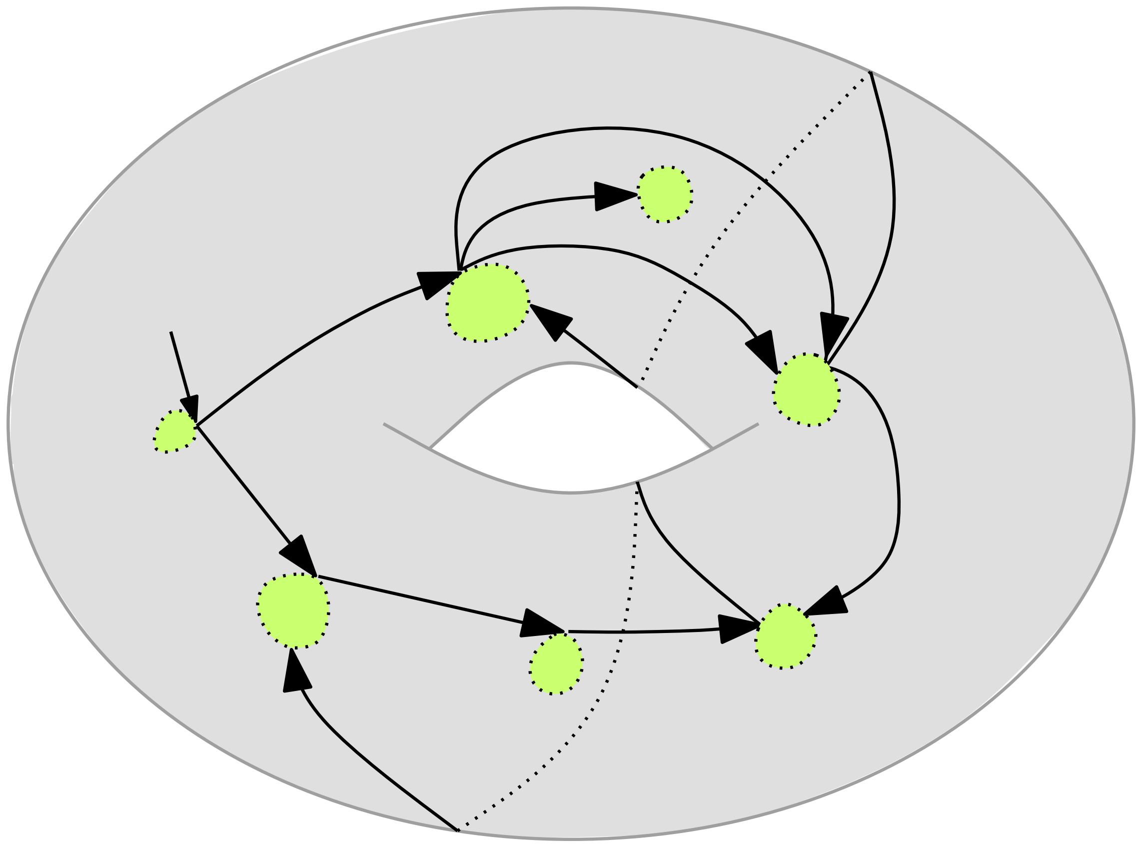
Un processus d'éclatement...



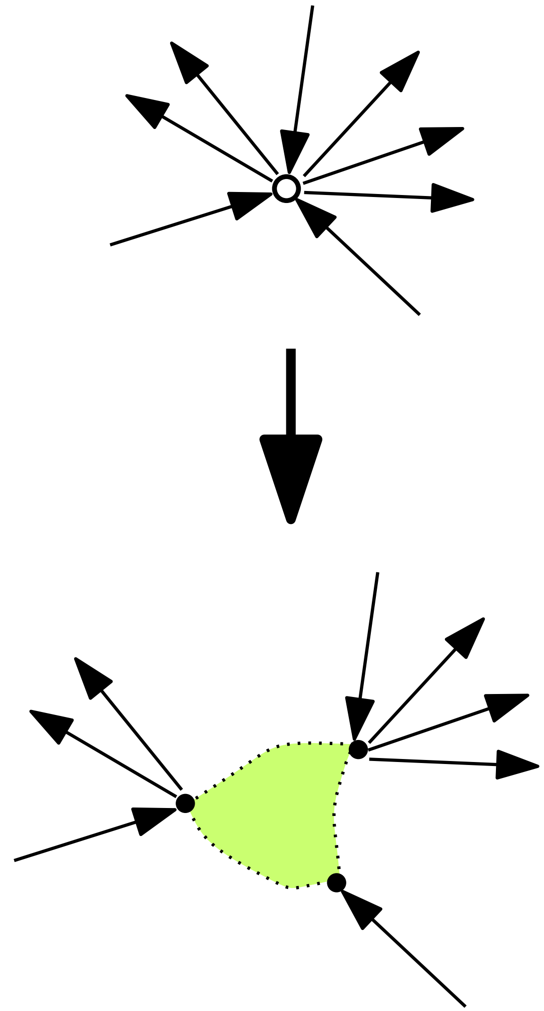
Éclatement d'un sommet :



