

N° d'ordre : 285-2005

Année 2005

# THÈSE

présentée devant

**L'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON I**

**Ecole Doctorale de Mathématiques et Informatique Fondamentale**

pour l'obtention du

DIPLÔME DE DOCTORAT

présentée et soutenue publiquement le

**12 Décembre 2005**

Pierre CHARBIT

## **Plongements de Graphes et Étude des Circuits**

Directeur de thèse :

J.A. Bondy

### RAPPORTEURS :

Noga Alon  
Vašek Chvátal  
Sylvain Gravier

### JURY :

John Adrian Bondy  
Jean Fonlupt  
Jean-Luc Fouquet  
Sylvain Gravier  
Stéphan Thomassé



# Remerciements

En premier lieu, je tiens évidemment à remercier très chaleureusement mon directeur de thèse Adrian Bondy. C'est grâce à lui que j'ai découvert et aimé la théorie des graphes, d'abord dans son cours de D.E.A. puis tout au long de ma thèse, pendant laquelle j'ai pu profiter de sa connaissance encyclopédique de ces questions. Je suis extrêmement heureux et chanceux aussi d'avoir eu un directeur de thèse qui partage mon goût, voire besoin, du caractère esthétique des mathématiques (longue vie aux preuves du Livre!). Je le remercie enfin d'avoir été disponible tout au long de ma thèse lorsque j'avais besoin de lui.

Je veux aussi mentionner les gens avec qui j'ai travaillé durant cette thèse, mes co-auteurs ainsi que tout ceux avec qui j'ai pu discuter de combinatoire pendant ces trois années. Je suis définitivement convaincu que le monde de la recherche ne peut fonctionner sans cet échange permanent d'idées dont j'ai été le témoin, il est évident que deux cerveaux combinés vont beaucoup plus vite que deux cerveaux qui travaillent chacun dans leur coin. Je pense en particulier à András Sebő, avec qui j'ai eu des discussions et une collaboration très enrichissante. Mais bien évidemment, celui vers qui je dois adresser mes remerciements les plus sincères est Stéphane Thomassé. Les mois que nous avons passé à travailler ensemble ont été plus qu'importants pour ma thèse. Il a su me faire profiter de sa passion, de sa culture et de ses intuitions hors-normes et je lui en suis très reconnaissant.

Au titre des remerciements mathématiques, je tiens aussi à dire un mot de mes amis de l'époque où j'étais étudiant à Lyon. C'est avec eux que j'ai appris à faire et à aimer les mathématiques et ils sont tous un peu impliqués dans ce travail. Je tiens à remercier tout particulièrement Thierry qui, c'est évident, a eu une influence considérable sur ma façon de réfléchir et sur le type de maths que j'aime faire aujourd'hui (et au passage : longue vie au

Laboratoire de Math Alternatif!).

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Noga Alon, Vašek Chvátal et Sylvain Gravier, pour s'être intéressés à mon travail et pour avoir accepté d'être rapporteurs pour ma thèse.

Je remercie aussi bien sûr les Professeurs Jean-Luc Fouquet et Jean Fonlupt d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je veux enfin aussi remercier tous les membres du laboratoire de Probabilités, Combinatoire et Statistiques de l'Université Lyon 1, pour l'ambiance conviviale et détendue que j'ai pu y trouver, et qui a joué un rôle important dans le bon déroulement de ma thèse. En particulier, mes pensées vont à mes co-bureaux Stéphane et Véronique qui ont tous les deux contribué à faire du bureau 174 lieu de travail plus qu'agréable pendant trois ans.

Merci enfin à tous mes proches, amis, parents qui m'ont entouré et encouragé pendant cette période, et merci aussi à ceux qui ont pu faire le déplacement pour ma soutenance.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Définitions préliminaires.</b>	<b>7</b>
2.1	Graphes et digraphes. . . . .	7
2.2	Structures remarquables usuelles. . . . .	9
2.3	Connexité . . . . .	9
2.4	Fonctions classiques des graphes. . . . .	10
2.5	Outils de Programmation Linéaire . . . . .	11
2.6	Digraphes et Totale unimodularité : Quelques exemples . . . .	12
2.6.1	La matrice des circulations . . . . .	12
2.6.2	Théorème de Menger . . . . .	13
2.6.3	Partitions en chemins . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Ordres cycliques : Équivalence et Dualité</b>	<b>21</b>
3.1	Introduction . . . . .	21
3.2	Ordres Cycliques . . . . .	21
3.3	Équivalence d'ordres cycliques . . . . .	24
3.4	Ordres cycliques cohérents et Conjecture de Gallai . . . . .	28
3.4.1	Ordres cycliques cohérents . . . . .	28
3.4.2	Pondérations bornées par l'indice et Conjecture de Gallai	30
3.5	Feedback et Stables Cycliques . . . . .	33
3.5.1	Feedback Arc Sets Cycliques . . . . .	33
3.5.2	Pondérations Indice-Bornées des Arcs . . . . .	37
3.5.3	Stabilité Cyclique . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Longueur cyclique et Plongements</b>	<b>41</b>
4.1	Introduction . . . . .	41
4.2	Maille Cyclique . . . . .	42

---

4.3	Longueur Cyclique Maximum et Coloration Cyclique . . . . .	47
4.4	Retour à la maille cyclique et étude du cas général . . . . .	52
4.5	Inversions de circuits . . . . .	55
<b>5</b>	<b>La Conjecture de Caccetta-Häggkvist</b>	<b>57</b>
5.1	Introduction . . . . .	57
5.2	Plongements toriques . . . . .	60
5.3	Barycentres d'ordres totaux, Vote de majorité . . . . .	64
5.4	Algèbre linéaire . . . . .	70
5.5	Fonctions de Choix . . . . .	72
5.6	Structures Homogènes . . . . .	73
5.7	Programmation linéaire et Pondérations . . . . .	75
5.8	Dénombrement de Sous-Graphes . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Plongements de graphes non-orientés</b>	<b>77</b>
6.1	Introduction . . . . .	77
6.2	Définitions et Théorème . . . . .	78
6.3	Programmation semi définie . . . . .	81
<b>7</b>	<b>Matrices de parité et Feedback Arc set</b>	<b>87</b>
7.1	Un problème de Dimitri Grigoriev . . . . .	87
7.1.1	Une preuve probabiliste . . . . .	88
7.1.2	Une preuve déterministe . . . . .	89
7.1.3	Discussion sur les bornes . . . . .	92
7.1.4	Un algorithme polynômial déterministe . . . . .	92
7.2	Le Problème du Feedback Arc Set Minimum . . . . .	93
	<b>Bibliographie.</b>	<b>99</b>
	<b>Index.</b>	<b>103</b>

# Chapitre 1

## Introduction

Le thème central du travail exposé ici est l'étude de propriétés combinatoires des graphes à travers différents plongements. L'idée est de savoir comment on peut déduire des résultats sur divers invariants et grandeurs classiques en regardant des propriétés de nature géométrique de ces plongements. Ces considérations ont toujours été au coeur de la théorie des graphes, on peut citer les relations entre coloration et planarité comme un des premiers sujets étudiés par les combinatoriciens. Par la suite, les gens se sont intéressés à d'autres types de plongements dans des surfaces plus générales, et bon nombre de conjectures encore ouvertes aujourd'hui, on pense par exemple aux conjecture de Tutte sur les flots et leurs représentations, ou encore la Circuit Double Cover Conjecture sous toutes ses formes, ont motivé le travail de nombreux combinatoriciens dans la seconde moitié du vingtième siècle.

La première représentation que l'on va étudier est le plongement d'un digraphe sur le cercle unité. Plus précisément, on va essayer de donner dans les premiers chapitres de cette thèse une étude détaillée d'une notion introduite par Stéphane Bessy et Stéphan Thomassé : les Ordres Cycliques. Ils ont introduit puis utilisé cette notion dans une preuve datant de 2003 d'une conjecture énoncée par Tibor Gallai en 1964. Cette conjecture concerne le nombre minimum de circuits orientés nécessaires au recouvrement des sommets d'un digraphe fortement connexe, quantité dont on montre qu'elle est inférieure à un invariant classique de graphe : la stabilité, notée  $\alpha$ . L'idée centrale, étant donné un ordre cyclique, est d'étudier un circuit via son indice, c'est à dire le nombre de tours effectués par le circuit autour du cercle dans ce plongement. Ensuite, au lieu de montrer directement que l'on peut recouvrir

les sommets du digraphe par moins de  $\alpha$  circuits, ils montrent que si l'ordre est bien-choisi, on peut couvrir les sommets avec un ensemble de circuits dont la somme des indices est inférieure à  $\alpha$ . On montrera au Chapitre 2 comment on a pu avec Adrian Bondy faire une preuve très élémentaire de ce résultat via des théorèmes de dualité linéaire. D'autres résultats de types min-max faisant intervenir ces notions cycliques seront exposés. Un des aspects intéressants de ces notions est que bon nombre de fonctions classiques des graphes, telles que la stabilité, le nombre chromatique, la longueur maximum d'un circuit... dont la valeur n'est pas déterminable en temps polynômial, ont un équivalent dans le contexte des ordres cycliques qui est lui polynômialement calculable et souvent exprimable par un théorème de dualité de type min-max. Ce chapitre contient aussi une caractérisation des ordres cycliques obtenue en collaboration avec András Sebő ([20]). Enfin, la dernière section de ce chapitre est consacrée à l'étude des équivalents cycliques des notions de stable, de feedback arc set et de feedback vertex set, on donnera des caractérisations de ces notions ainsi que des théorèmes minmax mettant en jeu ces objets.

Le Chapitre 3 a pour objet l'étude du pendant cyclique de la notion de longueur d'un circuit, la longueur cyclique, c'est à dire la longueur usuelle divisée par l'indice. Le but est d'essayer d'obtenir des résultats sur la longueur classique en étudiant la longueur cyclique. Par exemple, un résultat sur la longueur cyclique maximum d'un circuit, en relation avec le nombre circulaire chromatique, avait déjà été obtenu par Bessy et Thomassé. Ce résultat impliquait en particulier un théorème de J.A. Bondy de 1971 affirmant que tout digraphe fortement connexe contient un circuit de taille supérieure au nombre chromatique. De nouveau on donnera de leur résultat une preuve simple basée sur la programmation linéaire, et on en donnera des généralisations et des extensions en relation toujours avec des plongement circulaires d'un digraphe. Au départ, cette étude était motivée par la direction inverse : peut-on déduire des considérations cycliques des résultats sur la longueur minimum d'un circuit orienté ? On essaiera aussi d'expliquer les limites de ces considérations. Les théorèmes exposés dans cette partie permettent aussi de donner une caractérisation en termes de longueur cyclique de la possibilité de partitionner les sommets d'un digraphe en  $k$  digraphes induits acycliques. On conclura ce chapitre par le résultat suivant : étant donné un digraphe fortement connexe, il est possible d'effectuer une suite d'inversions de circuits (inversion de l'orientation du circuit) afin d'obtenir un digraphe partitionnable en deux acycliques.



