

Cartes à une face et arbres C -décorés

Guillaume Chapuy (LIAFA, Paris-VII)

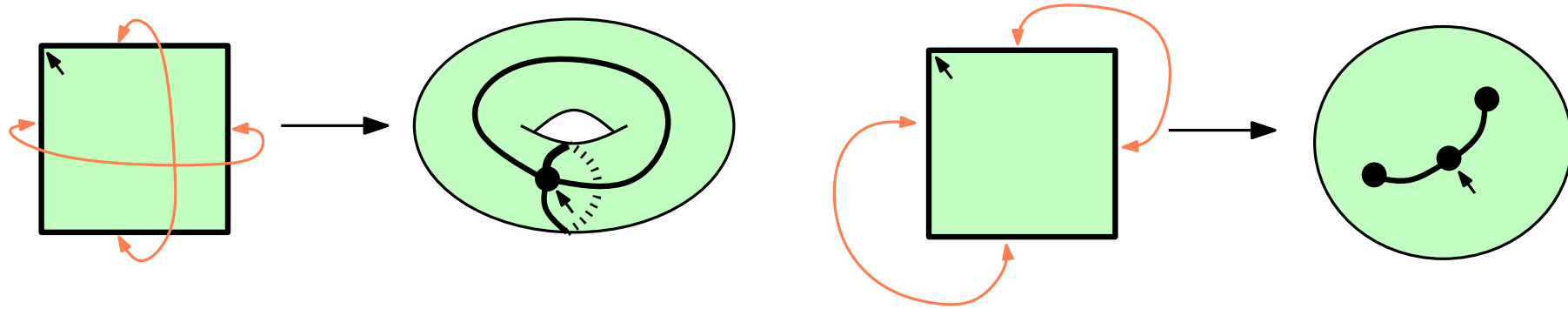
avec

Valentin Féray (LaBRI, Bordeaux-I)

Éric Fusy (LIX, Polytechnique)

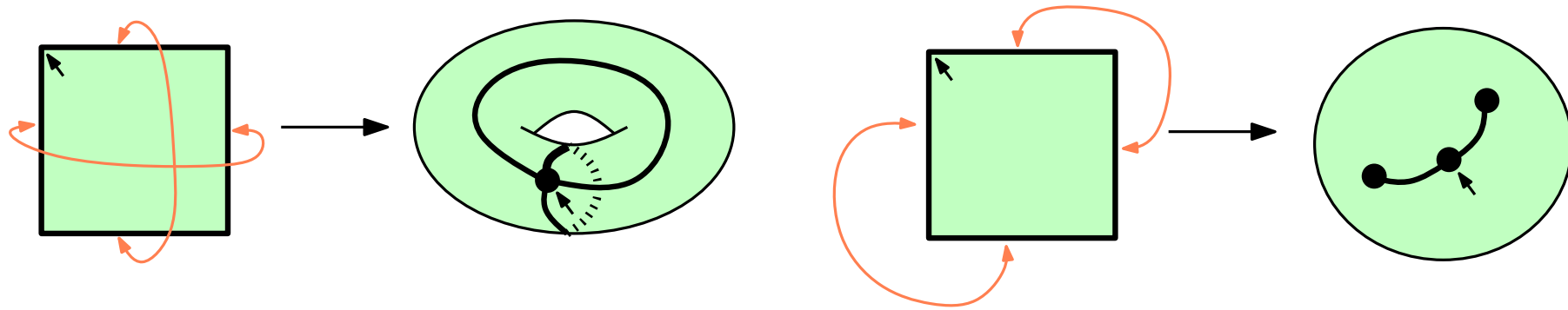
Cartes unicellulaires (= “cartes à une face”)

- Soit $2n$ -gone enraciné. On recolle les arêtes par paires pour former une surface orientable.



Cartes unicellulaires (= “cartes à une face”)

- Soit $2n$ -gone enraciné. On recolle les arêtes par paires pour former une surface orientable.

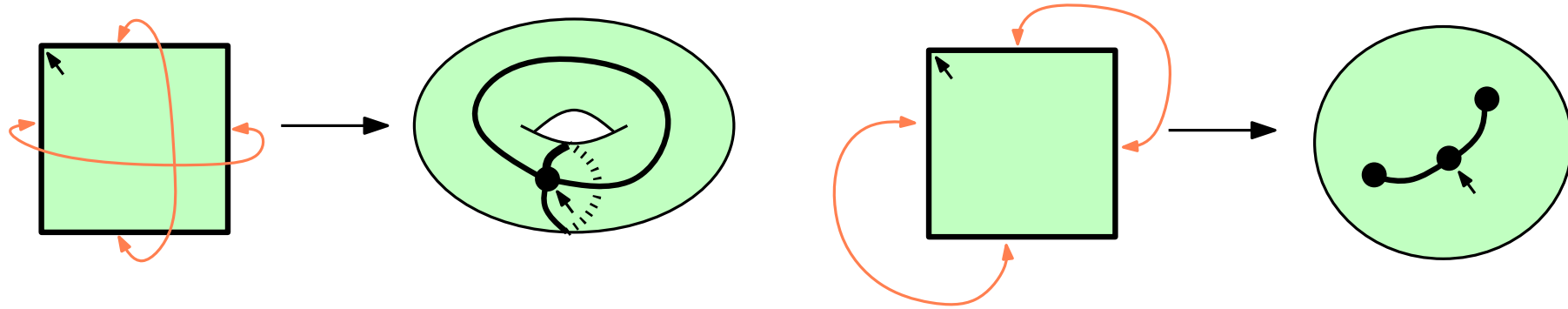


- On obtient un graphe à n arêtes dessiné sur la surface. Le nombre d'anses de la surface (=genre) est donné combinatoirement par la formule d'Euler :

$$\#\text{sommets} = n + 1 - 2g$$

Cartes unicellulaires (= “cartes à une face”)

- Soit $2n$ -gone enraciné. On recolle les arêtes par paires pour former une surface orientable.



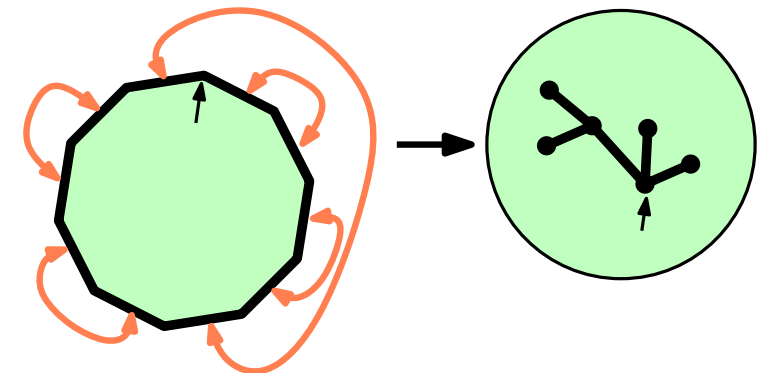
- On obtient un graphe à n arêtes dessiné sur la surface. Le nombre d'anses de la surface (=genre) est donné combinatoirement par la formule d'Euler :

$$\# \text{sommets} = n + 1 - 2g$$

- Le nombre de cartes unicellulaires de taille n est $(2n - 1)!!$

- Et si on fixe le genre ? Par exemple, sur la sphère (genre 0), cartes unicellulaires = arbres plans...

→ Il y en a donc $\text{Cat}(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.



Cartes à une face : énumération !

- Soit $\epsilon_g(n)$ le nombre de cartes une face à n arêtes et de genre g .

- Ces nombres sont-ils intéressants ? Oui !

$$\epsilon_0(n) = \text{Cat}(n)$$

$$\epsilon_1(n) = \frac{(n+1)n(n-1)}{12} \text{Cat}(n)$$

$$\epsilon_2(n) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(5n-2)}{1440} \text{Cat}(n)$$

...

- Ce sont aussi des coefficients de connexion dans l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ (tous les nombres de cartes le sont, plus ou moins - mais ce n'est pas vraiment le sujet ici).

... ou le nombre de graphes rubans à un seul bord...

... ou les nombres qui apparaissent dans le développement en N de $\mathbb{E}\text{Tr}(M^{2n})$
où $M \sim \text{GUE}(N)$

Cartes à une face : énumération !

- Soit $\epsilon_g(n)$ le nombre de cartes une face à n arêtes et de genre g .

- Ces nombres sont-ils intéressants ? Oui !

$$\epsilon_0(n) = \text{Cat}(n)$$

$$\epsilon_1(n) = \frac{(n+1)n(n-1)}{12} \text{Cat}(n)$$

$$\epsilon_2(n) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(5n-2)}{1440} \text{Cat}(n)$$

...

- Ce sont aussi des coefficients de connexion dans l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ (tous les nombres de cartes le sont, plus ou moins - mais ce n'est pas vraiment le sujet ici).

... ou le nombre de graphes rubans à un seul bord...

... ou les nombres qui apparaissent dans le développement en N de $\mathbb{E}\text{Tr}(M^{2n})$
où $M \sim \text{GUE}(N)$

$$\left(\mathbb{E}\text{Tr}(M^{2n}) = \sum_{g \geq 0} N^{n+1-2g} \epsilon_g(n) \right)$$

Cartes à une face : quelques formules choisies (I)

[Lehman-Walsh 72]

$$\epsilon_g(n) = \left(\sum_{\gamma \vdash g} \frac{(n+1-2g)^{2\ell(\gamma)+1}}{2^{2g} \prod_i m_i! (2i+1)^{m_i}} \right) \text{Cat}(n)$$

pas de bijection !

[Harer-Zagier 86]
(forme somme)

$$\sum_{g \geq 0} \epsilon_g(n) y^{n+1-2g} = (2n-1)!! \sum_{i \geq 1} 2^{i-1} \binom{n}{i-1} \binom{y}{i}$$

jolie bijection [Bernardi10] après [Lass 01, Goulden Nica 05]

[Harer-Zagier 86] (forme récurrence)

$$(n+1)\epsilon_g(n) = 2(2n-1)\epsilon_g(n-1) + (n-1)(2n-1)(2n-3)\epsilon_{g-1}(n-2)$$

pas de bijection !

... et plein d'autres encore ! [Jackson 88, Goulden-Jackson 92, Goupil-Schaeffer 98, Schaeffer-Vassilieva 08, Morales-Vassilieva 09, Ch. 09, Bernardi-Ch. 10, ...].

Cartes à une face : quelques formules choisies (II)

[Goupil-Schaeffer 98] pour $\lambda \vdash 2n$ (degrés des sommets)

$$\epsilon_g(n; \lambda) = \frac{(l + 2g - 1)!}{2^{2g-1} \prod_i m_i!} \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_l = g} \prod_i \frac{1}{2^{\gamma_i} + 1} \binom{\lambda_i - 1}{2^{\gamma_i}}$$

pas de
bijection !

Cartes à une face : quelques formules choisies (II)

[Goupil-Schaeffer 98] pour $\lambda \vdash 2n$ (degrés des sommets)

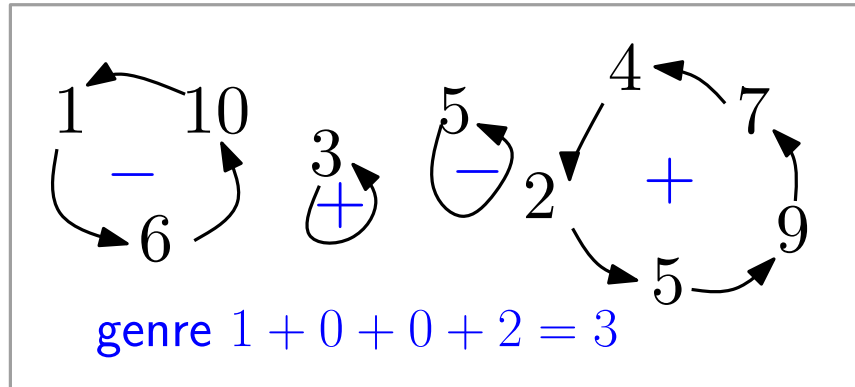
$$\epsilon_g(n; \lambda) = \frac{(l + 2g - 1)!}{2^{2g-1} \prod_i m_i!} \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_l = g} \prod_i \frac{1}{2\gamma_i + 1} \binom{\lambda_i - 1}{2\gamma_i} \quad \text{pas de bijection !}$$

[Goupil-Schaeffer 98] Cartes biparties. Pour $\lambda \vdash n$ (sommets noirs)
 $\mu \vdash n$ (sommets blancs)

$$\beta_g(n; \lambda, \mu) = \frac{1}{2^{2g}} \sum_{g_1 + g_2 = g} P_{g_1}(\lambda) P_{g_2}(\mu) \quad \text{pas de bijection !}$$
$$\text{où } P_g(\lambda) = \frac{1}{\prod_i m_i!} \sum_{\gamma_1 + \dots + \gamma_m = g} (m + 2g_2 - 1)! \prod_{r=1}^m \frac{1}{2\gamma_r + 1} \binom{\lambda_r - 1}{2\gamma_r}$$

Notre résultat, en bref

- Une C-permutation :

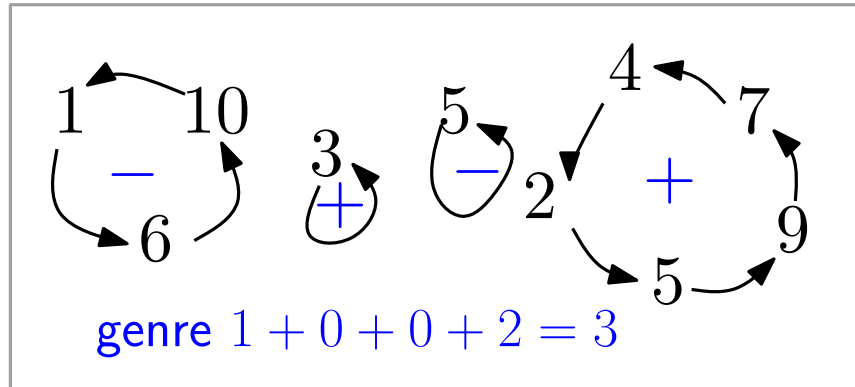


- tous les cycles ont longueur impaire
- chaque cycle porte un signe dans $\{+, -\}$
- son genre est $g := \sum_i k_i$ où $(2k_i + 1)$ sont les longueurs de cycles

$$\#\text{cycles} = |S| - 2g$$

Notre résultat, en bref

- Une C -permutation :