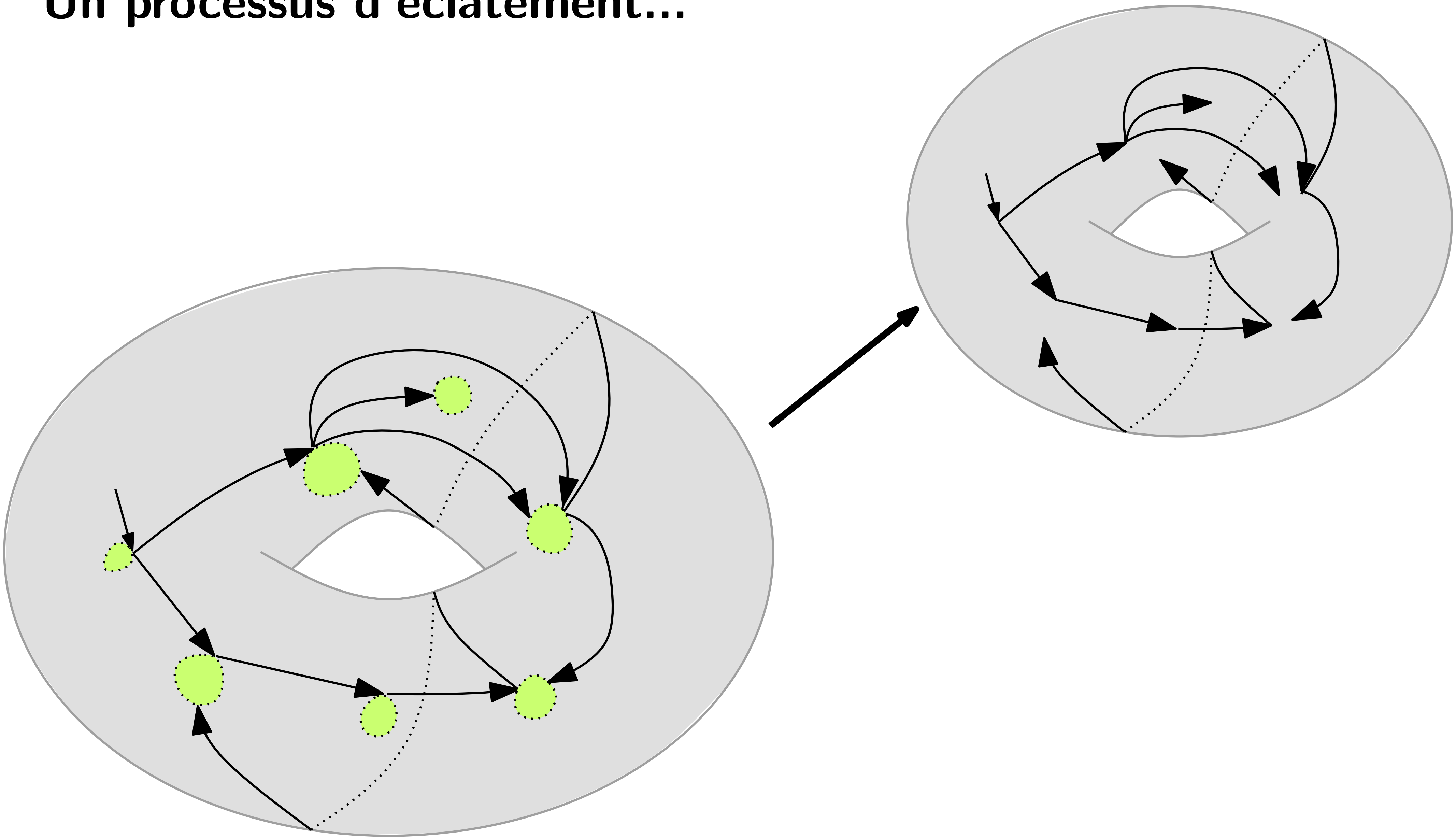
Un processus d'éclatement...