---

Dans le Chapitre 4, on veut présenter quelques résultats et réflexions sur une conjecture maintenant classique en théorie des graphes orientés, et qui date de 1978, la conjecture de Caccetta-Häggkvist. La question est la suivante : si on a un digraphe dont le degré sortant minimum est supérieur à  $n/k$ , montrer que le digraphe contient un circuit de taille inférieure ou égale à  $k$ . Cette question a été étudiée par de nombreux combinatoriciens, en dehors de l'article de L. Caccetta et R. Häggkvist ([17]), on peut citer les travaux de J.A. Bondy ([13]), de V. Chvátal et E. Szemerédi ([18]), de Y.O. Hamidoune, qui a démontré la conjecture pour les graphes sommets-transitifs ([31, 32]), de C.T. Hoàng et B. Reed ([33]), ou encore de J. Shen ([45, 46, 47]). En travaillant sur cette question, P. Seymour a aussi formulé la conjecture dite du second voisinage, qui implique un cas faible de la conjecture.

En fait, ce problème a motivé une grande partie du travail de cette thèse, et était par exemple une des raisons pour lesquelles on s'était intéressé initialement à l'étude de la longueur cyclique au Chapitre 4.

En premier lieu, on définit dans cette partie une large classe de graphes sans circuits de taille inférieure à un entier donné, qui contient notamment tous les exemples extrémaux à la conjecture. Cette famille est construite à partir de digraphes que l'on peut plonger dans des tores en respectant certaines contraintes de longueur sur les arcs. L'étude de cette classe nous permet d'infirmer une conjecture de J. Myers liée à celle de Caccetta-Häggkvist, liée dans le sens que si elle avait été vraie, cette conjecture aurait impliqué un cas particulier toujours ouvert de la conjecture de Caccetta-Häggkvist. La conjecture était la suivante : si un digraphe vérifie la propriété que toute paire de sommets a un voisin commun, alors ce digraphe contient un triangle orienté.

Ensuite, on s'intéresse à ce que nous appelons digraphes de majorité, c'est à dire les digraphes construits à partir d'une famille d'ordres totaux sur  $n$  éléments en mettant un arc  $ij$  pour toute paire telle que  $i$  précède  $j$  dans plus d'une certaine proportion fixée des ordres totaux de notre famille. On verra comment ces digraphes sont reliés à la conjecture de Caccetta-Häggkvist.

Enfin, dans les autres sections de ce chapitre, on décrira un certain nombre de pistes d'étude explorées durant ma thèse, en fournissant des énoncés équivalents ou plus forts en termes de fonctions de choix, de structures homogènes, de pondérations ou encore d'algèbre linéaire.

Le Chapitre 5 traite d'un autre problème de plongement, celui-ci concernant des graphes non-orientés. Le contexte initial est celui des graphes sans triangles. Il est à noter que la connaissance de ces graphes a progressé de façon significative l'an dernier puisque S.Brandt et S. Thomassé ont montré que le nombre chromatique de ces graphes était borné par 4 si l'on suppose leur degré minimum supérieur à  $n/3$ . Certes ils sont non-orientés, mais des graphes sans triangles avec degré minimum  $n/3$ , cela n'est évidemment pas sans rappeler la conjecture de Caccetta-Häggkvist. En fait, les plongements mis en jeu dans cette partie sont en quelque sorte des analogues des plongements toriques considérés au chapitre 4, puisqu'on cherche encore à représenter une large famille de graphes sans triangles (ici non-orientés) par des plongements pour lesquels on impose des contraintes sur la longueur des arêtes. Plus précisément, on s'intéresse ici à un problème énoncé par M. Rosenfeld en 1972, et popularisé par Erdős dans les années qui suivirent.

La question initiale était de savoir si tout graphe sans triangle pouvait être plongé dans une sphère euclidienne unité de telle façon que deux sommets reliés soient à distance strictement supérieure à  $\sqrt{3}$  (autrement dit l'angle formé avec l'origine est supérieur à  $2\pi/3$ ). En 1978, D. Larman a infirmé cette conjecture, en construisant un graphe sans triangle pour lequel la distance minimale entre deux extrémités d'une arête ne pouvait excéder  $\sqrt{8/3}$ . De plus, il avait conjecturé que la bonne réponse pour cette distance minimum était  $\sqrt{2}$  (donc un angle minimum  $\pi/2$ ), c'est à dire pas mieux que pour la classe de tous les graphes.

La conjecture de Larman a été prouvée indépendamment par M. Rosenfeld et V. Rödl. Dans son papier, Rödl a même prouvé qu'on ne pouvait pas avoir de meilleure borne que  $\sqrt{2}$  pour des graphes de maille *impaire* arbitrairement grande. Dans ce chapitre, on expose la preuve obtenue avec S. Thomassé ([21]) du fait que ceci est encore vrai pour des graphes de maille arbitrairement grande. La preuve de ce résultat est basée sur deux ingrédients, d'une part les méthodes probabilistes et d'autre part les liens étroits entre coupes et plongements sphériques mis en lumière par Goemans et Williamson dans leur travail sur le problème du max-cut ([28]).

Dans le dernier chapitre, on s'intéresse encore aux circuits puisqu'on va parler de feedback arc set. Ce sont les ensembles d'arcs dont le retrait produit un digraphe acyclique, et c'est donc naturellement une notion centrale lorsqu'on étudie la structure des circuits d'un digraphe. On aura d'ailleurs déjà discuté de cette notion au chapitre 3 puisqu'elle est directement reliée aux

plongements circulaires et aux ordres cycliques. Ce sixième chapitre contient la réponse à une conjecture de Bang-Jensen et Thomassen concernant les feedback arc set minimum des tournois. La question posée était de montrer que la détermination de la taille minimum d'un tel ensemble d'arcs constitue un problème NP-dur pour la classe des tournois, chose qui avait déjà été démontrée pour la classe des digraphes. En fait, la preuve exposée ici consiste en une réduction polynômiale de ce problème pour les tournois à celui des digraphes. C'est le fruit d'un travail mené avec Stéphan Thomassé et Anders Yeo en Juin 2005 ([22]). On tient à signaler ici que Noga Alon avait fait une preuve différente de ce résultat quelques mois auparavant, mais qui nous était inconnue au moment de la soumission de l'article.

Notre démonstration est en fait contenue dans la deuxième section de ce chapitre, la première étant consacrée à un problème en apparence disjoint, mais dont la preuve est un des outils qui servira dans la preuve de la Conjecture de Bang-Jensen et Thomassen. La question, liée à un article de Dimitri Grigoriev est la suivante. On considère un ensemble fini  $X$  ainsi qu'un ensemble fixé  $\mathcal{F}$  de parties de  $X$ . Maintenant étant donnée une partie  $A$  de  $X$ , on peut s'intéresser au nombre de parties de  $\mathcal{F}$  qui ont une intersection de taille paire avec  $A$ . Dans un de ses articles ([30]), Grigoriev s'est servi du fait qu'il était capable de garantir l'existence d'une partie  $A$  tel que ce nombre soit compris entre  $1/3$  et  $2/3$  des éléments de  $\mathcal{F}$ . Bien sûr, l'intuition est qu'il existe une partie qui intersecte environ la moitié des éléments de  $\mathcal{F}$  de façon paire. Ce que l'on prouve ici, c'est qu'il existe une partie pour laquelle ce nombre est compris entre  $|\mathcal{F}|/2 - \sqrt{|\mathcal{F}|}/2$  et  $|\mathcal{F}|/2 + \sqrt{|\mathcal{F}|}/2$  et que l'on peut trouver une telle parité en temps polynômial. Ce travail est issu d'un article écrit en collaboration avec P. Koiran, S. Perifel et S. Thomassé ([19]).



# Chapitre 2

## Définitions préliminaires.

On donne dans ce premier chapitre, les définitions classiques de théorie des graphes ainsi que les conventions de notations, qui permettent à ce document d'être "auto-contenu". Ces définitions peuvent être retrouvées avec plus de détails dans les ouvrages de référence du sujet, comme [5], [8], [29], [25] et bien sûr [14].

### 2.1 Graphes et digraphes.

Un *graphe non-orienté*  $G$  (ou plus simplement *graphe*) est un couple d'ensembles finis  $(V(G), E(G))$  où  $E(G)$  est constitué de paires (non ordonnées) de  $V(G)$ . Les éléments de  $V(G)$  sont appelés *sommets* de  $G$  et ceux de  $E(G)$  *arêtes* de  $G$ .

Si aucune confusion n'est possible on note  $V$  et  $E$  au lieu de  $V(G)$  et  $E(G)$ . On utilisera la notation simplifiée  $xy$  ou  $yx$  pour l'arête  $\{x, y\}$ .

Une arête de type  $xx$  est appelée *boucle* de  $G$ . Si  $e = xy$  est une arête de  $G$ , on dit que  $x$  et  $y$  sont *voisins* dans  $G$  et qu'ils forment les *extrémités* de  $e$ . On définit le *voisinage* d'un sommet  $x$  dans un graphe  $G$  comme l'ensemble de ses voisins, on le note  $N_G(x)$  ou  $N(x)$  s'il n'existe pas d'ambiguïté sur le graphe considéré. Le *degré* de  $x$  dans  $G$  est le cardinal de  $N_G(x)$ , et on le note  $d_G(x)$ . Pour une partie  $X$  de  $V$  on définit  $N_G(X)$  comme l'union des voisinages des éléments de  $X$ .

$N_G(x), d_G(x)$

De même, un *digraphe*  $D$  est un couple d'ensembles finis  $(V(D), E(D))$

où  $E(D)$  est constitué de couples (ordonnés) de  $V(D)$ .

Les éléments de  $V(D)$  sont aussi appelés *sommets* de  $D$  et ceux de  $E(D)$  *arcs* de  $D$ . Si aucune confusion n'est possible, on notera aussi  $V$  et  $E$  pour  $V(D)$  et  $E(D)$ . Similairement, on notera  $xy$  l'arc  $(x, y)$ , et un arc de type  $xx$  est encore appelé une *boucle* de  $D$ . Si  $e = xy$  est un arc de  $D$ , on dit que  $x$  *domine*  $y$ ,  $x$  est alors le *début* de  $e$  et  $y$  la *fin* de  $e$  et on note aussi parfois  $x \rightarrow y$ .