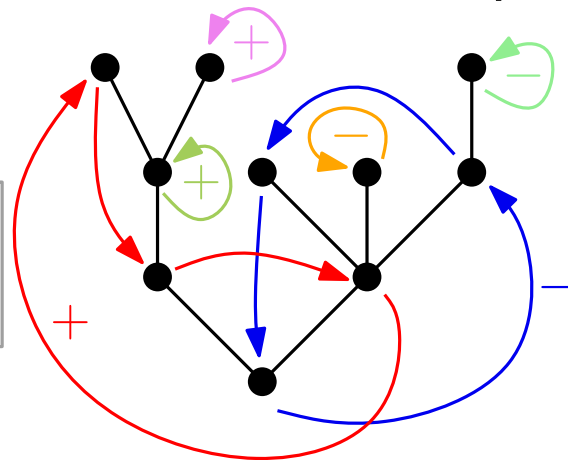


- tous les cycles ont longueur impaire
- chaque cycle porte un signe dans $\{+, -\}$
- son genre est $g := \sum_i k_i$ où $(2k_i + 1)$ sont les longueurs de cycles

$$\#\text{cycles} = |S| - 2g$$

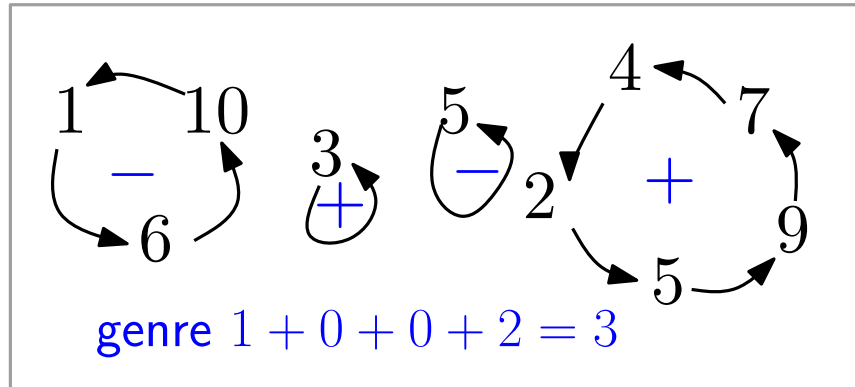
- arbre C -décoré = arbre plan enraciné muni d'une C -permutation de ses sommets.

arbre C -décoré
de genre 2



Notre résultat, en bref

- Une C -permutation :

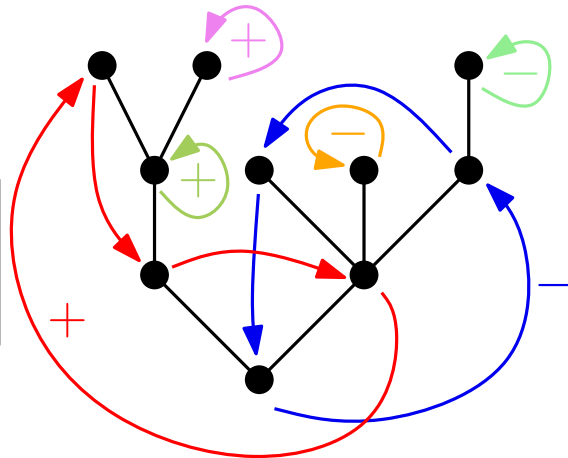


- tous les cycles ont longueur impaire
- chaque cycle porte un signe dans $\{+, -\}$
- son genre est $g := \sum_i k_i$ où $(2k_i + 1)$ sont les longueurs de cycles

$$\#\text{cycles} = |S| - 2g$$

- arbre C -décoré = arbre plan enraciné muni d'une C -permutation de ses sommets.

arbre C -décoré
de genre 2

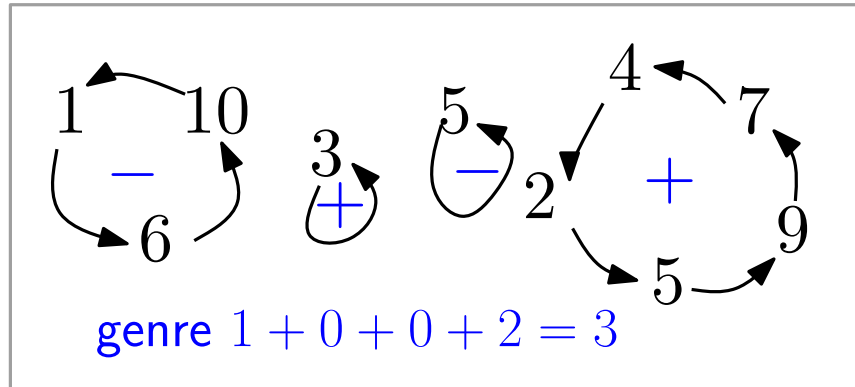


- **Théorème** [C., Féray, Fusy]

Il y a une 2^{n+1} -to-1-jection entre cartes à une face de taille n et arbres C -décorés à n arêtes. Elle préserve le genre, et le graphe sous-jacent.

Notre résultat, en bref

- Une C -permutation :

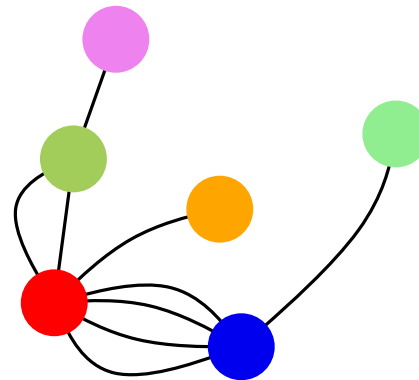
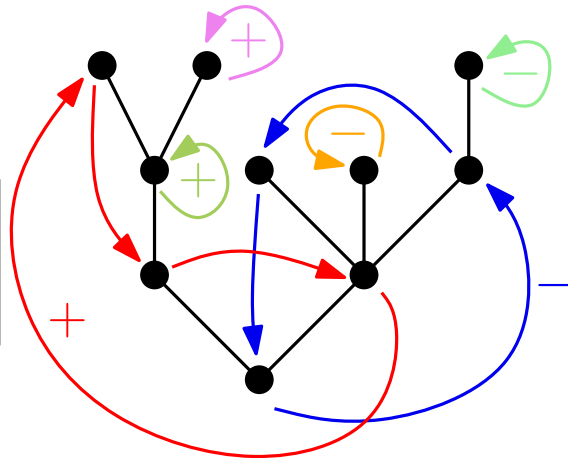


- tous les cycles ont longueur impaire
- chaque cycle porte un signe dans $\{+, -\}$
- son genre est $g := \sum_i k_i$ où $(2k_i + 1)$ sont les longueurs de cycles

$$\#\text{cycles} = |S| - 2g$$

- arbre C -décoré = arbre plan enraciné muni d'une C -permutation de ses sommets.

arbre C -décoré
de genre 2



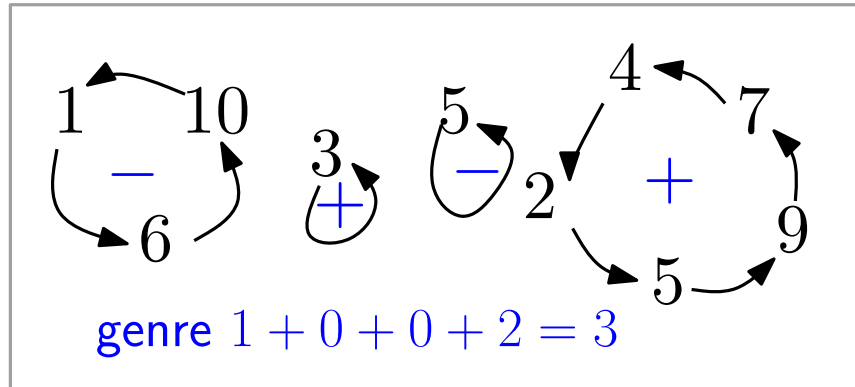
le graphe sous-jacent est obtenu en identifiant les sommets de chaque cycle en un gros sommet

- **Théorème** [C., Féray, Fusy]

Il y a une 2^{n+1} -to-1-jection entre cartes à une face de taille n et arbres C -décorés à n arêtes. Elle préserve le genre, et le graphe sous-jacent.

Notre résultat, en bref

- Une C -permutation :

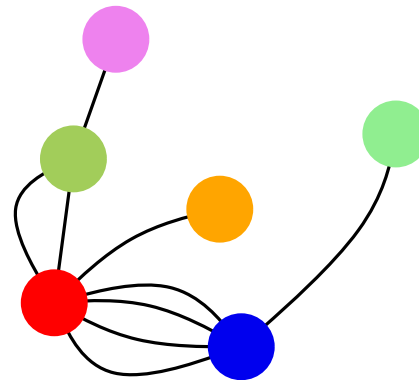
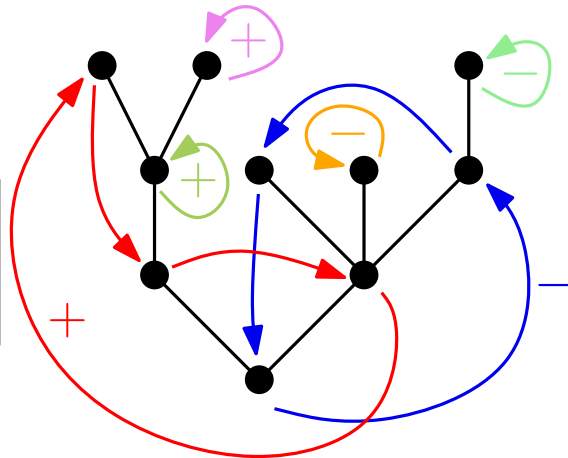


- tous les cycles ont longueur impaire
- chaque cycle porte un signe dans $\{+, -\}$
- son genre est $g := \sum_i k_i$ où $(2k_i + 1)$ sont les longueurs de cycles

$$\#\text{cycles} = |S| - 2g$$

- arbre C -décoré = arbre plan enraciné muni d'une C -permutation de ses sommets.

arbre C -décoré
de genre 2



le graphe sous-jacent est obtenu en identifiant les sommets de chaque cycle en un gros sommet

- **Théorème** [C., Féray, Fusy]

Il y a une 2^{n+1} -to-1-jection entre cartes à une face de taille n et arbres C -décorés à n arêtes. Elle préserve le genre, et le graphe sous-jacent.

Toutes les formules se déduisent de ce théorème de manière bijective.

Une bijection déjà vue au temps du séminaire cartes (I)

Soit $\mathcal{E}_g^{(k)}(n)$ = cartes à une face, genre g , n arêtes, k sommets marqués.

- **Théorème [Ch.09]** Il existe une $2g$ -to-1-jection explicite qui réalise :

$$2g \cdot \mathcal{E}_g(n) = \mathcal{E}_{g-1}^{(3)}(n) + \mathcal{E}_{g-2}^{(5)}(n) + \cdots + \mathcal{E}_0^{(2g+1)}(n)$$

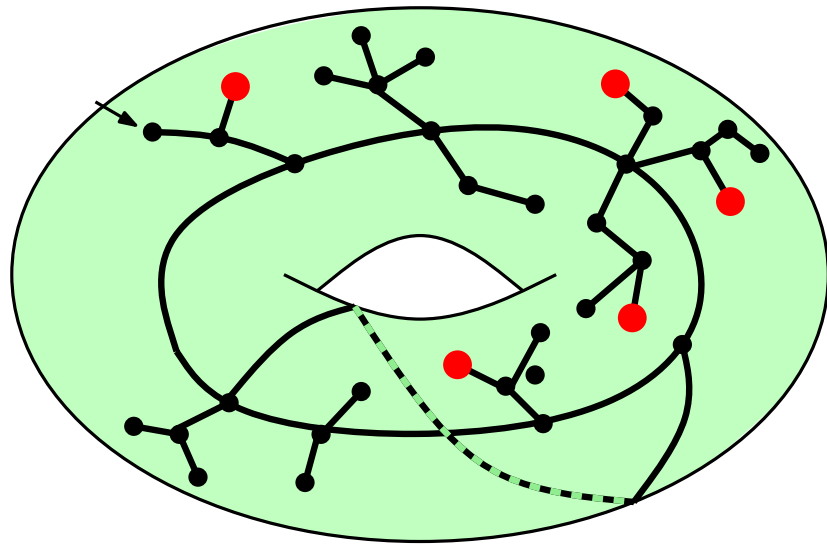
Une bijection déjà vue au temps du séminaire cartes (I)

Soit $\mathcal{E}_g^{(k)}(n)$ = cartes à une face, genre g , n arêtes, k sommets marqués.

- **Théorème** [Ch.09] Il existe une $2g$ -to-1-jection explicite qui réalise :

$$2g \cdot \mathcal{E}_g(n) = \mathcal{E}_{g-1}^{(3)}(n) + \mathcal{E}_{g-2}^{(5)}(n) + \cdots + \mathcal{E}_0^{(2g+1)}(n)$$

- **Sketch** : On prend $(2k + 1)$ sommets dans une carte de genre $g - k$ et on les recolle ensemble en préservant la condition “un seul bord”



genre 1, 5 sommets marqués

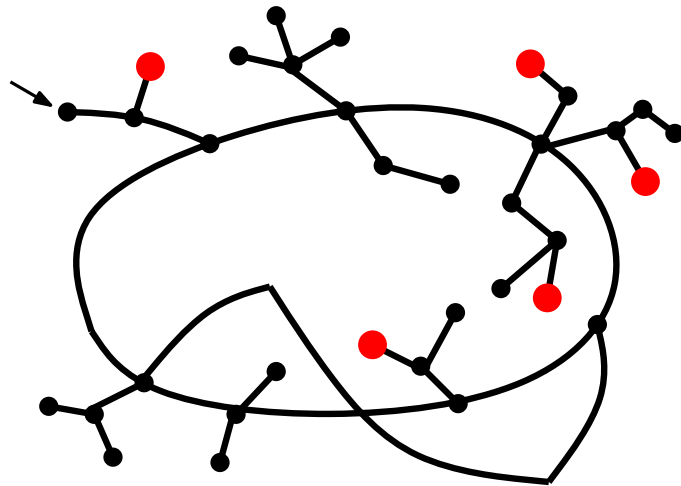
Une bijection déjà vue au temps du séminaire cartes (I)

Soit $\mathcal{E}_g^{(k)}(n)$ = cartes à une face, genre g , n arêtes, k sommets marqués.