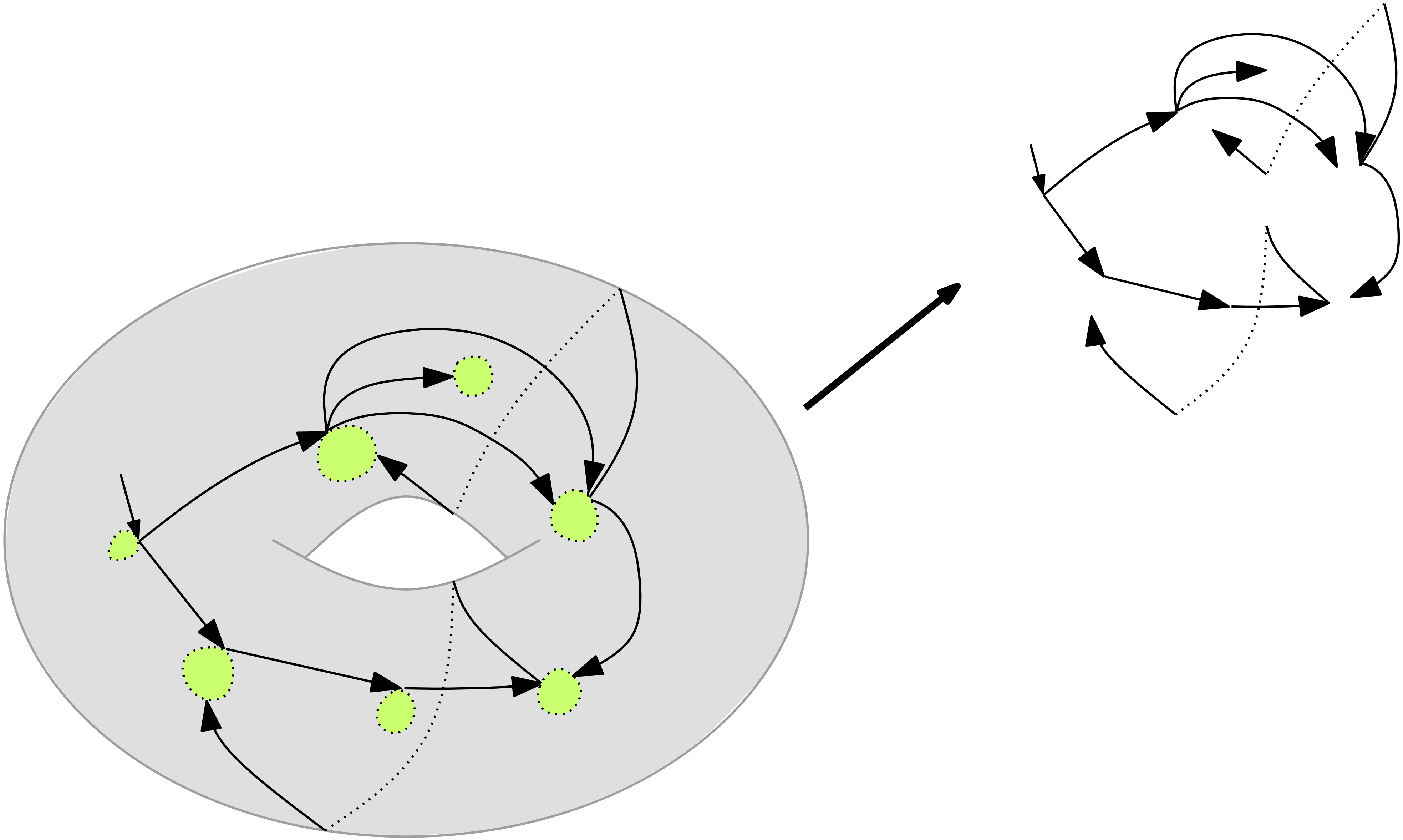
Éclatement d'un sommet :