$N_D^+(x), x^+$

Le *voisinage sortant* (resp. *voisinage entrant*) d'un sommet  $x$  est l'ensemble des sommets dominés par  $x$  (resp. dominant  $x$ ), on le note  $N_D^+(x)$  ou  $x^+$  si il n'existe pas d'ambiguïté sur le digraphe considéré (resp.  $N_D^-(x)$  ou  $x^-$ ). Le cardinal de  $N_D^+(x)$  (resp.  $N_D^-(x)$ ) est appelé *degré sortant* (resp. *degré entrant*) de  $x$  dans  $D$  et est noté  $d_D^+(x)$  (resp.  $d_D^-(x)$ ). De même que pour les graphes, pour une partie  $X$  de  $V$ , on note  $N_D^+(X)$  (resp.  $N_D^-(X)$ ) l'union des voisinages sortants (resp. entrants) des éléments de  $X$ . Si il n'existe pas d'ambiguïté sur le digraphe considéré, on note plus simplement  $X^+$  (resp.  $X^-$ ) cet ensemble.

Un *sous-graphe*  $G'$  d'un graphe  $G$  est un graphe vérifiant  $V(G') \subset V(G)$  et  $E(G') \subset E(G)$ . On dit alors que  $G$  *contient*  $G'$ . Si  $V(G') = V(G)$ ,  $G'$  est un *sous-graphe couvrant* de  $G$ , donc, sauf mention contraire, un graphe est couvrable par un autre s'il l'est au sens des sommets. En notant  $V(G') * V(G')$  les paires non-ordonnées de  $V(G')$ , si  $E(G') = E(G) \cap (V(G') * V(G'))$ , on dit que  $G'$  est un *sous-graphe induit* de  $G$ .

Pour  $X \subset V$ , on note  $G[X]$  le sous-graphe induit de  $G$  ayant l'ensemble  $X$  pour sommets, et on note  $G \setminus X$  le sous-graphe induit de  $G$  ayant  $V \setminus X$  pour sommets. De même, si  $F$  est un sous ensemble d'arêtes de  $G$ ,  $G - F$  désigne le graphe ayant les mêmes sommets que  $G$  mais possédant  $E \setminus F$  comme ensemble d'arêtes.

Pour une partie  $X$  de  $V$  le graphe  $G/X$  obtenu par *contraction* de  $X$  à partir de  $G$  est le graphe ayant pour sommet  $(V \setminus X) \cup v_X$  et pour arêtes  $\{xy \in E : x \notin X, y \notin X\} \cup \{v_X y : \text{si il existe } x \in X \text{ tel que } xy \in E\}$ .

Pour les digraphes, on définit de manière analogue *sous-digraphe*, *sous-digraphe induit*, *sous-digraphe couvrant*, *digraphe induit par une partie* et *digraphe obtenu par contraction*.

## 2.2 Structures remarquables usuelles.

Les définitions suivantes de chemins et circuits sont données pour un digraphe quelconque  $D = (V, A)$ . Cependant si on omet l'orientation des arcs, on obtient des définitions similaires pour les graphes.

Un *chemin orienté*  $P$  de  $D$  (ou plus simplement *chemin* de  $D$ ) est un sous-digraphe de  $D$ , de sommets  $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ , avec  $p \geq 0$  et d'arcs  $\{x_i x_{i+1} : i = 0, \dots, p-1\}$ . On dit que  $P$  est un chemin de  $x_0$  à  $x_p$  et on écrit  $P = x_0 x_1 \dots x_p$ , l'entier  $p$  étant la *longueur* de  $P$ . Les *extrémités* de  $P$  sont  $x_0$  et  $x_p$ , le *début* de  $P$  étant  $x_0$ , noté  $d(P)$  et la *fin* de  $P$  étant  $x_p$ , notée  $f(P)$ .

 $d(P), f(P)$ 

Un *cycle orienté*  $C$  de  $D$  (ou plus simplement *cycle* de  $D$ ) est un sous-digraphe de  $D$ , de sommets  $\{x_1, x_2, \dots, x_l\}$  avec  $l \geq 1$  et d'arcs  $\{x_i x_{i+1} : i = 1, \dots, l-1\} \cup \{x_l x_1\}$ . On note  $C = x_1 \dots x_l x_1$ , où l'entier  $l$  est la *longueur* du circuit  $C$ , notée  $l(C)$ .

Si tous les sommets de  $C$  sont distincts,  $C$  est appelé *circuit* de  $D$ .

Un graphe ou un digraphe sans circuit est dit *acyclique*. La *maille* d'un digraphe est la taille du plus petit circuit contenu dans le digraphe, et on la note  $g(D)$ .

On définit aussi la notion de *feedback vertex set* d'un digraphe  $D = (V, A)$ . C'est un ensemble de sommets  $X \subset V$  tels que  $D \setminus X$  est un digraphe acyclique. De façon similaire, un *feedback arc set* est un ensemble  $F \subset A$  tel que  $D - A$  est un digraphe acyclique (On a choisi pour ces deux notions d'utiliser la terminologie anglaise car même en français ce sont les dénominations qui sont les plus utilisées). On notera  $FVS(D)$  (resp.  $FAS(D)$ ) l'ensemble de tous les feedback vertex (resp. arcs) sets de  $D$ .

## 2.3 Connexité

Un graphe est dit *connexe* si deux sommets quelconques sont toujours reliés par un chemin. Une *composante connexe* d'un graphe est un sous-graphe connexe maximal. Il est immédiat de voir que les sommets d'un graphe se partitionnent selon les composantes connexes du graphe.

Un graphe connexe et acyclique est appelé un *arbre*.

Un digraphe est dit *fortement connexe* si, pour tous sommets  $x$  et  $y$ , il

existe un chemin de  $x$  à  $y$ .

Pour un digraphe  $D$ , on considère la relation suivante sur les sommets de  $D$  : il existe un chemin de  $x$  à  $y$  dans  $D$ . Cette relation est transitive et réflexive. Les ensembles de sommets maximaux par inclusion sur lesquels cette relation est symétrique sont appelés *composantes fortement connexes* de  $D$ .

## 2.4 Fonctions classiques des graphes.

Pour un graphe, ou un digraphe,  $D$  d'ensemble de sommets  $V$ , on définit un *stable* de  $D$  comme une partie de  $V$  dont les éléments sont deux-à-deux non reliés dans  $D$ . La *stabilité* de  $D$ , notée  $\alpha(D)$ , est la taille d'un plus grand stable de  $D$ . Un digraphe sans circuit de longueur inférieure ou égale à 2 et avec stabilité 1 est appelé un *tournoi*. En d'autres termes, un tournoi est obtenu par orientation d'un graphe complet (c'est-à-dire possédant toutes les arêtes possibles). Notons que de façon générale, on appelle *graphe orienté* un digraphe sans circuit de longueur inférieure ou égale à 2.

Dans un digraphe  $D = (V, A)$ , pour deux ensembles de sommets  $X$  et  $Y$ , on dit que  $S \subset V$  est un *séparateur de  $X$  à  $Y$*  si tout chemin de  $X$  à  $Y$  intersecte  $S$ . De manière générale, si pour un ensemble  $S$ , on peut trouver deux parties de  $V$  séparées par  $S$ , on dit que  $S$  est un *séparateur de  $D$* . A partir de là, on dit qu'un graphe ou un digraphe  $D$  est  *$k$ -connexe*, pour  $k \geq 1$ , si  $|D| > k$  et s'il ne possède pas de séparateur de taille strictement inférieure à  $k$ . La *connectivité* de  $D$  est le plus petit entier  $k \geq 1$  tel que  $D$  soit  $k$ -connexe, on la note  $\kappa(D)$ .

Pour un graphe ou un digraphe  $D = (V, A)$ , une  *$k$ -coloration* de  $D$  est une partition des sommets de  $D$  en  $k$  stables de  $D$ . Le plus petit entier  $k$  pour lequel  $D$  admet une  $k$ -coloration est appelé *nombre chromatique* de  $D$ , et est noté  $\chi(D)$ .



## 2.5 Outils de Programmation Linéaire

Dans les parties suivantes, on fera à de nombreuses reprises appel à des résultats d'optimisation combinatoire, principalement de programmation linéaire. On rappelle ici quelques définitions et quelques résultats classiques, dont les preuves peuvent être trouvées dans divers ouvrages de référence, comme par exemple [23], [43] ou le chapitre 30 sur l'optimisation combinatoire du Handbook of Combinatorics [29].

On appelle *polyèdre* un sous ensemble de  $\mathbb{R}^n$  défini par une intersection finie de demi-espaces. Autrement dit,  $P$  est un polyèdre signifie  $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$ , où  $\mathbf{A}$  une matrice réelle de taille  $m \times n$  et  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  (la notation  $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$  pour deux vecteurs de  $\mathbb{R}^m$  signifie  $u_i \leq v_i$  pour tout  $1 \leq i \leq m$ ). Un polyèdre borné est appelé *polytope*. On s'intéresse à des problèmes d'optimisation combinatoire de la forme :

$$\max\{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}. \quad (2.1)$$

Le dual d'un tel problème est :

$$\min\{\mathbf{y} \cdot \mathbf{b} : \mathbf{yA} \geq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}. \quad (2.2)$$

On fixe par convention à  $+\infty$  (respectivement  $-\infty$ ) la valeur du max (resp. min) si l'ensemble définition correspondant est vide.

On a le théorème de dualité suivant :

### **Théorème 2.1**

*Si au moins un des deux ensembles définis en 2.1 et 2.2 est non vide, alors*

$$\max\{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} = \min\{\mathbf{y} \cdot \mathbf{b} : \mathbf{yA} \geq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}.$$

En particulier on a comme conséquence le résultat suivant :

**Corollaire 2.1 (Lemme de Farkas)** *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

- Il existe  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  tel que  $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$
- Pour tout  $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{yA} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{y} \cdot \mathbf{b} \geq 0$

On utilise aussi souvent la propriété dite des *écarts complémentaires*. Cela s'exprime de la façon suivante : si  $x \in \mathbb{R}^n$  solution optimale du problème primal, et si  $x_i \neq 0$  alors dans le dual, la  $i$ -ème inégalité de contrainte est en fait une égalité pour toute solution optimale.

En combinatoire, on s'intéresse souvent aux solutions à coordonnées entières d'un programme linéaire, c'est ce que l'on appelle la programmation en nombre entiers. On donne ici une condition suffisante (mais certainement pas nécessaire) pour garantir l'existence de solution entières à un programme linéaire de type 2.1.