- **Théorème** [Ch.09] Il existe une $2g$ -to-1-jection explicite qui réalise :

$$2g \cdot \mathcal{E}_g(n) = \mathcal{E}_{g-1}^{(3)}(n) + \mathcal{E}_{g-2}^{(5)}(n) + \cdots + \mathcal{E}_0^{(2g+1)}(n)$$

- **Sketch** : On prend $(2k + 1)$ sommets dans une carte de genre $g - k$ et on les recolle ensemble en préservant la condition “un seul bord”



genre 1, 5 sommets marqués

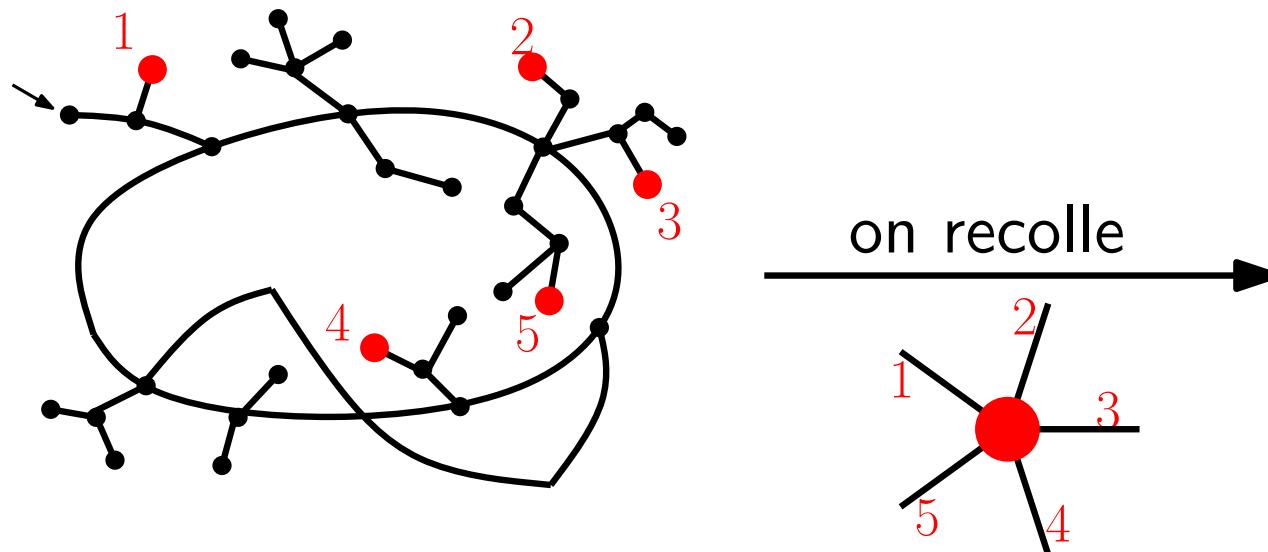
Une bijection déjà vue au temps du séminaire cartes (I)

Soit $\mathcal{E}_g^{(k)}(n)$ = cartes à une face, genre g , n arêtes, k sommets marqués.

- **Théorème [Ch.09]** Il existe une $2g$ -to-1-jection explicite qui réalise :

$$2g \cdot \mathcal{E}_g(n) = \mathcal{E}_{g-1}^{(3)}(n) + \mathcal{E}_{g-2}^{(5)}(n) + \cdots + \mathcal{E}_0^{(2g+1)}(n)$$

- **Sketch :** On prend $(2k + 1)$ sommets dans une carte de genre $g - k$ et on les recolle ensemble en préservant la condition “un seul bord”



genre 1, 5 sommets marqués

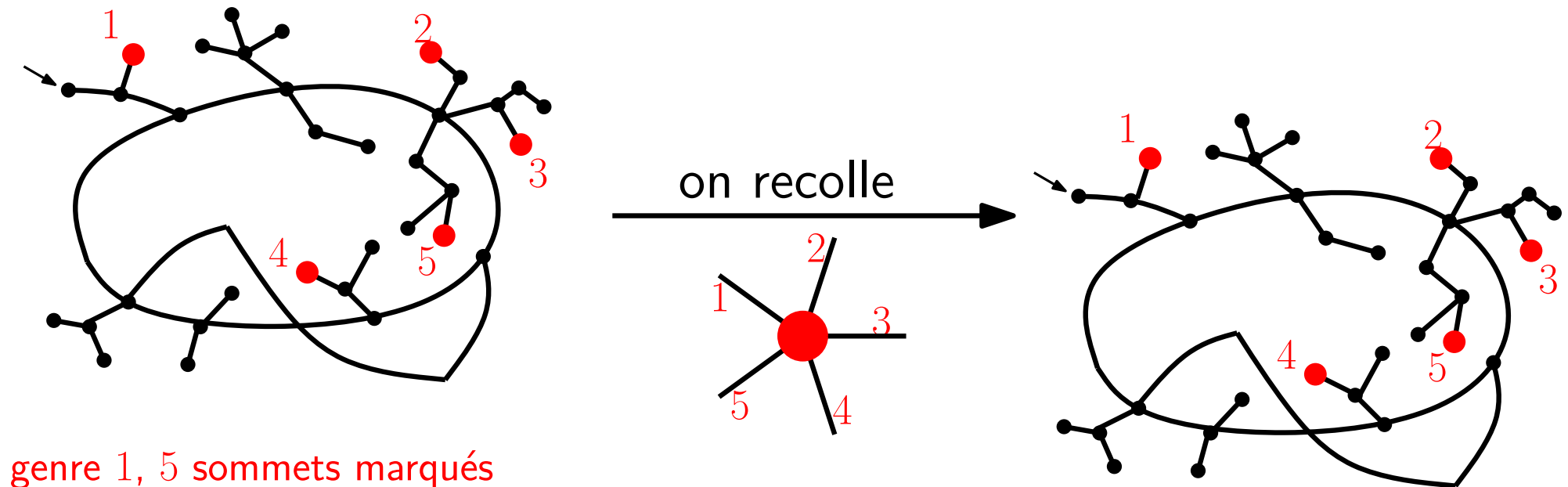
Une bijection déjà vue au temps du séminaire cartes (I)

Soit $\mathcal{E}_g^{(k)}(n)$ = cartes à une face, genre g , n arêtes, k sommets marqués.

- **Théorème [Ch.09]** Il existe une $2g$ -to-1-jction explicite qui réalise :

$$2g \cdot \mathcal{E}_g(n) = \mathcal{E}_{g-1}^{(3)}(n) + \mathcal{E}_{g-2}^{(5)}(n) + \cdots + \mathcal{E}_0^{(2g+1)}(n)$$

- **Sketch :** On prend $(2k + 1)$ sommets dans une carte de genre $g - k$ et on les recolle ensemble en préservant la condition “un seul bord”



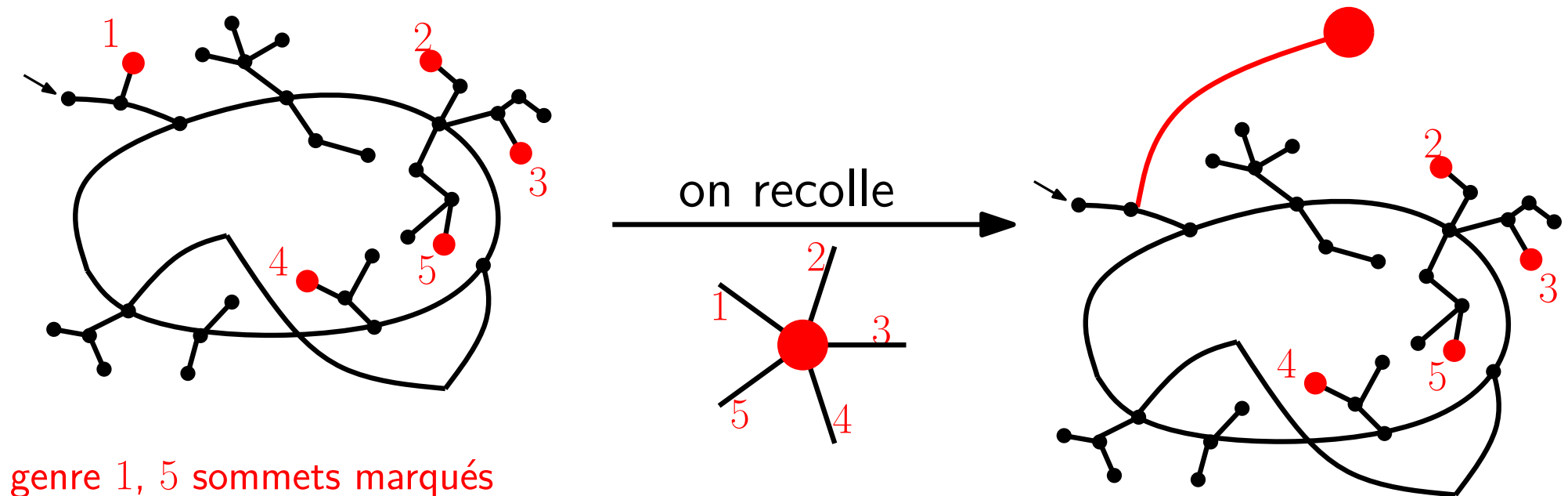
Une bijection déjà vue au temps du séminaire cartes (I)

Soit $\mathcal{E}_g^{(k)}(n)$ = cartes à une face, genre g , n arêtes, k sommets marqués.

- **Théorème [Ch.09]** Il existe une $2g$ -to-1-jection explicite qui réalise :

$$2g \cdot \mathcal{E}_g(n) = \mathcal{E}_{g-1}^{(3)}(n) + \mathcal{E}_{g-2}^{(5)}(n) + \cdots + \mathcal{E}_0^{(2g+1)}(n)$$

- **Sketch :** On prend $(2k + 1)$ sommets dans une carte de genre $g - k$ et on les recolle ensemble en préservant la condition “un seul bord”



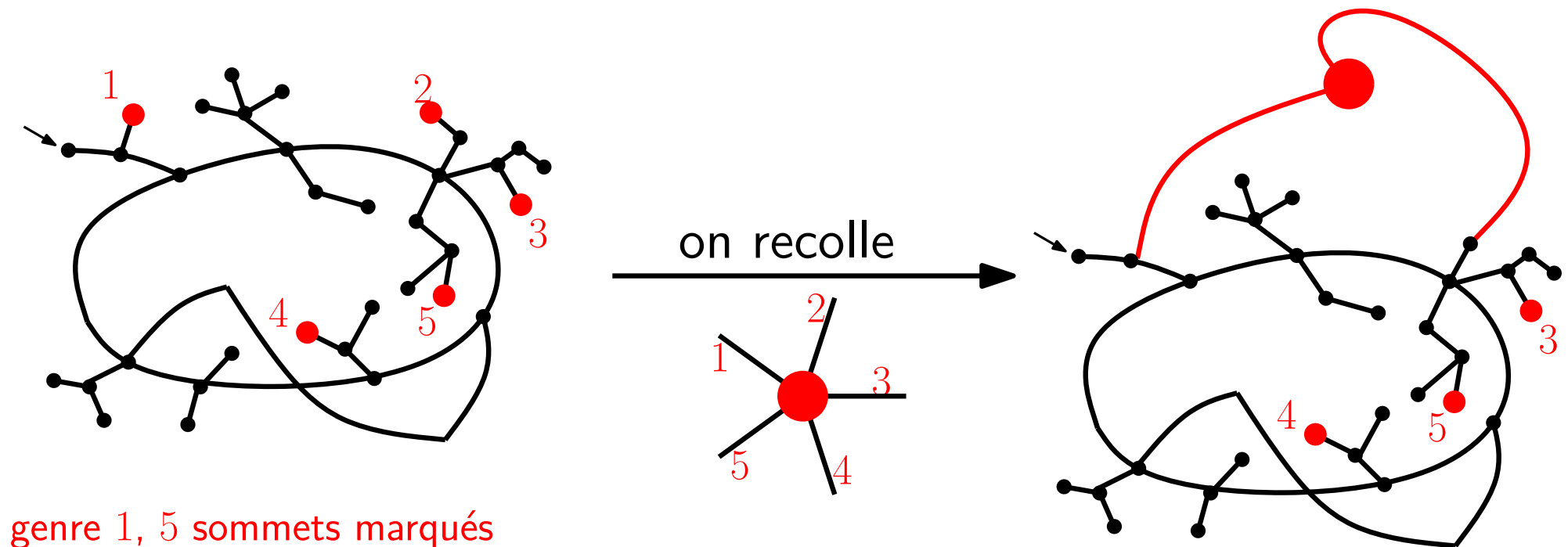
Une bijection déjà vue au temps du séminaire cartes (I)

Soit $\mathcal{E}_g^{(k)}(n)$ = cartes à une face, genre g , n arêtes, k sommets marqués.

- **Théorème [Ch.09]** Il existe une $2g$ -to-1-jection explicite qui réalise :

$$2g \cdot \mathcal{E}_g(n) = \mathcal{E}_{g-1}^{(3)}(n) + \mathcal{E}_{g-2}^{(5)}(n) + \cdots + \mathcal{E}_0^{(2g+1)}(n)$$

- **Sketch :** On prend $(2k + 1)$ sommets dans une carte de genre $g - k$ et on les recolle ensemble en préservant la condition “un seul bord”



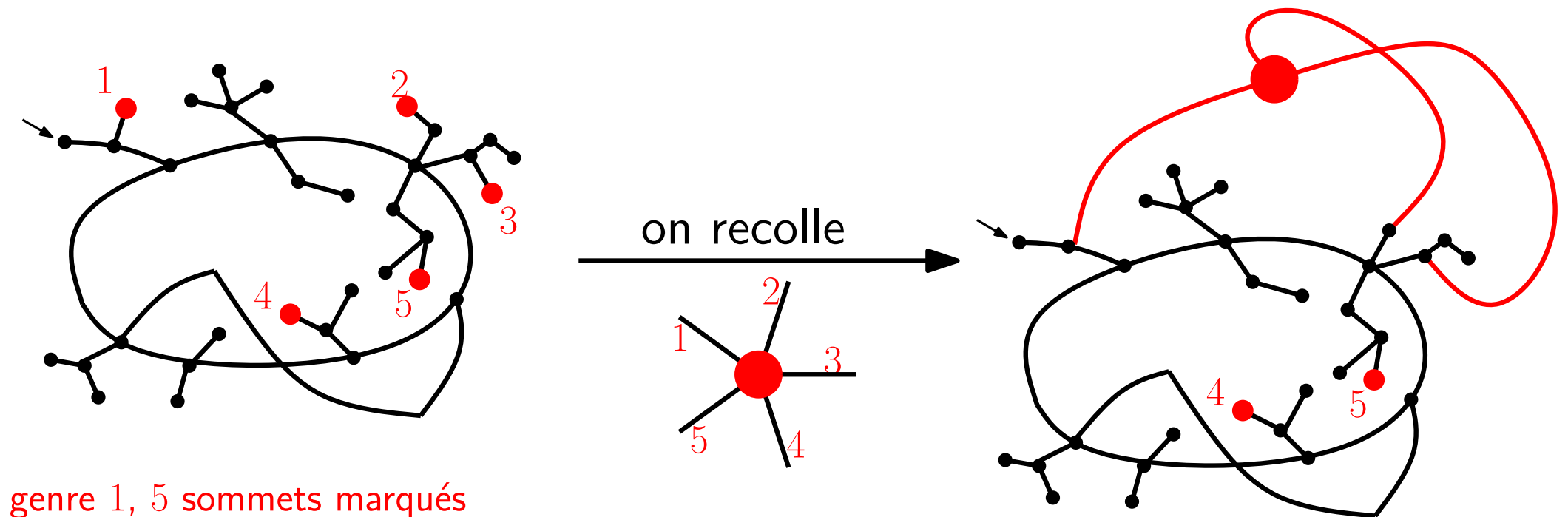
Une bijection déjà vue au temps du séminaire cartes (I)

Soit $\mathcal{E}_g^{(k)}(n)$ = cartes à une face, genre g , n arêtes, k sommets marqués.