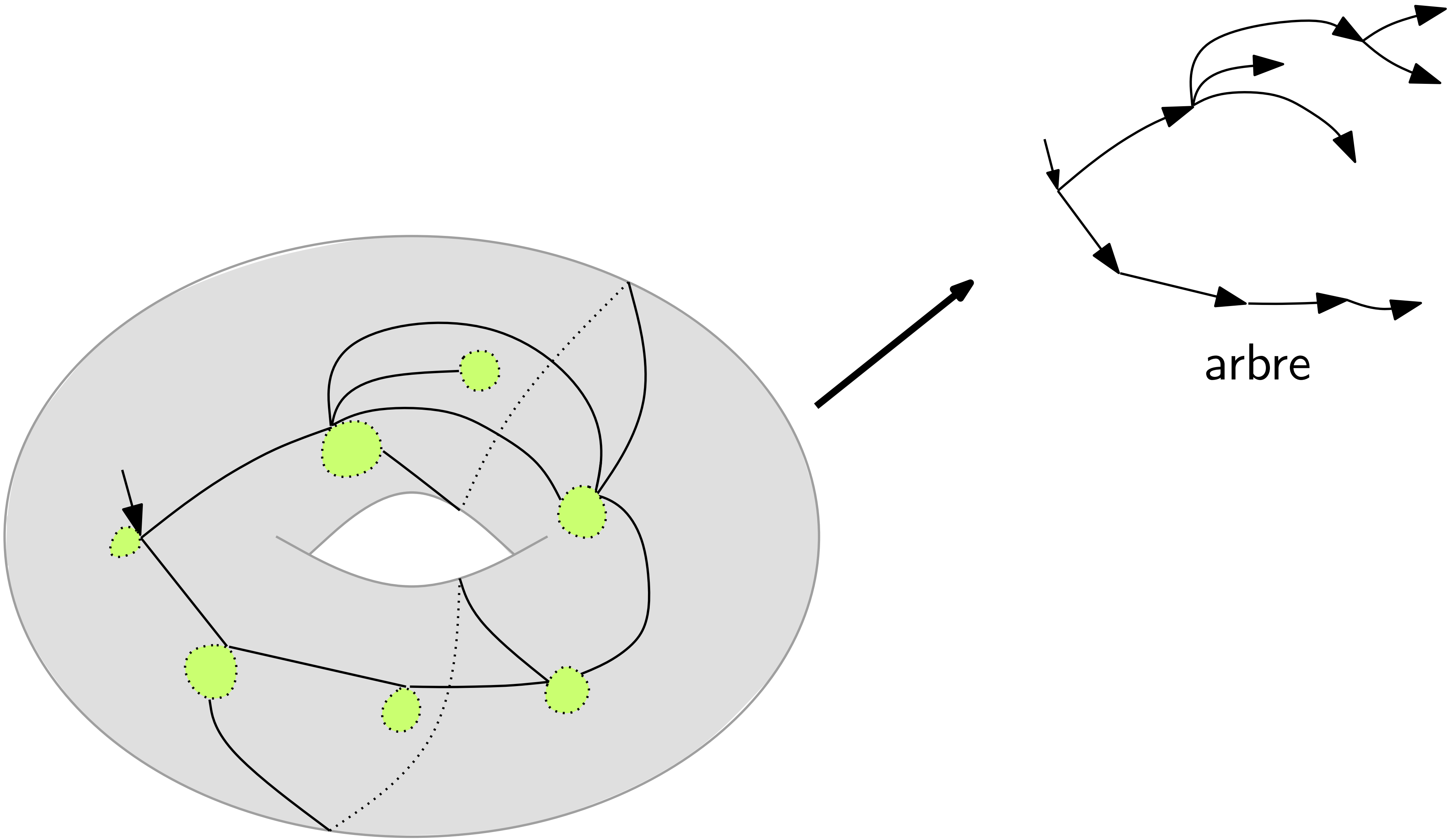
Un processus d'éclatement...