Si  $\mathbf{A}$  est une matrice à coordonnées entières, on dit que  $A$  est *totalelement unimodulaire* si toutes les matrices carrées extraites de  $A$  ont un déterminant appartenant à  $\{-1, 0, 1\}$ .

**Proposition 2.1** *Soit  $\mathbf{A}$  une matrice totalelement unimodulaire. Alors pour tous  $b \in \mathbb{Z}^n$  et  $c \in \mathbb{Z}^m$ , le problème linéaire 2.1 et son dual ont des solution optimales à coordonnées entières.*

### Preuve

La preuve est simple, et peut être retrouvée dans les ouvrages de référence mentionnés au début de la section. Il s'agit simplement d'appliquer le résultat classique selon lequel une matrice à coefficients entiers de déterminant 1 ou  $-1$  a une inverse à coefficients entiers. ■

## 2.6 Digraphes et Totale unimodularité : Quelques exemples

### 2.6.1 La matrice des circulations

Un résultat classique est de dire que la matrice d'incidence sommets arcs d'un digraphe  $D = (V, A)$  est totalelement unimodulaire. On rappelle que cette matrice  $\mathbf{M} = (m_{ij})$  est définie par :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ est le début de } a_j \\ -1 & \text{si } v_i \text{ est la fin de } a_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cela a des application classiques comme le théorème max cut min flow.

## 2.6. Digraphes et Totale unimodularité : Quelques exemples 13

Dans la preuve de la conjecture de Gallai que l'on va exposer au chapitre 3, on va utiliser comme fait central la totale unimodularité d'une certaine matrice. Cette matrice  $\mathbf{U}(D)$  a  $2n = 2|V|$  lignes et  $m = |A|$  colonnes et s'écrit :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

où  $\mathbf{M} = (m_{ij})$  est la matrice  $n \times m$  d'incidence de  $D$  et  $\mathbf{N} = (n_{ij})$  est la matrice  $n \times m$  définie par :

$$n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ est le début de } a_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Lemme 2.1** *Pour tout digraphe  $D$  la matrice  $U(D)$  définie en 2.3 est totalement unimodulaire*

### Preuve

Si  $\tilde{\mathbf{U}}$  est une sous-matrice carrée extraite de  $\mathbf{U}$ , il s'agit de montrer que son déterminant vaut 0, 1 ou  $-1$ . Soit  $\mathbf{B}$  la matrice obtenue à partir de  $\tilde{\mathbf{U}}$  de la façon suivante. Pour tout indice  $i$  tel que les deux lignes correspondantes de  $M$  et  $N$  apparaissent dans  $\tilde{\mathbf{U}}$  on soustrait celle de  $N$  à celle de  $M$ . Dans chaque colonne de  $\mathbf{B}$  il y a au plus deux entrées non-nulles et si il y en a exactement 2 alors il y a une entrée 1 et une entrée  $-1$ . Il est facile de montrer par induction sur la taille d'une telle matrice qu'elle a déterminant 1,  $-1$  ou 0. Comme le déterminant de  $B$  est égal à celui de  $\tilde{\mathbf{U}}$ , on a bien montré que  $\mathbf{U}$  est totalement unimodulaire.

■

Afin d'illustrer cette propriété, on va dans les deux paragraphes suivants montrer comment on peut en déduire la preuve de deux résultats min-max classiques. On a choisi d'exposer ces deux preuves pour deux raisons : d'abord, ce sont deux théorèmes qui sont très proches de la thématique du Chapitre suivant, et de plus parce que pour l'un comme pour l'autre ce ne sont pas les preuves qui sont classiquement données de ces résultats.

### 2.6.2 Théorème de Menger

On commence par un résultat de connectivité bien connu qui est le théorème de Menger [39]. Il s'énonce de la façon suivante.

**Théorème 2.2 (K. Menger [39], 1927)** Soient  $D = (V, A)$  un digraphe et  $X, Y$  deux parties de  $V$ . Le cardinal d'un séparateur minimal de  $X$  à  $Y$  est égal au nombre maximal de  $(X, Y)$ -chemins disjoints. En particulier,  $D$  est  $k$ -connexe si et seulement si  $|D| > k$  et si pour toutes parties  $X$  et  $Y$  de  $V$  de cardinalités au moins  $k$ , il existe  $k$  chemins disjoints de  $X$  à  $Y$ .

**Preuve :**

On considère le digraphe  $D'$  formé à partir de  $D$  en rajoutant un sommet  $v_0$  tel que  $N^+(v_0) = X$  et  $N^-(v_0) = Y$  (voir la Figure 2.1) ainsi que la matrice  $\mathbf{U}(D')$  défini comme précédemment. On extrait de cette matrice la matrice  $\tilde{\mathbf{U}}$  obtenue en retirant de  $\mathbf{U}$  les deux lignes correspondant au sommet  $v_0$ . Cette matrice est aussi totalement unimodulaire. On définit ensuite les vecteurs

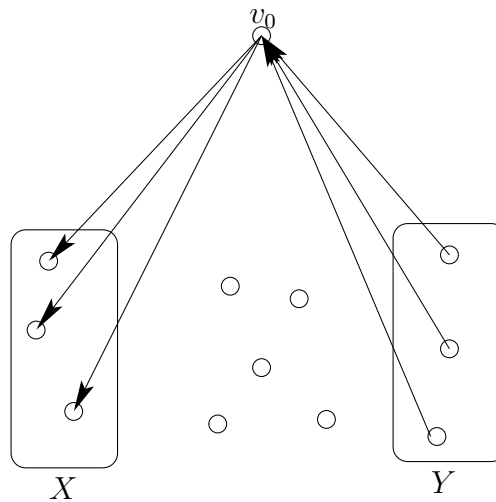


FIG. 2.1 – Le digraphe  $D'$

$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{2n})$  et  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)$  comme suit :

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$c_j = \begin{cases} 1 & \text{si le début de } a \text{ est } v_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## 2.6. Digraphes et Totale unimodularité : Quelques exemples 15

On considère le programme linéaire (P) :

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser} & \mathbf{cx} \\ \text{sous les contraintes} & \tilde{\mathbf{U}}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Grâce à la totale unimodularité, il existe des solutions optimales à coefficients entiers. Or, une solution entière de ce problème correspond à une union de circuits de  $D'$  dont le seul point d'intersection ne peut être que  $v_0$ . Autrement dit, cela représente une union disjointe de circuits de  $D$  et de  $(X, Y)$ -chemins dans  $D$  et on compte dans la fonction objectif exactement le nombre de chemins. Comme il est clair que toute union de  $(X, Y)$ -chemins disjoints est représentable par un vecteur solution, on obtient bien que ce problème correspond exactement à trouver le nombre maximal de  $(X, Y)$ -chemins disjoints.

Reste à examiner le dual. On obtient la formulation suivante pour (P\*) :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & \mathbf{yb} \\ \text{sous les contraintes} & \mathbf{yU} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Écrivons  $\mathbf{y} := (z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n)$ . Alors (P\*) est le problème de minimiser  $\sum_{i=1}^n w_i$  sous les contraintes

$$\begin{array}{ll} z_i - z_j + w_i \geq 0 & \text{si } v_i v_j \text{ arc de } D \\ z_i \geq 1 & \text{si } v_i \in X \\ w_i \geq z_i & \text{si } v_i \in Y \end{array}$$

Considérons une solution optimale entière de (P\*).

Soit  $S = \{v_i \in V : w_i \geq 1\}$ . Montrons que  $S$  est un séparateur de  $X$  à  $Y$ . En effet, si on somme les contraintes précédentes sur les arcs d'un  $(X, Y)$ -chemin  $P$  de  $D$  prolongé en un circuit de  $D'$  par deux arcs passant par  $v_0$ , on obtient l'inégalité

$$\sum_{v_i \in V(P)} w_i \geq 1.$$

Autrement dit,  $P \cap S \neq \emptyset$ . De plus, la valeur de la fonction objectif pour cette solution est supérieure à la taille de  $S$ .

Pour conclure il ne reste plus qu'à montrer que tout séparateur peut être représenté par une solution pour laquelle la valeur de la fonction objectif est égale à sa taille. Soit donc  $S$  un séparateur de  $X$  à  $Y$ . Définissons  $S_1$  comme l'ensemble des sommets  $v$  de  $D$  pour lesquels il existe un chemin orienté de  $A$  vers  $v$  dans  $D \setminus S$ , et  $S_2 = V \setminus (S \cup S_1)$ . On définit alors

$$\begin{aligned} (w_i, z_i) &= (0, 1) & \text{si } v_i \in S_1 \\ (w_i, z_i) &= (1, 1) & \text{si } v_i \in S \\ (w_i, z_i) &= (0, 0) & \text{si } v_i \in S_2 \end{aligned}$$

Par définition, il n'y a pas d'arcs de  $S_1$  vers  $S_2$  et comme  $S$  est un séparateur,  $Y \cap S_1 = \emptyset$ . Ceci implique que les contraintes du problème linéaire ( $P^*$ ) sont satisfaites et on a bien  $\sum w_i = |S|$ . ■

### 2.6.3 Partitions en chemins

Un autre résultat classique qui découle de la totale unimodularité de cette matrice est le cas particulier de la conjecture de Berge pour les digraphes acycliques. Pour ce problème on introduit la  $k$ -norme d'une partition  $\mathcal{P}$  des sommets d'un digraphe en chemins.

$$\|\mathcal{P}\|_k = \sum_{P \in \mathcal{P}} \min(k, |P|).$$

On note  $\pi_k = \min\{\|\mathcal{P}\|_k : \mathcal{P} \text{ partition de } D \text{ en chemins}\}$  et on appelle  $k$ -optimale une partition en chemins qui réalise ce min.

D'autre part, une  $k$ -coloration des sommets du digraphe est définie comme une union de  $k$  stables disjoints. On note  $\alpha_k$  la taille maximale d'une telle union.

Linial ([38]) a formulé la conjecture suivante.

**Conjecture 2.1 (Linial)** *Pour tout digraphe  $D$  et tout entier  $k$ ,  $\pi_k(D) \leq \alpha_k(D)$*

Le résultat est vrai dans le cas des digraphes transitifs acycliques (digraphe d'un ordre partiel), c'est le théorème de Greene-Kleitman qui démontre l'égalité dans ce cas particulier.

## 2.6. Digraphes et Totale unimodularité : Quelques exemples 17

Berge a renforcé cette conjecture en introduisant la notion d'orthogonalité. On dit qu'une  $k$ -coloration est *orthogonale* à une partition en chemins  $\mathcal{P}$  si chaque chemin  $P$  de  $\mathcal{P}$  rencontre exactement  $\min(|P|, k)$  classes de couleurs différentes. La conjecture de Berge ([9]) s'énonce ainsi :

**Conjecture 2.2 (Berge)** *Soit  $D$  un digraphe et  $k$  un entier. Si  $\mathcal{P}$  est une partition en chemins  $k$ -optimale, il existe une  $k$ -coloration qui lui est orthogonale.*

Le résultat que l'on va démontrer concerne les digraphes acycliques et est plus fort que la conjecture de Berge.