- **Théorème [Ch.09]** Il existe une $2g$ -to-1-jection explicite qui réalise :

$$2g \cdot \mathcal{E}_g(n) = \mathcal{E}_{g-1}^{(3)}(n) + \mathcal{E}_{g-2}^{(5)}(n) + \cdots + \mathcal{E}_0^{(2g+1)}(n)$$

- **Sketch :** On prend $(2k + 1)$ sommets dans une carte de genre $g - k$ et on les recolle ensemble en préservant la condition “un seul bord”



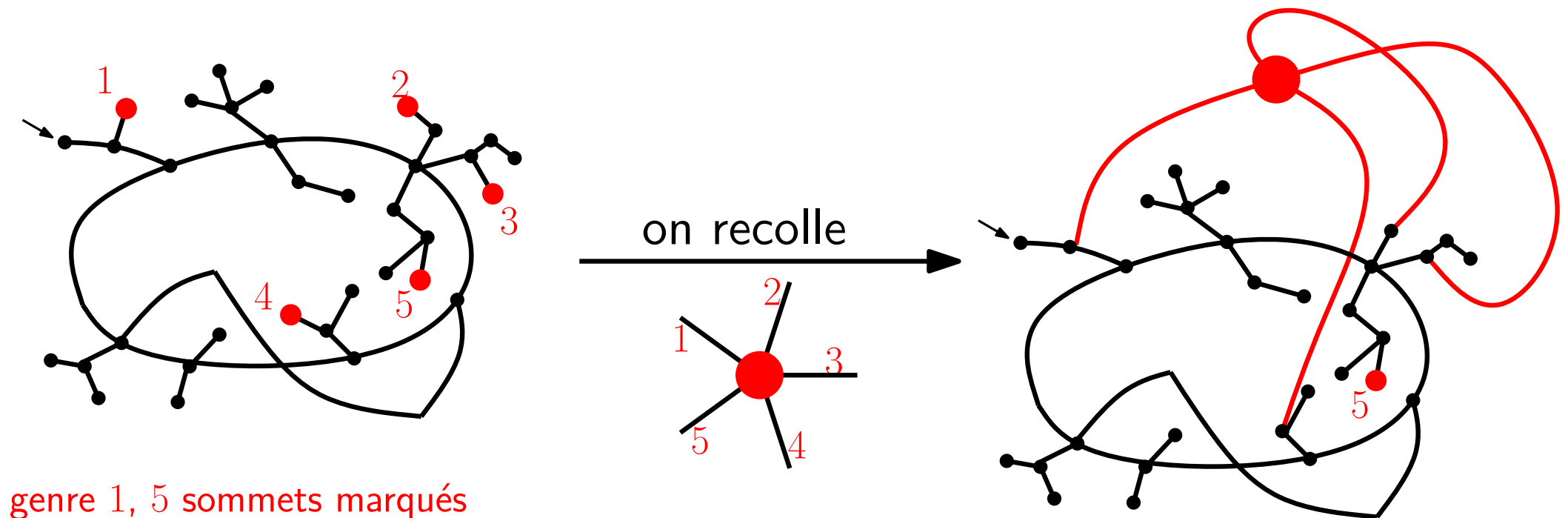
Une bijection déjà vue au temps du séminaire cartes (I)

Soit $\mathcal{E}_g^{(k)}(n)$ = cartes à une face, genre g , n arêtes, k sommets marqués.

- **Théorème [Ch.09]** Il existe une $2g$ -to-1-jection explicite qui réalise :

$$2g \cdot \mathcal{E}_g(n) = \mathcal{E}_{g-1}^{(3)}(n) + \mathcal{E}_{g-2}^{(5)}(n) + \cdots + \mathcal{E}_0^{(2g+1)}(n)$$

- **Sketch :** On prend $(2k + 1)$ sommets dans une carte de genre $g - k$ et on les recolle ensemble en préservant la condition “un seul bord”



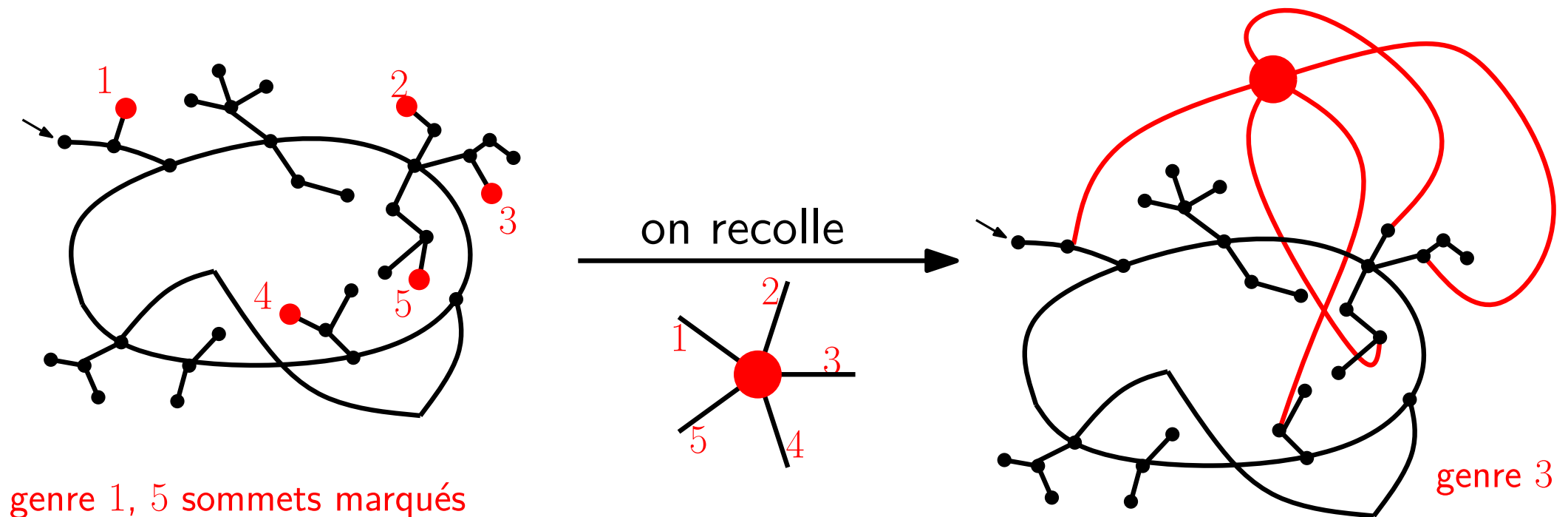
Une bijection déjà vue au temps du séminaire cartes (I)

Soit $\mathcal{E}_g^{(k)}(n)$ = cartes à une face, genre g , n arêtes, k sommets marqués.

- **Théorème [Ch.09]** Il existe une $2g$ -to-1-jection explicite qui réalise :

$$2g \cdot \mathcal{E}_g(n) = \mathcal{E}_{g-1}^{(3)}(n) + \mathcal{E}_{g-2}^{(5)}(n) + \cdots + \mathcal{E}_0^{(2g+1)}(n)$$

- **Sketch :** On prend $(2k + 1)$ sommets dans une carte de genre $g - k$ et on les recolle ensemble en préservant la condition “un seul bord”



- le genre **augmente de k** (formule d'Euler)

Une bijection déjà vue au temps du séminaire cartes (II)

Soit $\mathcal{E}_g^{(k)}(n)$ = cartes à une face, genre g , n arêtes, k sommets marqués.

- **Théorème [Ch.09]** Il existe une $2g$ -to-1-jection explicite qui réalise :

$$2g \cdot \mathcal{E}_g(n) = \mathcal{E}_{g-1}^{(3)}(n) + \mathcal{E}_{g-2}^{(5)}(n) + \cdots + \mathcal{E}_0^{(2g+1)}(n)$$

Une bijection déjà vue au temps du séminaire cartes (II)

Soit $\mathcal{E}_g^{(k)}(n)$ = cartes à une face, genre g , n arêtes, k sommets marqués.

- **Théorème [Ch.09]** Il existe une $2g$ -to-1-jection explicite qui réalise :

$$2g \cdot \mathcal{E}_g(n) = \mathcal{E}_{g-1}^{(3)}(n) + \mathcal{E}_{g-2}^{(5)}(n) + \cdots + \mathcal{E}_0^{(2g+1)}(n)$$

- **Corollaire :** $\epsilon_g(n) = P_g(n) \times \text{Cat}(n)$ où le polynôme P_g est défini récursivement :

$$2g \cdot P_g(n) = \binom{n+3-2g}{3} P_{g-1}(n) + \binom{n+5-2g}{5} P_{g-2}(n) + \cdots + \binom{n+1}{2g+1} P_0(n)$$

...mais maintenant on sait en dire plus !

Les C -permutations donnent la solution de la récurrence !

- **Fait** : Les C -permutations satisfont la même récurrence que les cartes à une face

$$2g \cdot C_g(n) = C_{g-1}^{(3)}(n) + C_{g-2}^{(5)}(n) + \cdots + C_0^{(2g+1)}(n)$$

où $C_g^{(k)}(n)$ = C -permutations, taille n , genre g , k cycles marqués.

Les C -permutations donnent la solution de la récurrence !

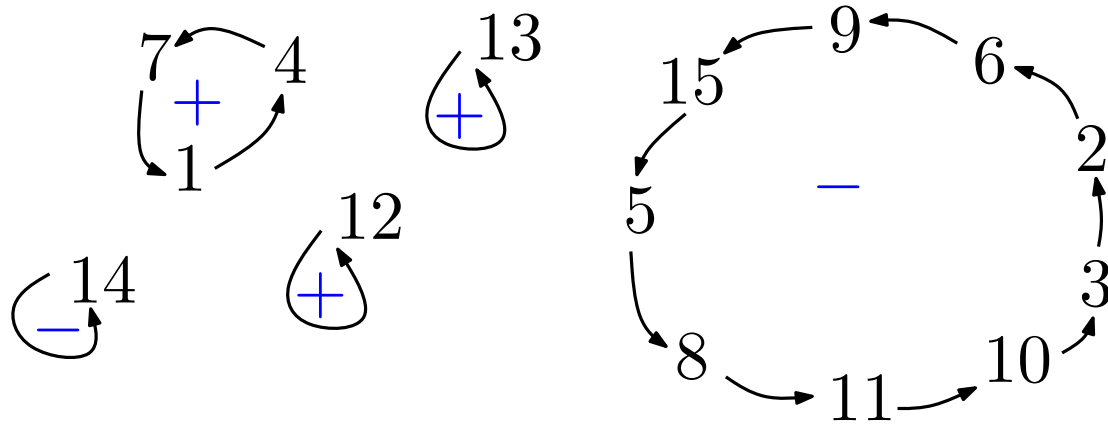
- **Fait** : Les C -permutations satisfont la même récurrence que les cartes à une face

$$2g \cdot C_g(n) = C_{g-1}^{(3)}(n) + C_{g-2}^{(5)}(n) + \dots + C_0^{(2g+1)}(n)$$

où $C_g^{(k)}(n)$ = C -permutations, taille n , genre g , k cycles marqués.

- **Démonstration** : Soit une C -permutation de genre g .

$2g = (\# \text{éléments}) - \#(\text{cycles})$ est le nb. d'éléments non-minimaux



Les C -permutations donnent la solution de la récurrence !

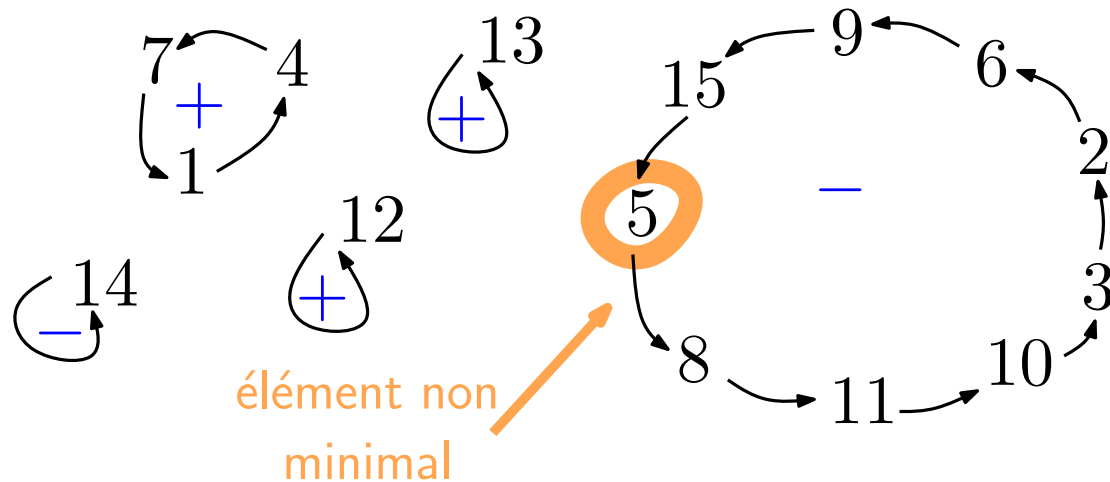
- **Fait** : Les C -permutations satisfont la même récurrence que les cartes à une face

$$2g \cdot C_g(n) = C_{g-1}^{(3)}(n) + C_{g-2}^{(5)}(n) + \dots + C_0^{(2g+1)}(n)$$

où $C_g^{(k)}(n) = C$ -permutations, taille n , genre g , k cycles marqués.

- **Démonstration** : Soit une C -permutation de genre g .

$2g = (\# \text{éléments}) - \#(\text{cycles})$ est le nb. d'éléments non-minimaux



Les C -permutations donnent la solution de la récurrence !