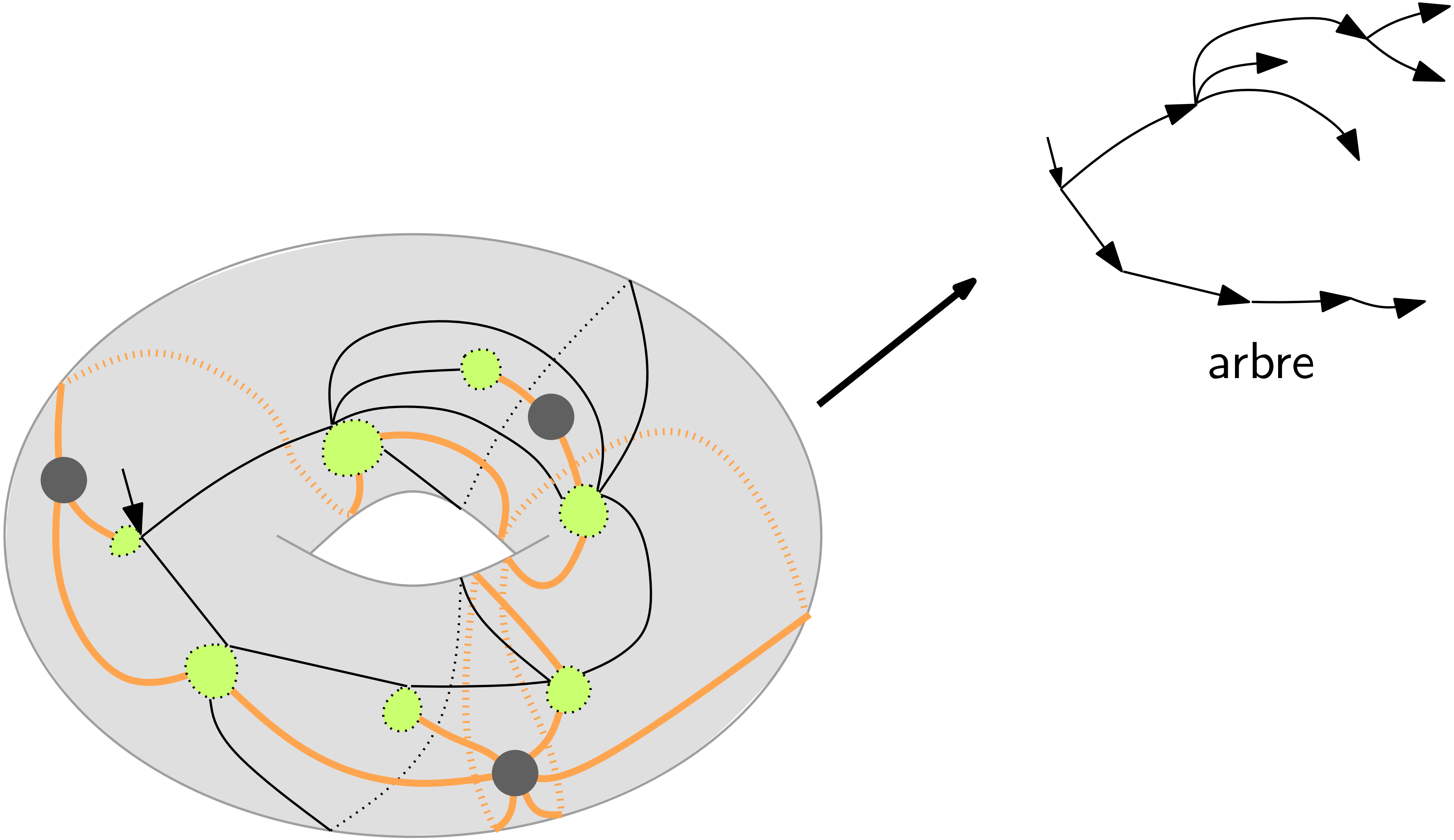
Un processus d'éclatement...