**Théorème 2.3** *Soit  $D = (V, A)$  est un digraphe acyclique et  $k$  un entier. Il existe une  $k$ -coloration de  $D$  orthogonale à toute partition en chemins  $k$ -optimale.*

**Preuve :**

De même que dans la preuve du théorème de Menger, on commence par modifier le graphe. On considère le digraphe  $D'$  obtenu en ajoutant un sommet  $v_0$  ainsi que tous les arcs (dans les deux sens) reliant  $v_0$  aux sommets de  $D$ . Enfin, on rajoute à  $D$  toutes les boucles sur chaque sommet de  $D$  (voir la Figure 2.2). Maintenant, une partition en chemins de  $D$  est exactement un recouvrement en circuits de  $D'$  dont le seul sommet commun ne peut être que  $v_0$ .

On définit aussi les vecteurs  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{2n})$  et  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{E(D)})$  par :

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ 1 & \text{si } n + 1 \leq i \leq 2n. \end{cases}$$

et

$$c_j = \begin{cases} k & \text{si } v_0 \text{ est le début de } a_j \\ 1 & \text{si } a_j \text{ est une boucle} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On étudie alors le programme linéaire (P) :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && \mathbf{c}\mathbf{x} \\ & \text{sous les contraintes} && \tilde{\mathbf{U}}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & && \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

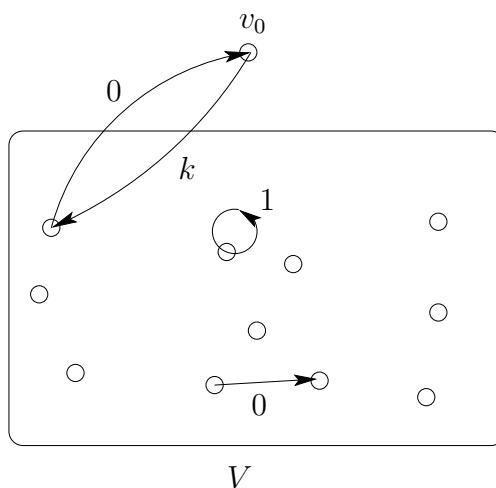


FIG. 2.2 – Le digraphe  $D'$  avec les poids donnés par le vecteur  $c$

On considère donc la matrice  $\mathbf{U}(D')$  définie au début de la section 2.3. On extrait de cette matrice la matrice  $\tilde{\mathbf{U}}$  obtenue en retirant de  $\mathbf{U}$  les deux lignes correspondant au sommet  $v_0$ . Cette matrice est alors aussi totalement unimodulaire.

La totale unimodularité de  $\tilde{\mathbf{U}}$  assure l'existence de solution optimales entières. Une telle solution représente un recouvrement en circuits de  $D'$  (disjoints sauf éventuellement en  $v_0$ , soit une partition en chemins de  $D$  (puisque  $D$  acyclique). De plus la fonction objectif compte  $k$  pour chaque circuit passant par  $v_0$  et 1 pour chaque boucle. Donc du point de vue des chemins, on compte  $k$  pour chaque chemin de longueur supérieure à 1 plus 1 pour chaque boucle. Il est donc clair qu'une solution optimale de ce problème est une partition en chemins  $k$ -optimale et que la valeur de la fonction objectif est sa  $k$ -norme.

Considérons le problème dual. Les variables de ce problème sont deux vecteurs  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$  correspondant aux sommets de  $D$  et on veut

$$\text{maximiser } \sum_{i=1}^n y_i$$



## 2.6. Digraphes et Totale unimodularité : Quelques exemples 19

sous les contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_i + z_j - z_i \leq 0 & \text{si } v_i v_j \text{ arc de } D \\ y_i - z_i \leq 0 & \text{pour tout } i \text{ (contraintes issues des arcs } (v_i, v_0)) \\ z_i \leq k & \text{pour tout } i \text{ (contraintes issues des arcs } (v_0, v_i)) \\ y_i \leq 1 & \text{pour tout } i \text{ (contraintes issues des boucles)} \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Le  $k$ -coloriage associé  $\mathcal{C}^k = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$  à une telle solution est défini par :

$$C_r = \{v_i : y_i = 1 \text{ et } z_i = r\}, r = 1, 2, \dots, k.$$

Cela définit bien une  $k$ -coloration. En effet, si  $v_i$  et  $v_j$  sont dans  $C_r$ ,  $y_i + z_j - z_i = 1$  et par (2.4), cela implique que ces sommets ne peuvent être reliés par un arc. Il reste à montrer que  $\mathcal{C}^k$  est orthogonal à toute partition en chemins  $k$ -optimale  $\mathcal{P}$ .  $\mathcal{P}$  est représentée par un vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^{E(D')}$  solution optimale du problème primal. Grâce aux écarts complémentaires, on sait que si une entrée de  $\mathbf{x}$  est non nulle, alors l'inégalité correspondante dans les contraintes est en fait une égalité. On distingue les deux cas : celui du chemin court (de longueur inférieure à  $k$ ) et celui du chemin long.

Soit  $P$  un chemin de  $\mathcal{P}$  tel que  $|P| \leq k$ . On a vu que ces chemins sont représentés dans  $\mathbf{x}$  par des boucles sur les sommets de  $P$ . Donc si  $v_i \in P$ , par écarts complémentaires on a  $y_i = 1$ , et puisque par (2.4), on a  $y_i \leq z_i \leq k$ , on sait que  $v_i$  appartient à une classe  $C_r$ . De plus, si  $(v_i, v_j) \in A$  et  $v_i \in C_r$ , alors par (2.4)  $z_j - z_i \leq -y_i = -1$ , ce qui implique que les couleurs dans  $P$  sont toutes distinctes.

Supposons maintenant que  $P$  soit un long chemin, c'est à dire  $|P| > k$ . Pour simplifier les notations, on note  $P = (v_1, \dots, v_l)$ . On a vu dans l'étude du primal que  $P$  est représenté par un circuit passant ar  $v_0$ . Et encore par écarts complémentaires, on sait qu'il y a égalité dans toutes les contraintes correspondant aux arcs de  $P$ . Donc :

$$\begin{aligned} z_1 &= k \\ z_{i+1} - z_i &= -y_i \quad \forall 1 \leq i \leq l-1 \\ z_l &= y_l. \end{aligned}$$

Or,  $y_i \leq 1$  donc les  $z_i$  ne décroissent que de 1 au plus à chaque arc du chemin. Comme  $z_l = y_l \leq 1$  cela signifie que si  $z_i = t$ , alors pour tout  $t'$

avec  $1 \leq t' \leq t$  il existe  $j \geq i$  tel que  $z_j = t'$ , c'est à dire une sorte de propriété des valeurs intermédiaires. Ainsi puisque  $z_1 = k$  toutes les valeurs entre 1 et  $k$  sont prises et on peut définir  $i_p = \max\{1 \leq i \leq l : z_i = p\}$ . Cela implique  $z_{i_p+1} = p - 1$  (par maximalité de  $i_p$ ) et donc  $y_{i_p} = 1$ , soit pour tout  $p$ ,  $v_{i_p} \in C_p$ . Autrement dit,  $P$  rencontre toutes les classes de  $\mathcal{C}^k$ , ce qui complète la preuve. ■

# Chapitre 3

## Ordres cycliques : Équivalence et Dualité

### 3.1 Introduction

La notion d'ordre cyclique a été introduite par S. Bessy et S. Thomassé dans [15] afin de prouver une conjecture de Gallai vieille de 40 ans, qui est maintenant le théorème suivant :

**Théorème 3.1 (Bessy - Thomassé, 2004)**

*Soit  $D$  un digraphe fortement connexe. Il existe un recouvrement des sommets de  $D$  par moins de  $\alpha$  circuits, où  $\alpha$  désigne la stabilité de  $D$ .*

La première remarque que l'on peut faire sur ce théorème est qu'il ne s'agit clairement pas d'un théorème min-max. En effet, si l'on considère le digraphe constitué d'un seul circuit orienté, ses sommets sont évidemment couvrables par un circuit alors que sa stabilité est de l'ordre de la moitié des sommets. Leur idée était donc de chercher un résultat min-max qui s'intercalerait entre ces deux quantités : le nombre minimum de circuits nécessaires pour couvrir les sommets et la taille maximum d'un stable.

### 3.2 Ordres Cycliques

On appelle *ordre linéaire* d'un (di)graphe  $G = (V, E)$  un ordre  $O = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  de ses sommets (c'est à dire une bijection de  $V$  dans  $\{1, \dots, n\}$ ).

Un *ordre circulaire* est la classe d'équivalence des ordres linéaires pour la relation : il existe  $1 \leq i \leq n$  tel que  $O = v_1, v_2, \dots, v_n$  et  $O' = v_i, \dots, v_n, v_1, \dots, v_{i-1}$ .

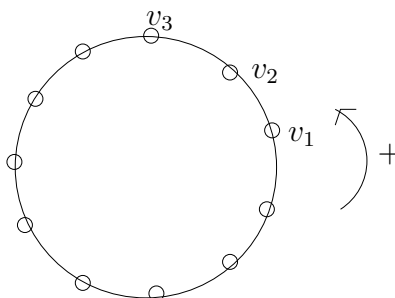


FIG. 3.1 – Un ordre circulaire avec sons sens de rotation

Dans un ordre linéaire  $O = v_1, \dots, v_n$ , un arc  $v_i v_j$  avec  $i < j$  est appelé *arc avant* de  $O$  et *arc retour* dans le cas contraire. On notera  $Ret(O)$  l'ensemble des arcs retour d'un ordre linéaire

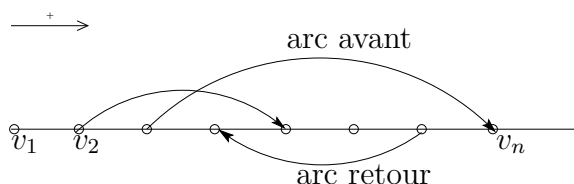


FIG. 3.2 – Arcs avant et retour dans un ordre linéaire

Avant de continuer, on va énoncer un lemme facile mais dont on se servira souvent par la suite. On commence par remarquer que l'ensemble des arcs retour forme clairement un feedback arc set du digraphe. Réciproquement on peut dire :

**Lemme 3.1** *Si  $D$  est un digraphe acyclique, il existe un ordre linéaire des sommets de  $D$  dans lequel tous les arcs sont des arcs avant. De façon équivalente, si  $F$  est un feedback arc set d'un digraphe  $D$ , alors il existe un ordre linéaire  $O$  des sommets de  $D$  tel que  $Ret(O) \subset F$ .*

### Preuve

Montrons qu'on peut représenter un digraphe acyclique avec tous ses arcs

vers l'avant. On procède par induction sur le nombre de sommets en retirant un sommet de degré sortant 0, et en plaçant ce sommet au début de l'ordre.