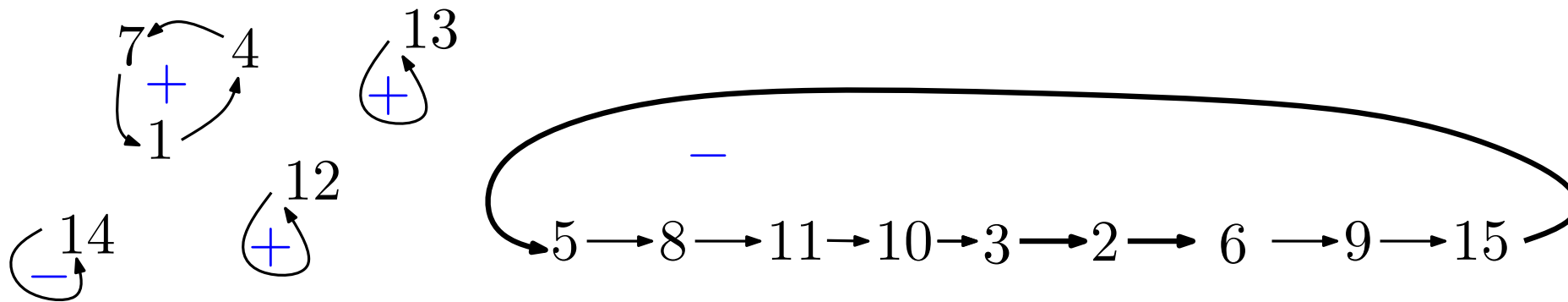
- **Fait** : Les C -permutations satisfont la même récurrence que les cartes à une face

$$2g \cdot C_g(n) = C_{g-1}^{(3)}(n) + C_{g-2}^{(5)}(n) + \dots + C_0^{(2g+1)}(n)$$

où $C_g^{(k)}(n) = C$ -permutations, taille n , genre g , k cycles marqués.

- **Démonstration** : Soit une C -permutation de genre g .

$2g = (\#éléments) - \#(cycles)$ est le nb. d'éléments non-minimaux



Les C -permutations donnent la solution de la récurrence !

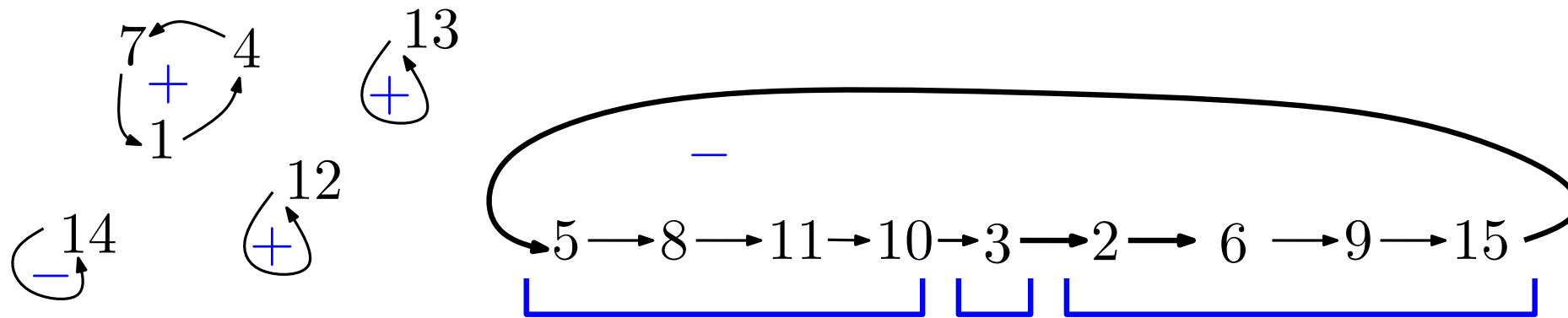
- **Fait** : Les C -permutations satisfont la même récurrence que les cartes à une face

$$2g \cdot C_g(n) = C_{g-1}^{(3)}(n) + C_{g-2}^{(5)}(n) + \dots + C_0^{(2g+1)}(n)$$

où $C_g^{(k)}(n) = C$ -permutations, taille n , genre g , k cycles marqués.

- **Démonstration** : Soit une C -permutation de genre g .

$2g = (\# \text{éléments}) - \#(\text{cycles})$ est le nb. d'éléments non-minimaux



1. on regarde les "runs" séparant les records inférieurs
2. certains peuvent avoir longueur **paire**...

Les C -permutations donnent la solution de la récurrence !

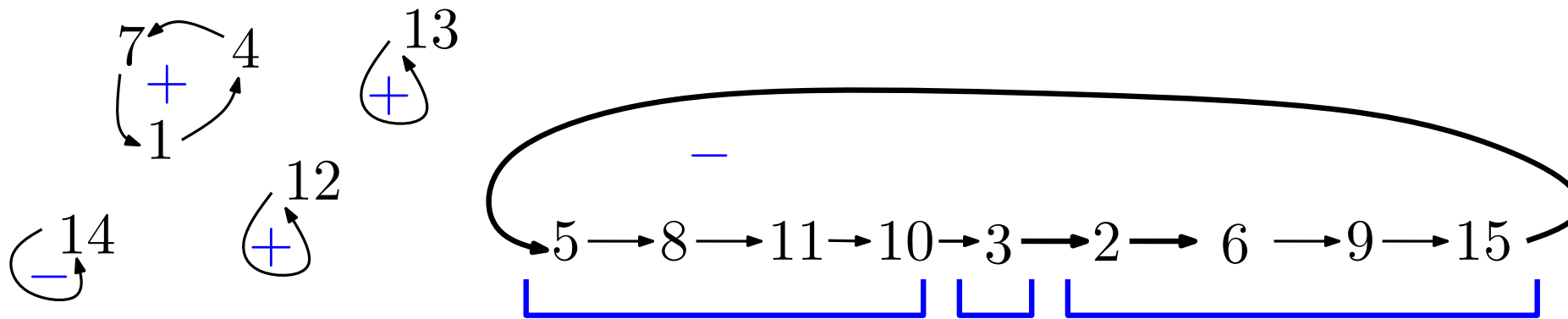
- **Fait** : Les C -permutations satisfont la même récurrence que les cartes à une face

$$2g \cdot C_g(n) = C_{g-1}^{(3)}(n) + C_{g-2}^{(5)}(n) + \dots + C_0^{(2g+1)}(n)$$

où $C_g^{(k)}(n) = C$ -permutations, taille n , genre g , k cycles marqués.

- **Démonstration** : Soit une C -permutation de genre g .

$2g = (\#éléments) - \#(cycles)$ est le nb. d'éléments non-minimaux



1. on regarde les "runs" séparant les records inférieurs
2. certains peuvent avoir longueur **paire**...
on corrige ce défaut en appliquant une petite transposition et on écrit "+" pour se rappeler qu'on a fait cela

Les C -permutations donnent la solution de la récurrence !

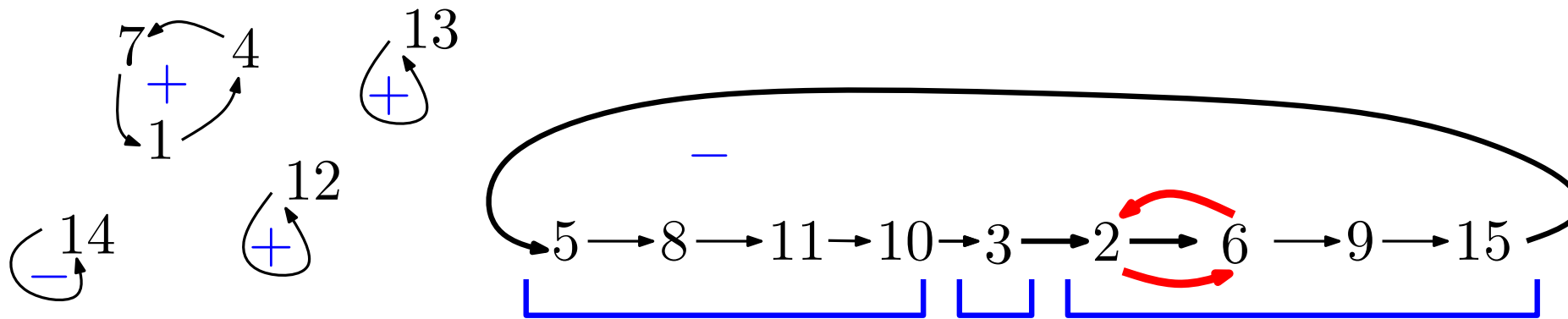
- **Fait** : Les C -permutations satisfont la même récurrence que les cartes à une face

$$2g \cdot C_g(n) = C_{g-1}^{(3)}(n) + C_{g-2}^{(5)}(n) + \dots + C_0^{(2g+1)}(n)$$

où $C_g^{(k)}(n) = C$ -permutations, taille n , genre g , k cycles marqués.

- **Démonstration** : Soit une C -permutation de genre g .

$2g = (\# \text{éléments}) - \#(\text{cycles})$ est le nb. d'éléments non-minimaux



1. on regarde les "runs" séparant les records inférieurs
2. certains peuvent avoir longueur paire...
on corrige ce défaut en appliquant une petite transposition
et on écrit "+" pour se rappeler qu'on a fait cela

Les C -permutations donnent la solution de la récurrence !

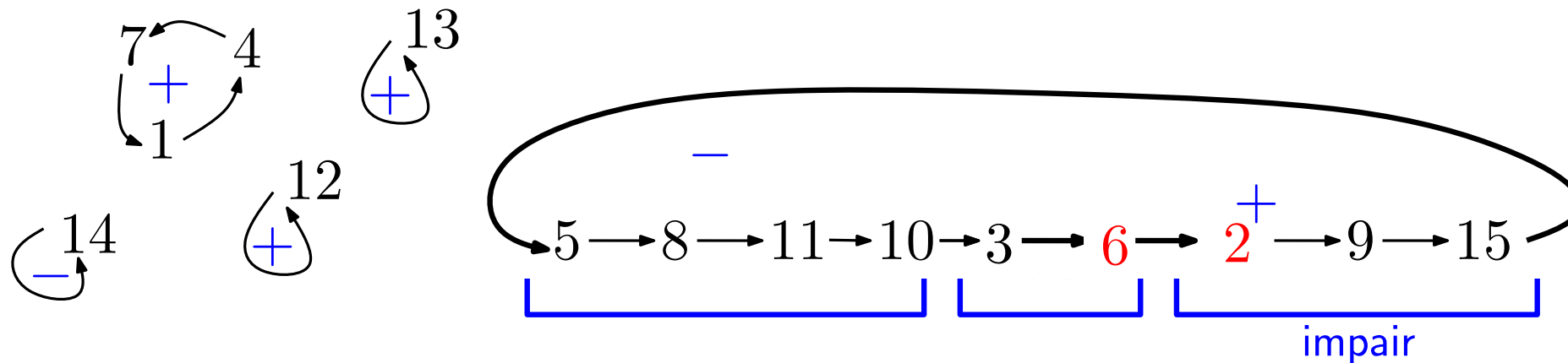
- **Fait** : Les C -permutations satisfont la même récurrence que les cartes à une face

$$2g \cdot C_g(n) = C_{g-1}^{(3)}(n) + C_{g-2}^{(5)}(n) + \dots + C_0^{(2g+1)}(n)$$

où $C_g^{(k)}(n)$ = C -permutations, taille n , genre g , k cycles marqués.

- **Démonstration** : Soit une C -permutation de genre g .

$2g = (\#éléments) - \#(cycles)$ est le nb. d'éléments non-minimaux



1. on regarde les "runs" séparant les records inférieurs
2. certains peuvent avoir longueur **paire**...
on corrige ce défaut en appliquant une petite transposition et on écrit "+" pour se rappeler qu'on a fait cela

Les C -permutations donnent la solution de la récurrence !

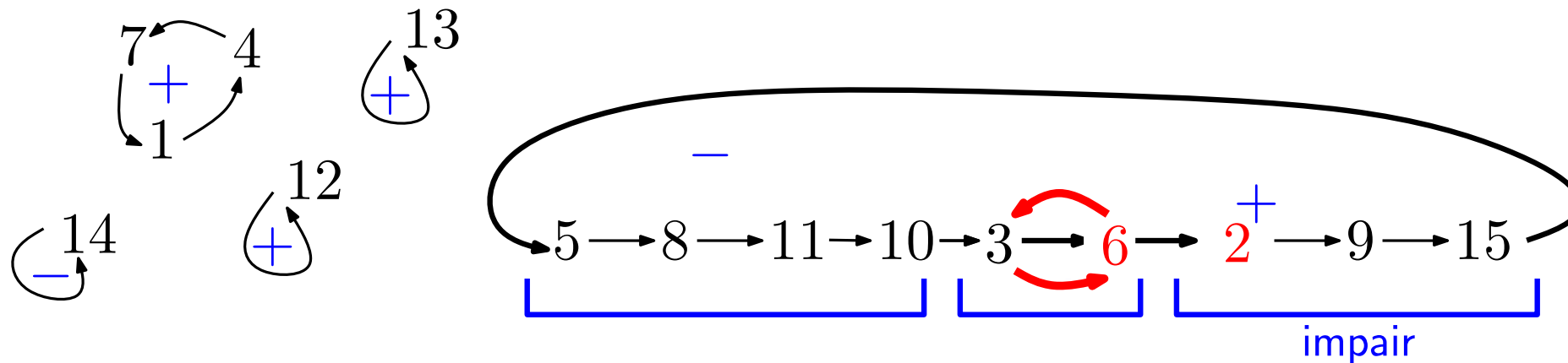
- **Fait** : Les C -permutations satisfont la même récurrence que les cartes à une face

$$2g \cdot C_g(n) = C_{g-1}^{(3)}(n) + C_{g-2}^{(5)}(n) + \dots + C_0^{(2g+1)}(n)$$

où $C_g^{(k)}(n) = C$ -permutations, taille n , genre g , k cycles marqués.

- **Démonstration** : Soit une C -permutation de genre g .

$2g = (\# \text{éléments}) - \#(\text{cycles})$ est le nb. d'éléments non-minimaux



1. on regarde les "runs" séparant les records inférieurs
2. certains peuvent avoir longueur **paire**...
on corrige ce défaut en appliquant une petite transposition et on écrit "+" pour se rappeler qu'on a fait cela

Les C -permutations donnent la solution de la récurrence !