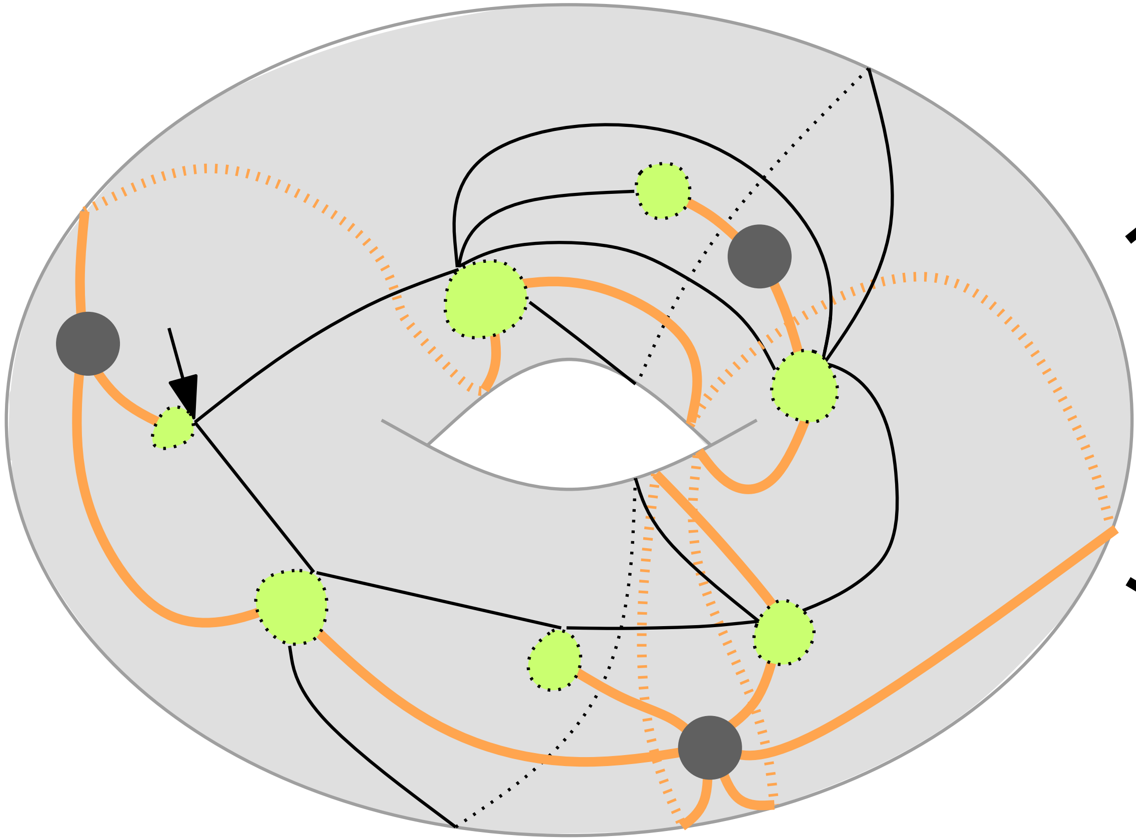
Un processus d'éclatement...

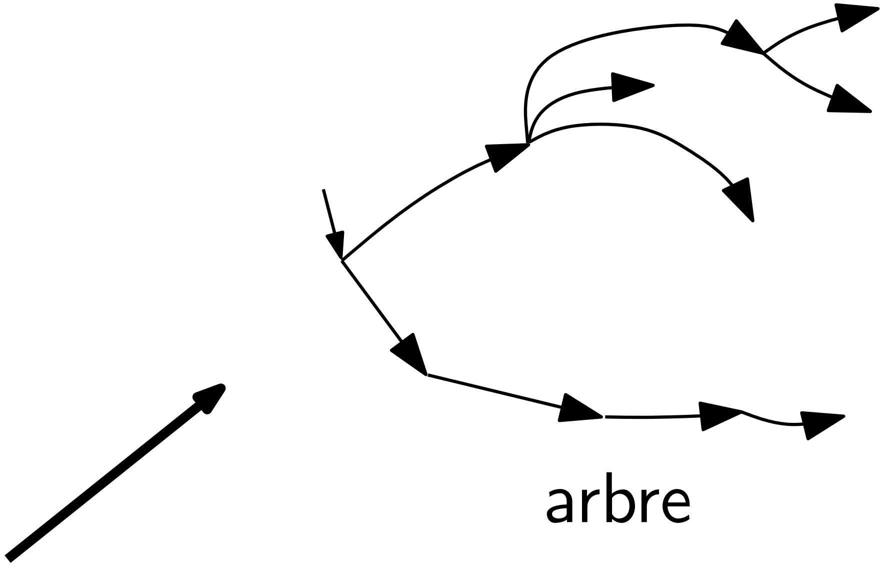


Un processus d'éclatement...