■

On reviendra dans la section 3.5 sur le lien entre feedback arc set et ordres linéaires.

Si  $O = v_1, \dots, v_n$  est un ordre linéaire sur les sommets de  $D$ , on définit la *longueur* d'un arc  $a = v_i v_j$  par  $(j - i)/n$  si  $a$  est un arc avant et par  $(n + j - i)/n$  si  $a$  est un arc retour.

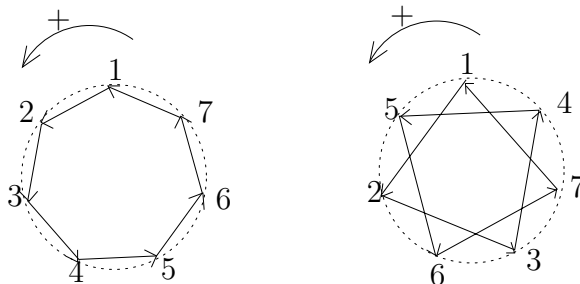


FIG. 3.3 – Le circuit de longueur 7, d'indice 1 à gauche, d'indice 2 à droite

Si un digraphe  $D$  est muni d'un ordre linéaire, et  $C$  est un circuit orienté de  $D$ , on peut définir la notion centrale de ce chapitre, *l'indice* de  $C$  par rapport à cet ordre, noté  $\text{ind}_O(C)$ . Visuellement, on représente le digraphe muni de son ordre sur un cercle de  $\mathbb{R}^2$  et on compte le nombre de tours que fait le circuit autour du cercle.

On peut formaliser ceci de plusieurs façons équivalentes. Par exemple on peut le définir comme le nombre d'arcs retour du circuit dans l'ordre linéaire choisi. On peut aussi remarquer que cela correspond aussi à la somme des longueurs des arcs d'un circuit. Selon le contexte on utilisera l'une ou l'autre de ces définitions équivalentes.

Il est facile de voir que l'indice d'un circuit est identique dans deux ordres linéaires appartenant au même ordre circulaire. En fait, on peut même raffiner cette remarque. Si on part d'un ordre linéaire  $O$  et qu'on permute deux sommets consécutifs non adjacents, l'ordre linéaire  $O'$  obtenu vérifie aussi

$\text{ind}_O(C) = \text{ind}_{O'}(C)$  pour tout circuit  $C$ . Cela conduit à la définition suivante : un ordre linéaire  $O = v_1, \dots, v_n$  est élémentairement équivalent à  $O'$  si l'une des deux propositions suivantes est vraie  $O' = v_n, v_1, \dots, v_{n-1}$  ou  $O' = v_2, v_1, \dots, v_n$  avec  $v_1$  et  $v_2$  non adjacents. Deux ordres linéaires  $O$  et  $O'$  sont *équivalents* (et on note  $O \sim O'$ ) si il existe une suite  $O = O_1, \dots, O_k = O'$  telle que  $O_i$  et  $O_{i+1}$  sont élémentairement équivalents pour  $i = 1, \dots, k - 1$ .

La remarque faite précédemment s'écrit donc pour deux ordres linéaires  $O$  et  $O'$  :

$$O \sim O' \implies \forall C \text{ circuit } \text{ind}_O(C) = \text{ind}_{O'}(C). \quad (3.1)$$

Les classes d'équivalence pour cette relation sont appelées *ordres cycliques* de  $D$ . On peut donc parler d'indice d'un circuit par rapport à un ordre cyclique.

Une question naturelle est de savoir si 3.1 est une équivalence. Autrement dit, si deux ordres linéaires ont les mêmes indices pour tous les circuits, sont-ils équivalents ? C'est la question que nous étudions dans la section suivante

### 3.3 Équivalence d'ordres cycliques

Avant d'énoncer le théorème principal de cette section, on fait la remarque suivante. Les définitions d'ordre linéaires, d'ordres cycliques restent valables si on considère un graphe non-orienté. De même, du moment qu'on décide d'un sens de parcours, l'indice d'un circuit dans un graphe non orienté est aussi bien défini. En fait, il suffit de voir un graphe non-orienté comme le digraphe obtenu par remplacement de toutes les arêtes par deux arcs opposés. On va alors énoncer le résultat d'équivalence des ordres cycliques

**Théorème 3.2** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe non-orienté et  $O_1$  et  $O_2$  deux ordres linéaires de  $V$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $O_1 \sim O_2$
- (ii) *L'indice de tout circuit est le même par rapport à  $O_1$  et  $O_2$ .*

Cela implique par exemple que pour les forêts, tous les ordres cycliques sont équivalents (ce qui est facile à vérifier). Remarquons aussi que ce théorème donne une bonne caractérisation (un certificat linéaire dans  $NP \cap coNP$ ) pour l'équivalence de deux ordres cycliques.

**Preuve**

On a déjà constaté précédemment que (i) implique (ii), on démontre la réciproque par induction sur le nombre d'arêtes de  $G$ .

Soit  $e = xy \in E$ , ( $x, y \in V$ ).

Par hypothèse d'induction, le résultat est vrai pour  $G \setminus e$ , donc il existe une suite  $\pi_1, \dots, \pi_k$  d'opérations élémentaires qui permet de passer de  $O_1$  à  $O_2$  dans  $G - e$ . Une opération élémentaire de  $G - e$  est aussi une opération élémentaire de  $G$ , à l'exception des permutations de  $x$  et  $y$ . Si cette opération n'intervient pas, on a gagné. On a bien une suite d'opérations élémentaires de  $G$  qui permettent de passer de  $O_1$  à  $O_2$ .

**Fait :** Si la permutation de  $x$  et  $y$  appartient à la suite  $\pi_1, \dots, \pi_k$ , alors il existe  $O'_1, O'_2$ ,  $O'_1 \sim O_1$ ,  $O'_2 \sim O_2$  tels que  $x$  précède  $y$  dans  $O'_1$  et  $O'_2$ , où  $y$  précède  $x$  dans les deux.

Montrons d'abord que cette affirmation permet de démontrer le théorème : comme  $e$  relie deux sommets consécutifs dans à la fois  $O'_1$  et  $O'_2$ , et dans le même ordre, ces ordres définissent clairement des ordres  $O''_1, O''_2$  de  $G/e$  (le graphe obtenu après contraction de  $e$ ) ; de plus, comme (i) implique (ii), la condition (ii) est toujours vérifiée pour  $O'_1$  et  $O'_2$ , et donc aussi pour  $O''_1$  et  $O''_2$ . Comme  $G/e$  a moins d'arêtes que  $G$ , par hypothèse d'induction  $O''_1 \sim O''_2$ , et les opérations élémentaires de  $G/e$  correspondent de façon évidente à une ou deux opérations de  $G$ .

Afin de prouver le Fait, soient  $i, j$ ,  $1 \leq i \leq j \leq k$  les indices respectivement de la première et dernière opération  $\pi$  égale à la permutation de  $x$  et  $y$ . Soit  $O'_1$  l'ordre cyclique obtenu à partir de  $O_1$  si on s'arrête juste avant  $\pi_i$ , et  $O'_2$  l'ordre obtenu en s'arrêtant juste après  $\pi_j$ . Alors  $O'_1 \sim O_1$ ,  $O'_2 \sim O_2$ , et donc  $O'_1, O'_2$  satisfont la condition (ii).

Par définition  $x$  et  $y$  sont consécutifs dans à la fois  $O'_1$  et  $O'_2$ . Si ils sont dans le même ordre dans  $O'_1$  et  $O'_2$ , alors on a fini. Sinon, on peut supposer sans perte de généralité que  $x$  précède  $y$  dans  $O'_1$ , et que  $y$  précède  $x$  dans  $O'_2$ .

On peut shifter  $O'_2$  de telle façon que  $x$  soit le premier élément et  $y$  le dernier.

Il n'y a pas de chemin avant de  $x$  à  $y$  dans  $G - e$ , parce que si un tel chemin  $P = (x = x_0, x_1, \dots, x_p = y)$  existait, alors  $p \geq 2$ , et avec l'arête  $yx$ , on obtient un circuit  $C = (x, x_1, \dots, y, x)$  d'indice 1. Or, si on ouvre  $O'_1$

ailleurs qu'entre  $x$  et  $y$ , on voit alors que  $yx$  est un arc retour dans  $C$ , et il doit y avoir un autre arc retour puisque sinon  $p = 1$ . Ainsi l'indice du circuit  $C$  dans  $O'_1$  est au moins 2 alors qu'il vaut 1 dans  $O'_2$ , ce qui contredit (ii).

Soit  $X$  l'ensemble des sommets qui peuvent être atteints à partir de  $x$  par un chemin avant (dans  $O'_2$ ). Par définition, ils n'ont aucun voisin après le dernier élément de  $X$  et donc on peut placer  $X$  après  $y$  par une suite d'échanges élémentaires. Les sommets dans  $Y := V \setminus (X \cup \{x, y\})$  n'ont aucun voisin en arrière dans  $X$ , et dont de façon identique on peut les placer avant  $x$ . Ainsi  $O''_2 := Y, x, y, X$  est un ordre équivalent à  $O'_2$ , et  $y$  est le successeur de  $x$  comme dans  $O_1$ , et donc  $O'_1$  et  $O''_2$  vérifient les conditions de l'affirmation. ■

Que peut-on en déduire pour les digraphes? Le théorème précédent implique donc que pour assurer l'équivalence de deux ordres cycliques des sommets d'un digraphe il suffit d'avoir égalité des indices pour tous les circuits non-orientés du graphe non-orienté sous-jacent. En fait pour un digraphe fortement connexe, on a le résultat suivant :

**Théorème 3.3** *Soit  $D = (V, A)$  un digraphe fortement connexe et  $O_1$  et  $O_2$  deux ordres linéaires de  $V$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $O_1 \sim O_2$
- (ii) *L'indice de tout circuit orienté est le même par rapport à  $O_1$  et  $O_2$ .*

Cela provient d'une propriété simple de l'espace vectoriel des circuits : les circuits d'un digraphe fortement connexe engendrent tous les circuits du graphe sous-jacent.