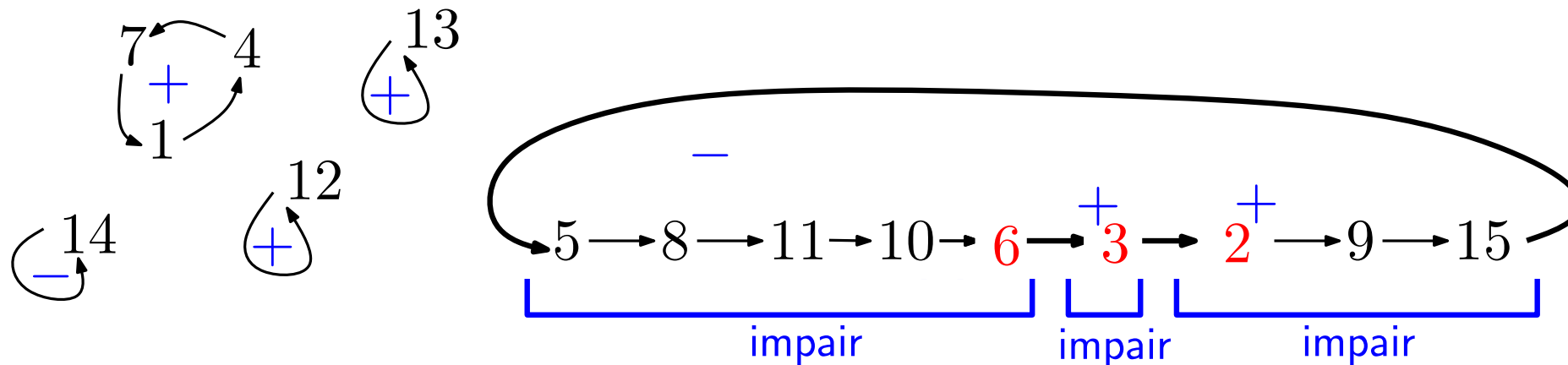
- **Fait** : Les C -permutations satisfont la même récurrence que les cartes à une face

$$2g \cdot C_g(n) = C_{g-1}^{(3)}(n) + C_{g-2}^{(5)}(n) + \dots + C_0^{(2g+1)}(n)$$

où $C_g^{(k)}(n) = C$ -permutations, taille n , genre g , k cycles marqués.

- **Démonstration** : Soit une C -permutation de genre g .

$2g = (\# \text{éléments}) - \#(\text{cycles})$ est le nb. d'éléments non-minimaux



1. on regarde les "runs" séparant les records inférieurs
2. certains peuvent avoir longueur **paire**...
on corrige ce défaut en appliquant une petite transposition et on écrit "+" pour se rappeler qu'on a fait cela

Les C -permutations donnent la solution de la récurrence !

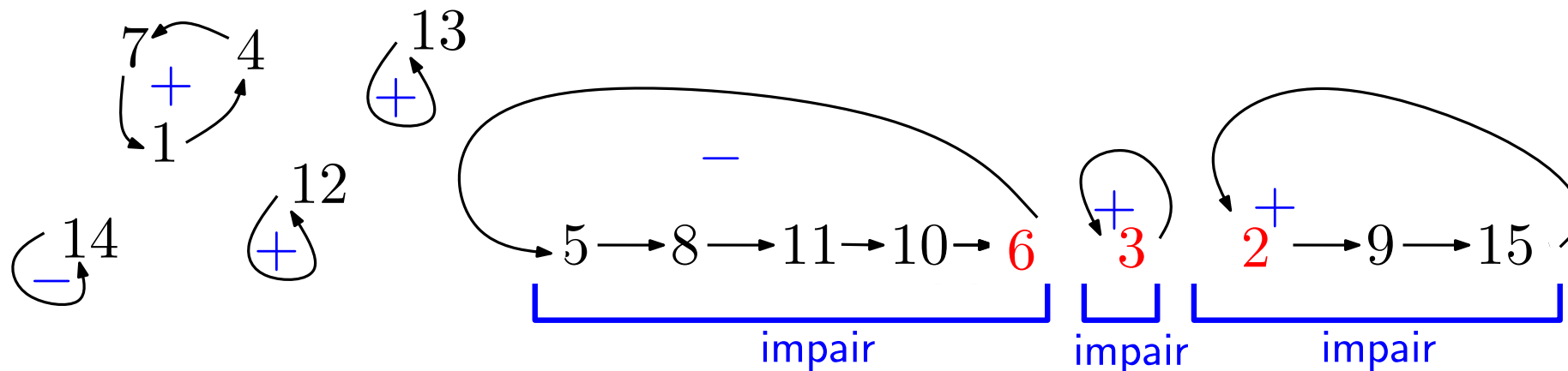
- **Fait** : Les C -permutations satisfont la même récurrence que les cartes à une face

$$2g \cdot C_g(n) = C_{g-1}^{(3)}(n) + C_{g-2}^{(5)}(n) + \dots + C_0^{(2g+1)}(n)$$

où $C_g^{(k)}(n) = C$ -permutations, taille n , genre g , k cycles marqués.

- **Démonstration** : Soit une C -permutation de genre g .

$2g = (\# \text{éléments}) - \#(\text{cycles})$ est le nb. d'éléments non-minimaux



1. on regarde les "runs" séparant les records inférieurs
2. certains peuvent avoir longueur **paire**...
on corrige ce défaut en appliquant une petite transposition
et on écrit "+" pour se rappeler qu'on a fait cela
3. puis on ferme chaque "run" en un cycle

Les C -permutations donnent la solution de la récurrence !

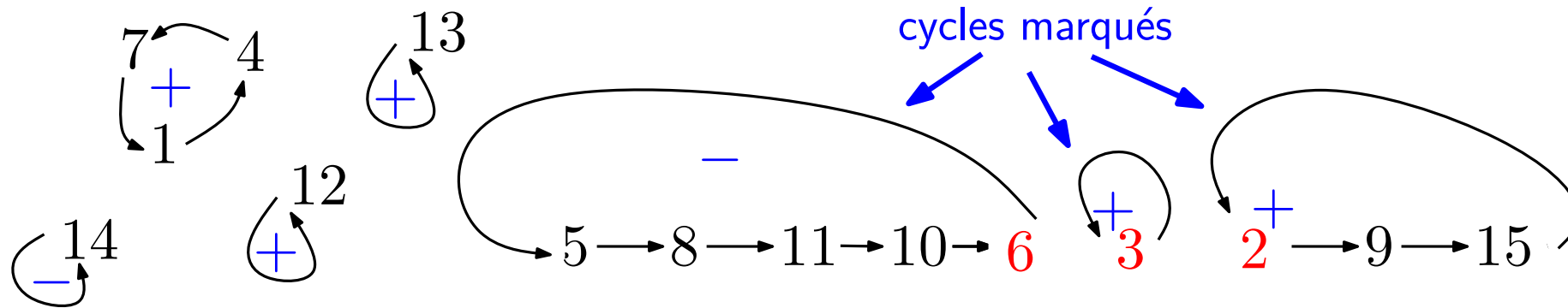
- **Fait** : Les C -permutations satisfont la même récurrence que les cartes à une face

$$2g \cdot C_g(n) = C_{g-1}^{(3)}(n) + C_{g-2}^{(5)}(n) + \dots + C_0^{(2g+1)}(n)$$

où $C_g^{(k)}(n)$ = C -permutations, taille n , genre g , k cycles marqués.

- **Démonstration** : Soit une C -permutation de genre g .

$2g = (\# \text{éléments}) - \#(\text{cycles})$ est le nb. d'éléments non-minimaux



1. on regarde les "runs" séparant les records inférieurs
2. certains peuvent avoir longueur **paire**...
on corrige ce défaut en appliquant une petite transposition et on écrit "+" pour se rappeler qu'on a fait cela
3. puis on ferme chaque "run" en un cycle

Les C -permutations donnent la solution de la récurrence !

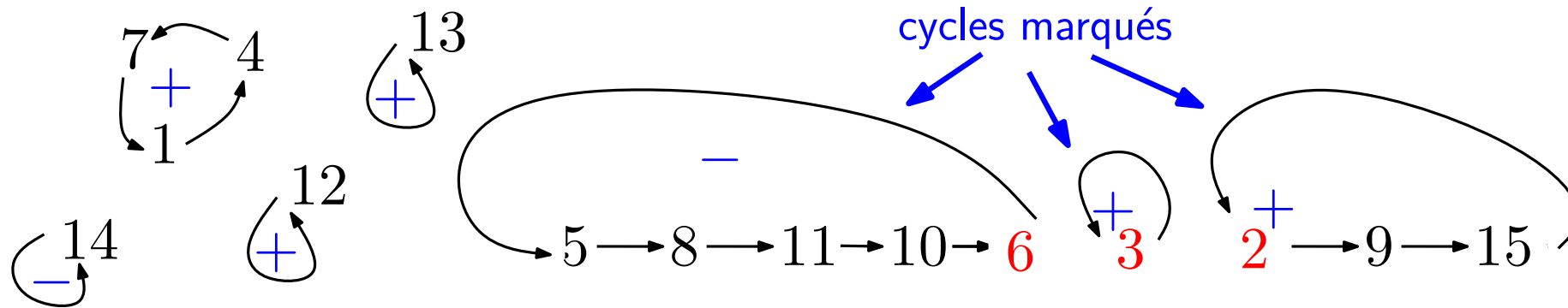
- **Fait** : Les C -permutations satisfont la même récurrence que les cartes à une face

$$2g \cdot C_g(n) = C_{g-1}^{(3)}(n) + C_{g-2}^{(5)}(n) + \dots + C_0^{(2g+1)}(n)$$

où $C_g^{(k)}(n)$ = C -permutations, taille n , genre g , k cycles marqués.

- **Démonstration** : Soit une C -permutation de genre g .

$2g = (\# \text{éléments}) - \#(\text{cycles})$ est le nb. d'éléments non-minimaux



L'énumération des arbres C -décorés est triviale

- **Théorème** [C., Féray, Fusy]

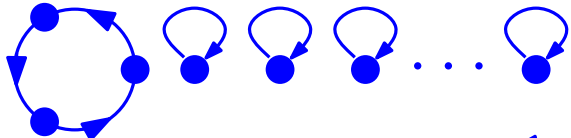
Le nombre de cartes à une face de genre g à n arêtes satisfait :

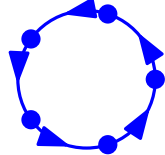
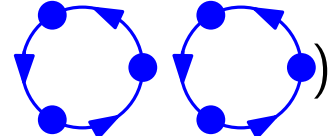
$$2^{n+1} \epsilon_g(n) = C_g(n+1) \text{Cat}(n)$$

où $C_g(n+1)$ est le nombre de C -permutations de genre g sur $n+1$ éléments.

- mais $C_g(n+1) =$ nombres simples !

- $C_0(n+1) = 2^{n+1}$  ($n+1$ cycles)

- $C_1(n+1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} 2^{n-1}$  ($n-1$ cycles)

- $C_2(n+1) = \left(4! \binom{n+1}{5} + 40 \binom{n+1}{6} \right) 2^{n-3}$ (soit  soit )

L'énumération des arbres C -décorés est triviale

- **Théorème** [C., Féray, Fusy]

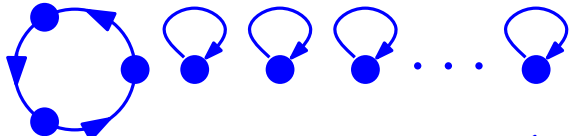
Le nombre de cartes à une face de genre g à n arêtes satisfait :

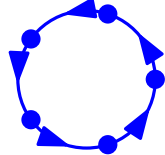
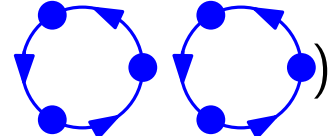
$$2^{n+1} \epsilon_g(n) = C_g(n+1) \text{Cat}(n)$$

où $C_g(n+1)$ est le nombre de C -permutations de genre g sur $n+1$ éléments.

- mais $C_g(n+1) =$ nombres simples !

- $C_0(n+1) = 2^{n+1}$  ($n+1$ cycles)

- $C_1(n+1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} 2^{n-1}$  ($n-1$ cycles)

- $C_2(n+1) = \left(4! \binom{n+1}{5} + 40 \binom{n+1}{6} \right) 2^{n-3}$ (soit  soit )

- en général : $C_g(n+1) = \left(\sum_{\gamma \vdash g} \frac{(n+1-2g)^{2\ell(\gamma)+1}}{\prod_i m_i! (2i+1)^{m_i}} \right) 2^{n+1-2g}$

somme sur le type cyclique de la C -permutation : $(2\gamma_i + 1) \equiv$ longueurs de cycles

✓ formule de Lehman et Walsh !

Conclusion

- C'est une série d'exercices rigolos de retrouver toutes les formules sur les cartes à une face, bijectivement avec les arbres C -décorés. Il faut juste connaître ses classiques (compter les permutations, les arbres...).
- Par exemple la formule de récurrence d'Harer-Zagier qui attend son explication combinatoire depuis 1986...

Formule de récurrence d'Harer-Zagier (1986)

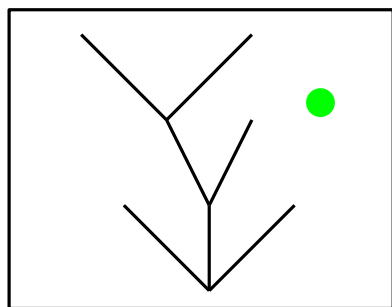
- Classique : pour $g = 0$, bijection de Rémy [Rémy 85]

$$(n + 1)\text{Cat}(n) = 2 \times (2n - 1)\text{Cat}(n - 1)$$

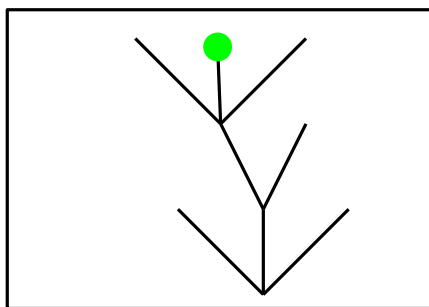
Formule de récurrence d'Harer-Zagier (1986)

- Classique : pour $g = 0$, bijection de Rémy [Rémy 85]

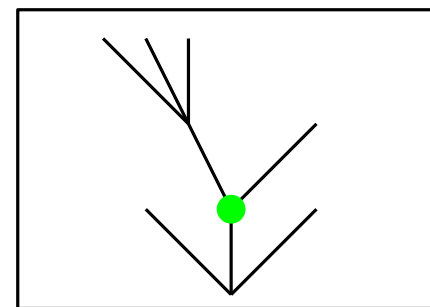
$$(n + 1)\text{Cat}(n) = 2 \times (2n - 1)\text{Cat}(n - 1)$$



arbre, n arêtes, un
sommet marqué



cas a : c'est une
feuille. On l'efface

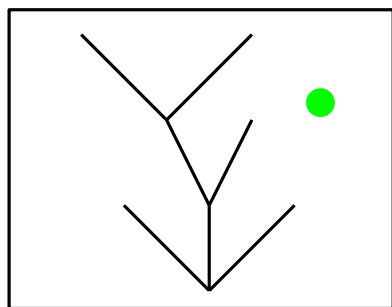


cas b : Ce n'est pas un feuille. On
contracte l'arête la plus à gauche

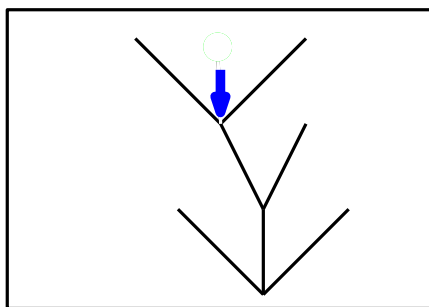
Formule de récurrence d'Harer-Zagier (1986)