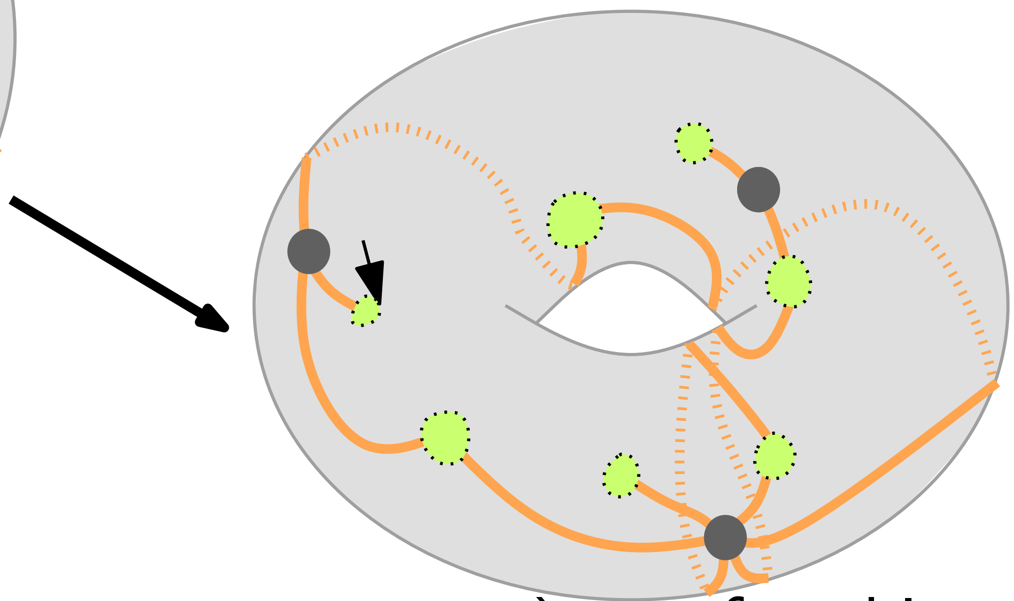


Un processus d'éclatement...





arbre



carte à une face bipartie

Conséquence :

Les cartes couvertes ont de jolies propriétés énumératives.

$$C_g(n) = \beta_g(n+1) \times Cat(n)$$

cartes couvertes de genre g à n arêtes

cartes à une face biparties à $n+1$ arêtes

nombres de Catalan (arbres plans à n arêtes)

$$C_0(n) = Cat(n) \times Cat(n+1)$$

$$C_1(n) = Cat(n) \times \frac{(2n-2)!}{12(n-1)!(n-3)!}$$

$$C_2(n) = Cat(n) \times \frac{(5n^2-7n+6)(2n-5)!}{720(n-3)!(n-5)!}$$

etc...

Les orientations gauches sont des objets mystérieux :

Dans le cas planaire, elles coïncident avec les orientations racine-accessibles sans cycle orienté dans le sens direct.

Ce sont les fameuses orientation minimales.

Les orientations gauches sont des objets mystérieux :

Dans le cas planaire, elles coïncident avec les orientations racine-accessibles sans cycle orienté dans le sens direct.

Ce sont les fameuses orientation minimales.

Problème ouvert : décrire la structure des orientations gauches de genre g.

Sorte de treillis mélangé à l'action du groupe fondamental ? ? ?

Essayer d'identifier celles qui donnent des arbres couvrants.

Motivation : la bijection pour l'ouverture des orientations gauches encapsule de nombreuses bijections connues (ou inconnues...).

Bonus : une nouvelle identité combinatoire.

Obtenue en comptant de deux manières différentes les cartes couvertes de genre g à s sommets, et f faces.

$$\beta_g(r,s) \times Cat(r+s+2g-1) = \sum_{g_1+g_2=g} \binom{2s+2f-4g}{s-2g+1} \epsilon_{g_1}(s)\epsilon_{g_2}(r)$$

cartes à une face biparties à s sommets noirs et r sommets blancs.

cartes à une face à s sommets.

Nouvelle dérivation de l'identité de Jackson comptant les cartes à une face biparties.

Pour finir : une question pour les probabilistes...

Dans une carte à n arêtes, la distance typique entre deux sommets est de l'ordre de $n^{1/4}$.

Dans un arbre à n arêtes, la distance typique entre deux sommets est de l'ordre de $n^{1/2}$.

Quelle est la distance typique dans une carte couverte ?

Des simulations suggèrent un régime nouveau, quelque chose comme $n^{0.3\dots}$.

Pour finir : une question pour les probabilistes...

Dans une carte à n arêtes, la distance typique entre deux sommets est de l'ordre de $n^{1/4}$.

Dans un arbre à n arêtes, la distance typique entre deux sommets est de l'ordre de $n^{1/2}$.

Quelle est la distance typique dans une carte couverte ?

Des simulations suggèrent un régime nouveau, quelque chose comme $n^{0.3\cdots}$.