Si  $D = (V, A)$  est un digraphe, alors tout circuit du graphe sous-jacent peut être représenté par un élément de  $\{-1, 0, 1\}^A$  de la façon usuelle suivante. Soit  $C$  un circuit non-orienté donné avec un sens de parcours fixé pour référence, et définissons le vecteur  $\vec{C} \in \{-1, 0, 1\}^A$  de la façon suivante :  $\vec{C}(a) = 1$  si  $a \in C$  est orienté dans le sens de parcours choisi pour  $C$ ,  $\vec{C}(a) = -1$  si  $a$  est orienté dans le sens contraires et  $\vec{C}(a) = 0$  si  $a \notin C$ .

$$\mathcal{C}(D) := \text{lin}\{\vec{C} : C \text{ est un circuit de } G(D)\}.$$

Notons que la définition de  $\mathcal{C}(D)$  ne dépend pas de l'orientation qu'on a choisi pour chaque circuit afin de définir  $\vec{C}$ , puisque le vecteur défini par le choix inverse est juste  $-\vec{C}$ . Un élément de  $\mathcal{C}(D)$  est appelé circulation de  $D$ .



**Lemme 3.2** *Un digraphe 2-arête-connexe  $D = (V, A)$  est fortement connexe si et seulement si  $\mathcal{C}(D)$  est linéairement engendré par les circuits orientés de  $D$  (vus comme éléments de  $\{0, 1\}^A$ ).*

### Preuve

En effet, si  $D$  n'est pas fortement connexe, soit  $a$  un arc qui n'est pas contenu dans un circuit orienté. Alors puisque le graphe sous-jacent est 2-arête-connexe, il existe un circuit non-orienté  $C$  dans  $G(D)$ ,  $a \in E(C)$ ; puisque  $a$  n'est contenu dans aucun circuit orienté,  $C$  n'est pas engendré par les circuits orientés de  $D$ . Réciproquement, supposons que  $D$  soit fortement connexe. Alors toute circulation  $f$  est engendrée par des circuits orientés : en effet, pour chacune des coordonnées négatives  $e_1, \dots, e_p$  de  $f$  on peut choisir un circuit  $C_i$  contenant  $e_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ).  $f - \sum_{i=1}^p f(e_i)C_i$  est alors une circulation positive, qui est clairement une combinaison positive de circuits orientés, et donc il en est de même de  $f$ . ■

### Preuve du Théorème 3.3

Il suffit de montrer que la condition est vérifiée pour tout circuit non-orienté du graphe sous-jacent, grâce au Théorème 3.2. Notons  $\text{ind}_i(C)$  l'indice du circuit  $C$  par rapport à  $\mathcal{O}_i$ , ( $i = 1, 2$ ).

Choisissons deux ordres linéaires  $L_1$  et  $L_2$  représentant respectivement des classes  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  et définissons les vecteurs  $w_1, w_2 \in \{1, -1\}^A$  par  $-1$  sur les arcs retour et  $1$  sur les arcs avant dans  $L_1$  et  $L_2$ .

On remarque d'abord que  $w_i(C) = (|E(C)| - \text{ind}_i(C)) - \text{ind}_i(C) = |E(C)| - 2\text{ind}_i(C)$  pour tout cycle ( $i = 1, 2$ ). Donc l'hypothèse d'égalité des indices dans les deux ordres est équivalente à  $w_1(C) = w_2(C)$  pour tout circuit  $C$ .

L'équation

$$w_i^T \vec{C} = |E(C)| - 2\text{ind}_i(C)$$

est vérifiée pour tous les circuits de  $G(D)$ . En effet, dans le produit  $w_i^T \vec{C}$  on a quatre sortes de termes :  $1 \cdot 1$ ,  $1 \cdot (-1)$ ,  $(-1) \cdot 1$ ,  $(-1) \cdot (-1)$ , et il est clair que le résultat est  $1$  si l'arête correspondante est avant dans  $\vec{C}$ , et  $-1$  si elle est retour, et la différence entre le nombre d'arêtes avant et retour vaut  $|E(C)| - 2\text{ind}_i(C)$ .

Finalement pour vérifier la condition (ii) du Théorème 3.2 il est suffisant de prouver que  $w_1^T \vec{C} = w_2^T \vec{C}$  pour tout circuit  $C$  de  $G(D)$ . Mais comme on

sait que ceci est vrai pour les circuits orientés, et comme le Lemme 3.2 dit que ces circuits engendrent  $\mathcal{C}(D)$ , on en déduit le résultat

■

## 3.4 Ordres cycliques cohérents et Conjecture de Gallai

### 3.4.1 Ordres cycliques cohérents

Ainsi qu'on l'a expliqué dans l'introduction de cette section, la notion d'ordre cyclique a été introduite par S. Bessy et S. Thomassé afin de prouver la Conjecture de Gallai 3.4. L'idée est, pour une famille de circuits couvrant les sommets du graphe, de majorer la taille de la famille par la somme des indices des circuits de cette famille (puisque l'indice d'un circuit est supérieur ou égal à 1). Afin de borner cette quantité par la stabilité du digraphe, on veut donc choisir un "bon" ordre cyclique, dans le sens que les indices des circuits seront petits. Ils ont proposé la définition suivante.

Un ordre cyclique des sommets d'un digraphe est *cohérent*, si tout arc est contenu dans un circuit d'indice 1.

Le résultat fondamental est alors qu'un tel ordre existe pour tout digraphe fortement connexe. Pour prouver ceci, on va expliquer pourquoi cela correspond à l'idée intuitive de "bon" ordre cyclique expliquée plus haut.

On définit la relation réflexive et transitive suivante sur les ordres cycliques :

$$\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}_2 \text{ si pour tout circuit } C \text{ de } D, \text{ind}_{\mathcal{O}_1}(C) \leq \text{ind}_{\mathcal{O}_2}(C) \quad (3.2)$$

Le Théorème 3.3 peut s'énoncer maintenant en disant que pour un digraphe fortement connexe, cette relation est un ordre partiel sur les ordres cycliques.

On peut alors prouver le résultat suivant qui garantit l'existence d'un ordre cyclique cohérent.

**Proposition 3.1** *Soit  $D$  un digraphe fortement connexe. Un ordre cyclique est cohérent si et seulement si il est minimal pour la relation  $\leq$ .*

**Preuve**

Supposons qu'un ordre  $\mathcal{O}$  ne soit pas cohérent. Montrons qu'il n'est pas minimal.

Soit  $a \in A$  un arc qui n'est pas contenu dans un circuit d'indice 1. On peut trouver dans  $\mathcal{O}$  un ordre linéaire  $O$  dans lequel  $a \in \text{Ret}(O)$ , où  $\text{Ret}(O)$  est l'ensemble des arcs retour dans  $O$ . Le graphe induit par les arcs  $A \setminus (B \setminus a)$  ne contient alors aucun circuit, sinon  $a$  serait contenu dans un circuit d'indice 1, donc par le lemme 3.1, il existe un ordre  $O'$  dans lequel tous ces arcs sont des arcs avant. L'ensemble des arcs retour  $B'$  de ce nouvel ordre vérifie donc  $B' \subset B \setminus a$ . On a alors clairement pour tout circuit  $C$  :

$$\text{ind}_{\mathcal{O}'}(C) = |C \cap B'| \leq |C \cap B| = \text{ind}_{\mathcal{O}}(C).$$

Comme  $D$  est fortement connexe,  $a$  est contenue dans un circuit  $C$  et pour ce circuit l'inégalité est stricte, ce qui prouve que l'ordre cyclique qui contient  $\mathcal{O}$  n'est pas minimal pour  $\leq$ .

Réciproquement, soit  $\mathcal{O}$  un ordre cohérent, et  $\mathcal{O}'$  un ordre cyclique tel que  $\mathcal{O}' \leq \mathcal{O}$ . Montrons alors que  $\mathcal{O}' = \mathcal{O}$ . Pour cela, d'après le Théorème 3.3, il suffit de montrer que les indices sont les mêmes pour tous les circuits. Soit donc  $C$  un circuit de  $D$ . Comme  $D$  est fortement connexe et  $\mathcal{O}$  cohérent, tout arc  $a \in A$  de  $C$  est contenu dans un circuit  $C_a$  d'indice 1. En identifiant les circuits avec les vecteurs de  $\{0, 1\}^A$ , on peut écrire.

$$\sum_{a \in C} C_a = C + \sum_{i=1}^p C_i$$

où les  $C_i$  sont des circuits de  $D$ , puisque la somme des  $C_a$  est un digraphe eulérien contenant  $C$ .

Comme les circuits  $C_a$  sont d'indice 1 dans  $\mathcal{O}$ , ils sont donc aussi d'indice 1 dans  $\mathcal{O}'$  et donc l'indice de la somme des  $C_a$  vaut  $|C|$  dans  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$ . Donc la somme du membre de droite a aussi même indice, et comme l'indice de tout circuit est inférieur dans  $\mathcal{O}'$  cela implique bien l'égalité terme à terme. On a bien montré  $\text{ind}_{\mathcal{O}}(C) = \text{ind}_{\mathcal{O}'}(C)$  pour tout circuit  $C$  et cela conclut la preuve. ■

### 3.4.2 Pondérations bornées par l'indice et Conjecture de Gallai

Dans cette section on va montrer comment à partir de l'existence d'un ordre cyclique cohérent vue en 3.1, et en utilisant le théorème de dualité en programmation linéaire, on peut faire une preuve très simple de la Conjecture de Gallai prouvée par Bessy et Thomassé. Cette démonstration est le fruit d'un travail effectué avec Adrian Bondy qui avait suggéré l'idée de faire une preuve directe de programmation linéaire de ce résultat [11].

#### **Théorème 3.4 (Bessy - Thomassé, 2004)**

*Soit  $D$  un digraphe fortement connexe. Il existe un recouvrement des sommets de  $D$  par moins de  $\alpha$  circuits, où  $\alpha$  désigne la stabilité de  $D$ .*

Une *pondération* d'un digraphe  $D$  est une fonction  $w : V \rightarrow \mathbb{N}$ . Le *poids* d'un sommet  $v$  de  $D$  est la valeur  $w(v)$ . Par extension, le *poids* d'un sous-graphe de  $D$  est la somme des poids de ses sommets. Si  $D$  est muni d'un ordre cyclique  $O$ , et si  $w(C) \leq \text{ind}(C)$  pour tout circuit  $C$  de  $D$ , on dit que la pondération  $w$  est *indice-bornée* (par rapport à  $O$ ). On prouve le résultat suivant :

**Théorème 3.5** *Soit  $D$  un digraphe tel que tout sommet appartient à un circuit, et  $\mathcal{O}$  un ordre cyclique des sommets de  $D$ . Alors*

$$\begin{aligned} & \min \{ \text{ind}(\mathcal{C}) : \mathcal{C} \text{ une couverture en circuits des sommets de } D \} \\ & = \max \{ w(V) : w \text{ une pondération indice-bornée} \}. \end{aligned}$$

La conjecture de Gallai se déduit maintenant en appliquant ce théorème à un ordre cyclique cohérent et en remarquant que :

- pour toute famille  $\mathcal{C}$  de circuits de  $D$ ,  $|\mathcal{C}| \leq \text{ind}(\mathcal{C})$  ;
- comme chaque sommet est l'extrémité d'un arc, et que l'ordre est cohérent, il est contenu dans un circuit d'indice 1, et donc une pondération indice-bornée prend ses valeurs dans  $\{0, 1\}$  ;
- Il n'y a pas d'arc  $a = v_i v_j \in A$  tel que  $w(i) = w(j) = 1$ , parce que le circuit  $C$  d'indice 1 qui contient  $a$  vérifie  $w(C) \leq 1$ .