- Classique : pour $g = 0$, bijection de Rémy [Rémy 85]

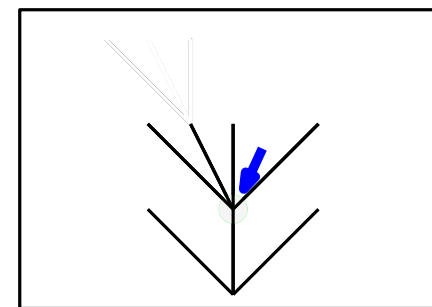
$$(n + 1)\text{Cat}(n) = 2 \times (2n - 1)\text{Cat}(n - 1)$$



arbre, n arêtes, un sommet marqué



cas a : c'est une feuille. On l'efface

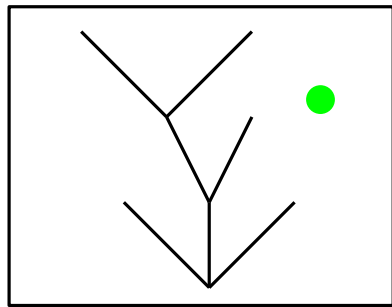


cas b : Ce n'est pas un feuille. On contracte l'arête la plus à gauche

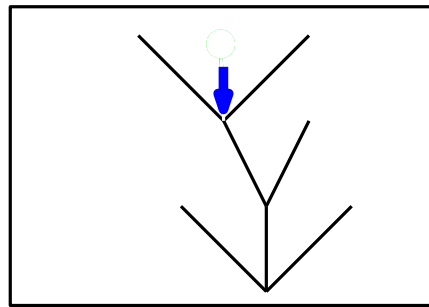
Formule de récurrence d'Harer-Zagier (1986)

- Classique : pour $g = 0$, bijection de Rémy [Rémy 85]

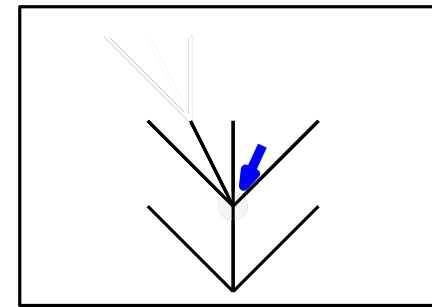
$$(n + 1)\text{Cat}(n) = 2 \times (2n - 1)\text{Cat}(n - 1)$$



arbre, n arêtes, un sommet marqué



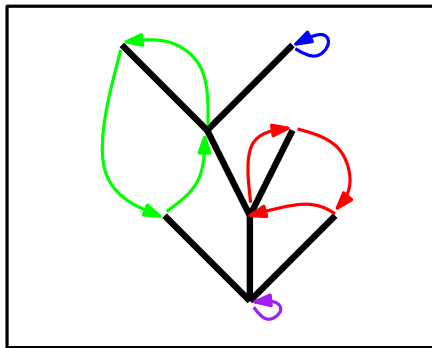
cas a : c'est une feuille. On l'efface



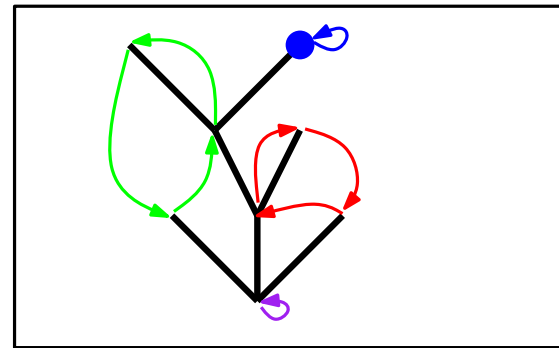
cas b : Ce n'est pas un feuille. On contracte l'arête la plus à gauche

- Puis, pour g général :

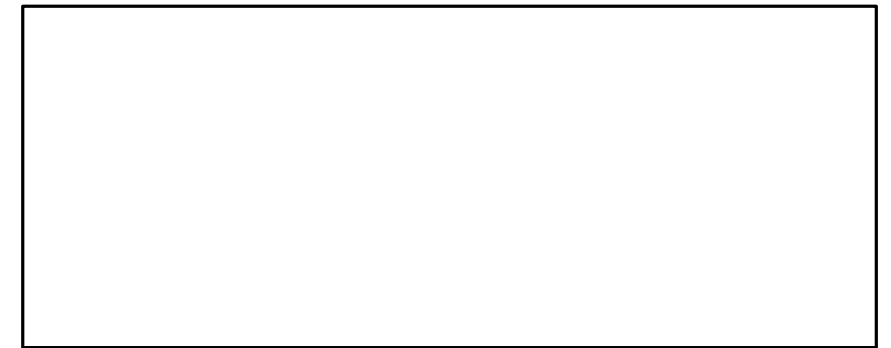
$$(n + 1)\epsilon_g(n) = 2(2n - 1)\epsilon_g(n - 1) + (n - 1)(2n - 1)(2n - 3)\epsilon_{g-1}(n - 2)$$



arbre C -décoré, n arêtes, genre g , un sommet marqué



cas 1 : c'est un point fixe : appliquer la bijection de Rémy (un sommet disparaît)

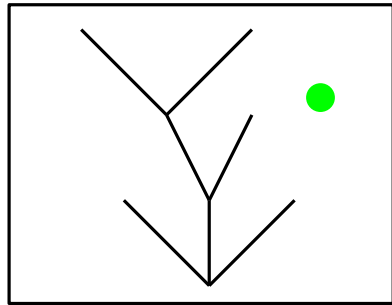


cas 2 : le sommet est dans un $(2k + 1)$ -cycle. Appliquer Rémy deux fois ! (deux sommets disparaissent, la longueur de cycle décroît de 2)

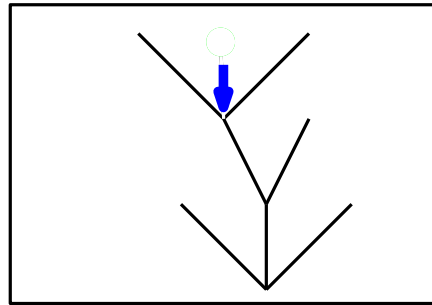
Formule de récurrence d'Harer-Zagier (1986)

- Classique : pour $g = 0$, bijection de Rémy [Rémy 85]

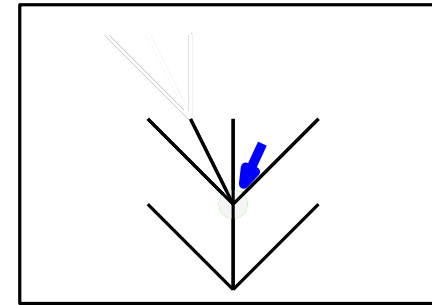
$$(n + 1)\text{Cat}(n) = 2 \times (2n - 1)\text{Cat}(n - 1)$$



arbre, n arêtes, un sommet marqué



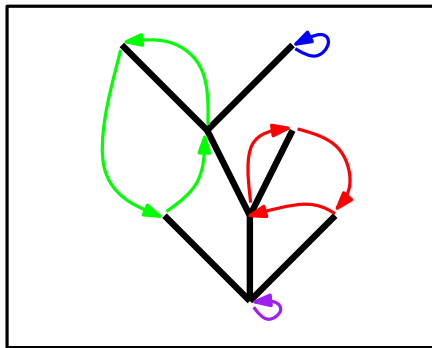
cas a : c'est une feuille. On l'efface



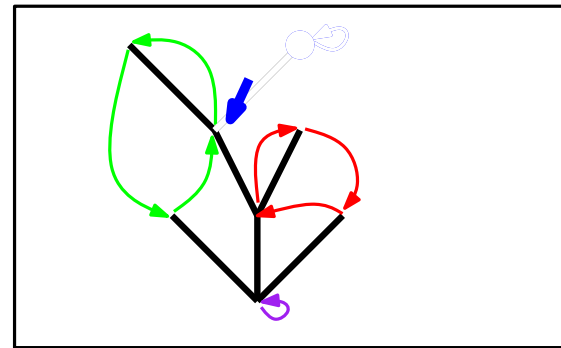
cas b : Ce n'est pas un feuille. On contracte l'arête la plus à gauche

- Puis, pour g général :

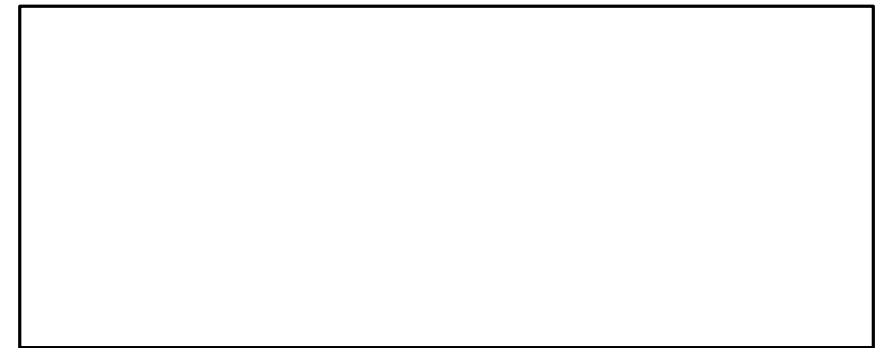
$$(n + 1)\epsilon_g(n) = 2(2n - 1)\epsilon_g(n - 1) + (n - 1)(2n - 1)(2n - 3)\epsilon_{g-1}(n - 2)$$



arbre C -décoré, n arêtes, genre g , un sommet marqué



cas 1 : c'est un point fixe : appliquer la bijection de Rémy (un sommet disparaît)

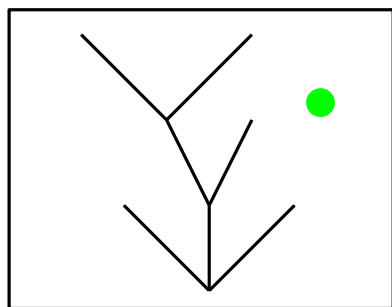


cas 2 : le sommet est dans un $(2k + 1)$ -cycle. Appliquer Rémy deux fois ! (deux sommets disparaissent, la longueur de cycle décroît de 2)

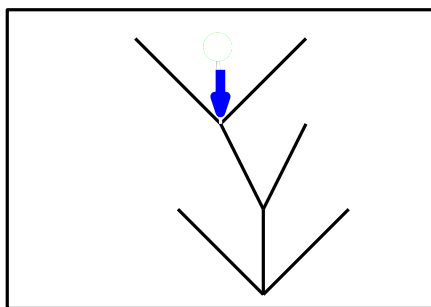
Formule de récurrence d'Harer-Zagier (1986)

- Classique : pour $g = 0$, bijection de Rémy [Rémy 85]

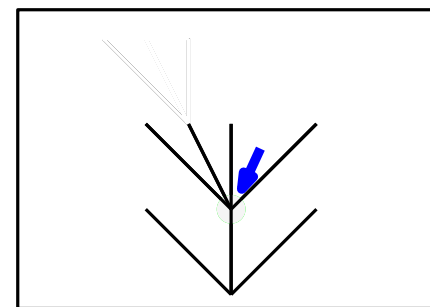
$$(n + 1)\text{Cat}(n) = 2 \times (2n - 1)\text{Cat}(n - 1)$$



arbre, n arêtes, un sommet marqué



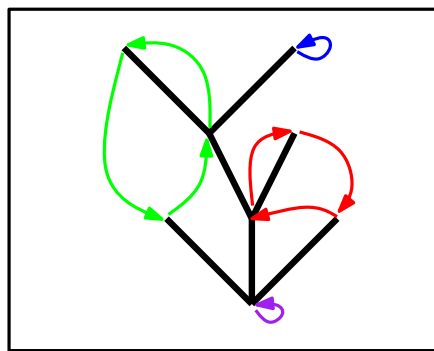
cas a : c'est une feuille. On l'efface



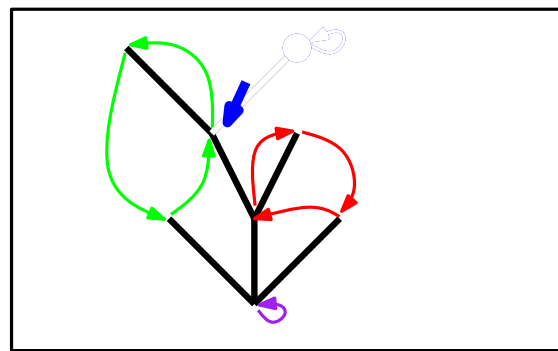
cas b : Ce n'est pas un feuille. On contracte l'arête la plus à gauche

- Puis, pour g général :

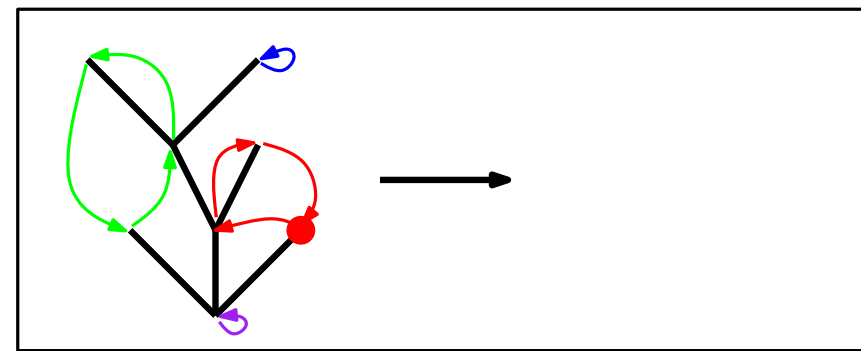
$$(n + 1)\epsilon_g(n) = 2(2n - 1)\epsilon_g(n - 1) + (n - 1)(2n - 1)(2n - 3)\epsilon_{g-1}(n - 2)$$



arbre C -décoré, n arêtes, genre g , un sommet marqué



cas 1 : c'est un point fixe : appliquer la bijection de Rémy (un sommet disparaît)

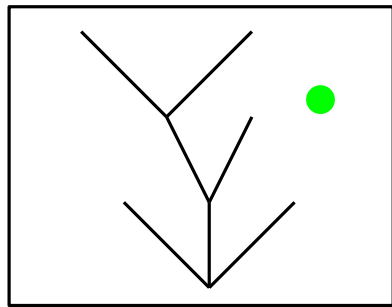


cas 2 : le sommet est dans un $(2k + 1)$ -cycle. Appliquer Rémy deux fois ! (deux sommets disparaissent, la longueur de cycle décroît de 2)

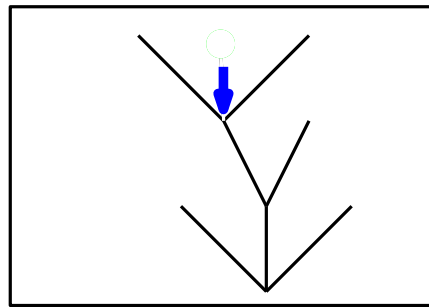
Formule de récurrence d'Harer-Zagier (1986)

- Classique : pour $g = 0$, bijection de Rémy [Rémy 85]

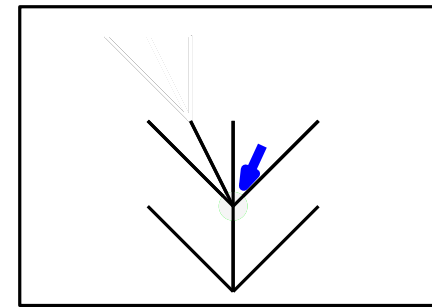
$$(n + 1)\text{Cat}(n) = 2 \times (2n - 1)\text{Cat}(n - 1)$$



arbre, n arêtes, un sommet marqué



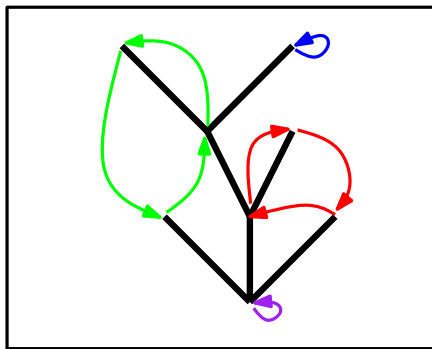
cas a : c'est une feuille. On l'efface



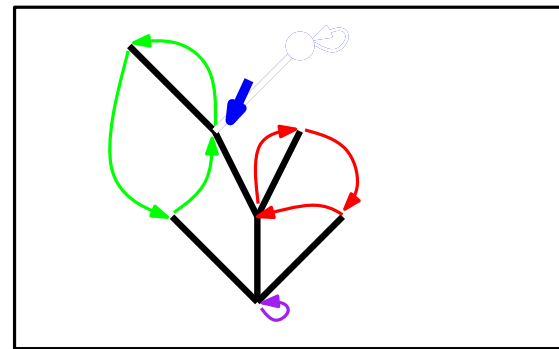
cas b : Ce n'est pas un feuille. On contracte l'arête la plus à gauche

- Puis, pour g général :

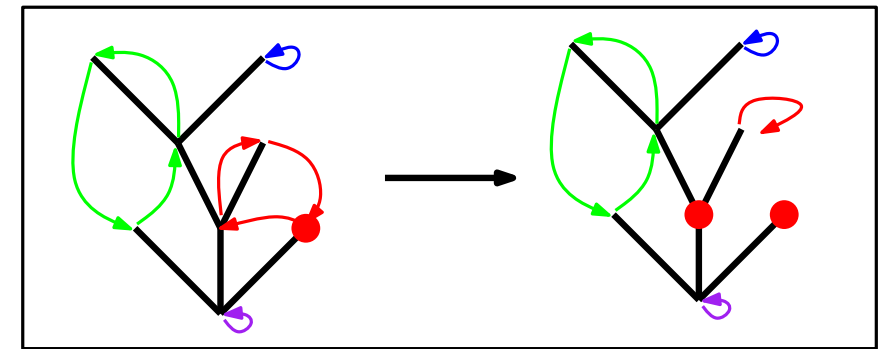
$$(n + 1)\epsilon_g(n) = 2(2n - 1)\epsilon_g(n - 1) + (n - 1)(2n - 1)(2n - 3)\epsilon_{g-1}(n - 2)$$



arbre C -décoré, n arêtes, genre g , un sommet marqué



cas 1 : c'est un point fixe : appliquer la bijection de Rémy (un sommet disparaît)

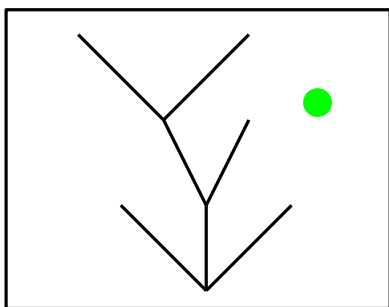


cas 2 : le sommet est dans un $(2k + 1)$ -cycle. Appliquer Rémy deux fois ! (deux sommets disparaissent, la longueur de cycle décroît de 2)

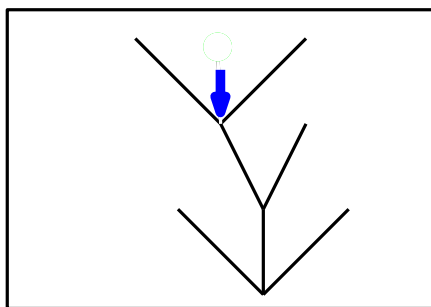
Formule de récurrence d'Harer-Zagier (1986)

- Classique : pour $g = 0$, bijection de Rémy [Rémy 85]

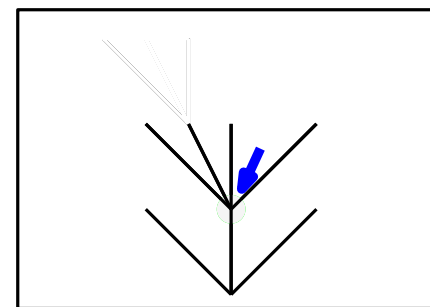
$$(n + 1)\text{Cat}(n) = 2 \times (2n - 1)\text{Cat}(n - 1)$$



arbre, n arêtes, un sommet marqué



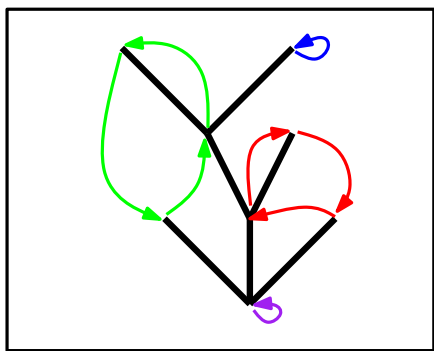
cas a : c'est une feuille. On l'efface



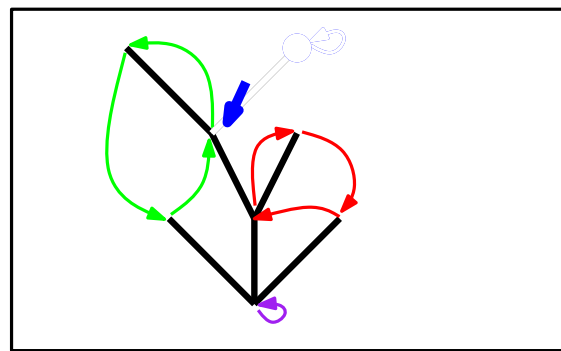
cas b : Ce n'est pas un feuille. On contracte l'arête la plus à gauche

- Puis, pour g général :

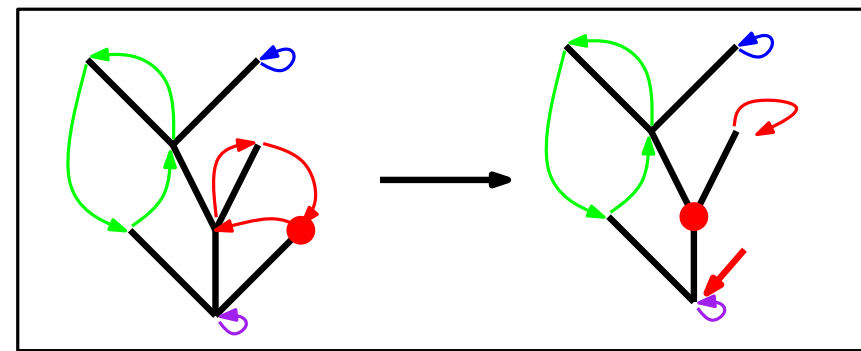
$$(n + 1)\epsilon_g(n) = 2(2n - 1)\epsilon_g(n - 1) + (n - 1)(2n - 1)(2n - 3)\epsilon_{g-1}(n - 2)$$



arbre C -décoré, n arêtes, genre g , un sommet marqué



cas 1 : c'est un **point fixe** : appliquer la **bijection de Rémy** (un sommet disparaît)

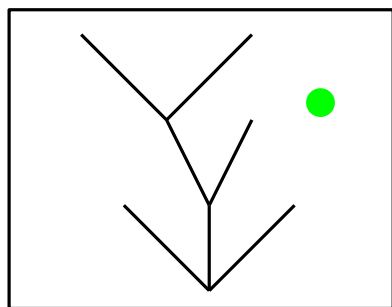


cas 2 : le sommet est dans un $(2k + 1)$ -cycle. Appliquer **Rémy deux fois!** (deux sommets disparaissent, la longueur de cycle décroît de 2)

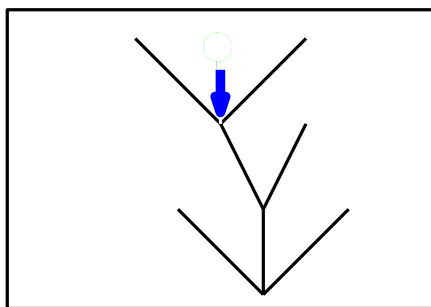
Formule de récurrence d'Harer-Zagier (1986)

- Classique : pour $g = 0$, bijection de Rémy [Rémy 85]

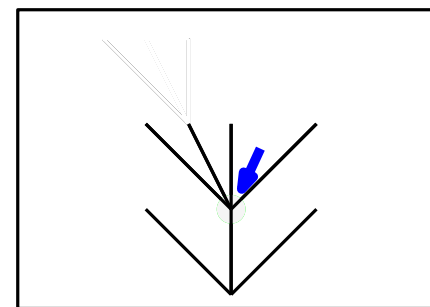
$$(n + 1)\text{Cat}(n) = 2 \times (2n - 1)\text{Cat}(n - 1)$$



arbre, n arêtes, un sommet marqué



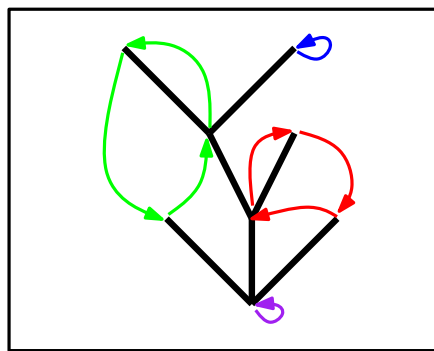
cas a : c'est une feuille. On l'efface



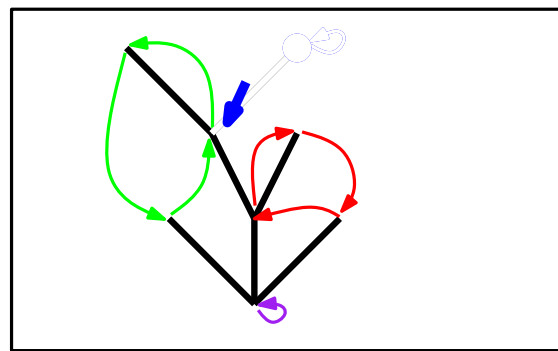
cas b : Ce n'est pas un feuille. On contracte l'arête la plus à gauche

- Puis, pour g général :

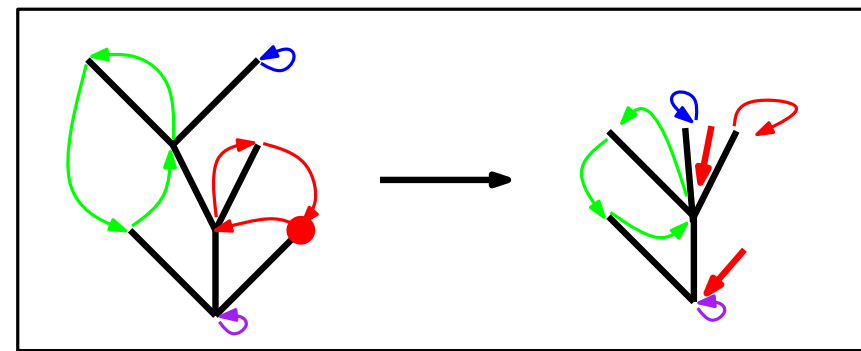
$$(n + 1)\epsilon_g(n) = 2(2n - 1)\epsilon_g(n - 1) + (n - 1)(2n - 1)(2n - 3)\epsilon_{g-1}(n - 2)$$



arbre C -décoré, n arêtes, genre g , un sommet marqué



cas 1 : c'est un point fixe : appliquer la bijection de Rémy (un sommet disparaît)



cas 2 : le sommet est dans un $(2k + 1)$ -cycle. Appliquer Rémy deux fois ! (deux sommets disparaissent, la longueur de cycle décroît de 2)

Conclusion

- C'est une série d'exercices rigolos de retrouver toutes les formules sur les cartes à une face, bijectivement avec les arbres C -décorés. Il faut juste connaître ses classiques (compter les permutations, les arbres...).
- Par exemple les formules de Goupil-Schaeffer (avec tous les degrés)
- On obtient aussi une nouvelle expression des caractères du groupe symétrique grâce aux expressions de V. Féray en termes de cartes à une face (utile?)
- Ensuite ?
 - constellations à une face ? ([Poulalhon-Schaeffer 02, Bernardi-Morales 11, Vassilieva 12])
(problème : pas de version de la bijection déjà vue au séminaire cartes)
 - surfaces non-orientables ?
(problème : la bijection déjà vue ne marche qu'asymptotiquement)
 - remplacer \mathfrak{S}_n par un groupe de Coxeter général.
(presque) tout reste à faire

Ouverture : groupes de réflexions (= de Coxeter)

- On peut voir \mathfrak{S}_n comme un sous groupe de $GL(V)$ où $V = \{x_1 + x_2 + \dots + x_n\}$
- C'est un sous-groupe fini de $GL(V)$ engendré par des réflexions, les transpositions (i, j) pour $1 \leq i < j \leq n$. C'est un groupe de réflexions (réel)
- $c = (1, 2, \dots, n)$ est un élément très spécial appelé élément de Coxeter.

On dit que \mathfrak{S}_n a rang $N = n - 1$ et nombre de Coxeter $h = n$ (ordre de c)

- **Théorème** [Deligne 1974] $\#\{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_N = c\} = \frac{N!}{|W|} h^N$

pour \mathfrak{S}_n : n^{n-2} formule de Cayley pour les arbres !

- **Théorème** [C.-Stump 2012]

$$\sum_{\ell \geq 0} \frac{x^\ell}{\ell!} \#\{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_\ell = c\} = \frac{1}{|W|} \left(e^{\frac{th}{2}} - e^{-\frac{th}{2}} \right)^N$$

“cartes à une face” de genre supérieur (version groupes de Coxeter)

MERCI!