Ainsi pour un ordre cyclique cohérent, une pondération indice-bornée est en fait un stable et donc  $w(D) \leq \alpha$  (Ces stables particuliers ont été étudiés par Bessy et Thomassé sous le nom de stable cyclique dans leur article [15], on

y reviendra au paragraphe 3.5.3).

**Preuve :**

Une inégalité est facile. En effet, soit  $\mathcal{C}$  une famille de circuits couvrant les sommets, et  $w$  une pondération indice bornée par rapport à  $\mathcal{O}$ . Alors

$$\text{ind}(\mathcal{C}) = \sum_{C \in \mathcal{C}} \text{ind}(C) \geq \sum_{C \in \mathcal{C}} w(C) = \sum_{v \in V} |\{C \in \mathcal{C} : v \in C\}| w(v) \geq w(V).$$

Ainsi, le max du Théorème est inférieur au min, tout ce qu'il reste à faire est donc de trouver une famille de circuits couvrante et une pondération indice-bornée pour lesquelles l'égalité est satisfaite.

Pour cela, on veut écrire le problème sous la forme d'un programme linéaire. La relaxation d'un ensemble de circuits est naturellement une circulation, c'est à dire une pondération positive ou nulle des arcs du digraphe de telle façon que la somme des poids des arcs entrants en un sommet est égale à la somme des poids des arcs sortants. Ensuite, demander que cette circulation recouvre les sommets du digraphe revient à dire que pour chaque sommet, la somme des poids des arcs sortants (ou entrants) est non nulle, plus grande que 1 par exemple. Ensuite il restera à exprimer l'indice comme une fonction linéaire à minimiser. Écrivons ceci plus formellement.

Soit  $V$  l'ensemble des sommets du digraphe et  $L = (v_1, \dots, v_n)$  un ordre linéaire quelconque appartenant à la classe de l'ordre cyclique choisi. L'ensemble des arcs est noté  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ . Un arc  $(v_i, v_j)$  est donc avant dans  $L$  si  $i < j$ , et retour si  $j < i$ . On va maintenant utiliser la matrice  $U(D)$  que l'on avait introduite dans la section 2.3. On rappelle que cette matrice est définie par

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix}$$

où  $\mathbf{M} = (m_{ij})$  est la matrice  $n \times m$  d'incidence de  $D$  :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ est le début de } a_j \\ -1 & \text{si } v_i \text{ est la fin de } a_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et  $\mathbf{N} = (n_{ij})$  est la matrice  $n \times m$  définie par :

$$n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ est le début de } a_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit ensuite les vecteurs  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{2n})$  et  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)$  comme suit :

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$c_j = \begin{cases} 1 & \text{si } a_j \text{ est un arc retour} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On considère le programme linéaire (P) :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{sous les contraintes} & \mathbf{U}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Maintenant considérons un vecteur  $x$  à coordonnées positives qui vérifie les contraintes  $\mathbf{U}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ , c'est à dire les contraintes  $\mathbf{M}\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  et  $\mathbf{N}\mathbf{x} \geq \mathbf{1}$ , où  $\mathbf{0}$  et  $\mathbf{1}$  sont les vecteurs de 0 et de 1 respectivement. Comme les colonnes de  $\mathbf{M}$  ont une somme nulle, les entrées de  $\mathbf{M}\mathbf{x}$  ont aussi une somme nulle, ce qui implique en fait que  $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  puisque le vecteur est positif. Ainsi un tel vecteur  $x$  est bien une circulation positive de  $D$ , autrement dit une somme pondérée de circuits de  $D$ . De plus, si la condition  $\mathbf{N}\mathbf{x} \geq \mathbf{1}$  exprime bien que l'ensemble des circuits est une couverture des sommets. Comme par hypothèse,  $D$  a au moins une couverture en circuits de ses sommets, ces contraintes sont faisables.

Le Problème (P) étant borné ( $\mathbf{c}$  est positif), il admet des solutions optimales. On a vu grâce au Lemme 2.1 que la matrice des contraintes est totalement unimodulaire, donc la Proposition 2.1 implique l'existence de solution optimales entières c'est à dire des vraies unions de circuits orientés qui de plus recouvrent les sommets de  $D$ . Enfin, pour une telle solution  $\mathbf{c}\mathbf{x}$  représente exactement la somme des indices des circuits donnés par le vecteur  $x$ . Ainsi, on a bien montré que l'optimum du problème (P) est exactement le min du Théorème.

Étudions maintenant le dual (P\*) de (P) :

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser} & \mathbf{y}\mathbf{b} \\ \text{sous les contraintes} & \mathbf{y}\mathbf{U} \leq \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Écrivons  $\mathbf{y} := (z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n)$ . Alors  $(P^*)$  est le problème de maximiser  $\sum_{i=1}^n w_i$  sous les contraintes

$$z_i - z_k + w_i \leq \begin{cases} 1 & \text{si } a_j := (v_i, v_k) \text{ est un arc retour} \\ 0 & \text{si } a_j \text{ est un arc avant} \end{cases}$$

Considérons une solution optimale entière de  $(P^*)$ . Si on somme les contraintes précédentes sur les arcs d'un circuit  $C$  de  $D$ , on obtient l'inégalité

$$\sum_{v_i \in V(C)} w_i \leq i(C).$$

Autrement dit, la fonction  $w$  définie par  $w(v_i) := w_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , est une pondération indice-bornée, et la valeur du problème est le poids  $w(D)$  de  $D$ .

Mais cela implique donc que toute solution optimale du dual est représentée par une pondération indice-bornée. Par dualité forte, il existe donc une telle pondération dont le poids total est égal au min du problème primal. Grâce à la remarque faite au début de la preuve, ceci conclut la démonstration du Théorème 3.5. ■

## 3.5 Feedback et Stables Cycliques

### 3.5.1 Feedback Arc Sets Cycliques

La notion de feedback arc set est naturelle quand on travaille avec des ordres cycliques. En effet, si on a un ordre linéaire sur les sommets d'un digraphe, et que l'on considère l'ensemble des arcs retour dans cet ordre, alors cet ensemble est clairement un feedback arc set. Et réciproquement, il est facile de constater que si on a un feedback arc set, alors il existe un ordre linéaire des sommets dans lequel tout les arcs retour font partie de ce feedback arc set. Attention en revanche tous les arcs du feedback arc set considéré ne sont pas nécessairement retour dans cet ordre, il suffit de prendre comme feedback arc set particulier d'un digraphe l'ensemble de tous ses arcs et on ne pourra pas les avoir tous en même temps retour si le digraphe contient au moins un circuit. Cependant si on s'intéresse aux feedback arc set minimaux par inclusions (que l'on note en abrégé min FAS) on a bien une équivalence.

**Proposition 3.2** Soit  $D = (V, A)$  un digraphe, et  $F \subset A$ .

- (i)  $F$  est un min FAS  $\Rightarrow$  Il existe un ordre linéaire  $O$  tel que  $F = \text{Ret}(O)$ .
- (ii) Il existe un ordre linéaire  $O$  appartenant à un ordre cyclique cohérent tel que  $F = \text{Ret}(O) \Rightarrow F$  est un min FAS

**Preuve**

(i) Comme  $F$  est un FAS il existe un ordre linéaire  $O$  tel que tous les arcs retour sont dans  $F$ . Si il existe  $a \in F$  qui est un arc avant alors  $F \setminus A$  contient encore tous les arcs retour et est donc un feedback arc set ce qui contredit la minimalité de  $F$ .

(ii)  $F$  est donc un feedback arc set. Si  $F'$  est un feedback arc set minimum strictement inclus dans  $F$  alors on considère un ordre linéaire  $O'$  dans lequel tous ses arcs sont retour. L'indice d'un circuit  $C$  dans cet ordre est donné par  $C \cap F'$ , et donc l'ordre cyclique auquel il appartient est strictement inférieur à celui contenant  $O$  pour l'ordre défini en 3.2, ce qui contredit la cohérence.

■

Si  $\mathcal{O}$  est un ordre cyclique, on définit  $\text{Ret}(\mathcal{O}) = \{\text{Ret}(O), O \in \mathcal{O}\}$ , c'est à dire les ensemble d'arcs qui sont retour dans un ordre linéaire appartenant à  $\mathcal{O}$ .

En fait, un ensemble d'arcs retour vérifie même la propriété plus forte d'intersecter chaque circuit autant de fois que son indice. Cela motive la définition suivante : un ensemble d'arcs  $F$  d'un digraphe est appelé *feedback arc set cyclique* si il existe un ordre cyclique  $\mathcal{O}$  des sommets de  $D$  tel que pour tout circuit  $C$ , on ait  $|F \cap C| \geq \text{ind}_{\mathcal{O}}(C)$ . On définit alors l'ensemble  $\text{CycFAS}(\mathcal{O})$  qui contient tous les ensembles d'arcs qui sont des feedback arc sets cycliques pour l'ordre cyclique  $\mathcal{O}$ . On a la chaîne d'inclusions suivante (ou les inclusions peuvent être strictes) pour tout ordre cyclique  $\mathcal{O}$

$$\text{Ret}(\mathcal{O}) \subset \text{CycFAS}(\mathcal{O}) \subset \text{FAS}(D)$$

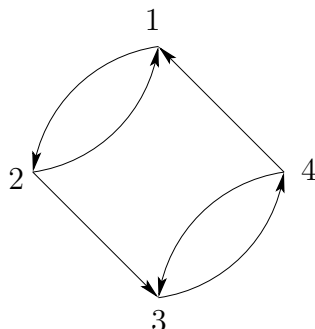
Le fait que pour tout feedback arc set  $F$ , il existe un ordre linéaire dont les arcs retour sont contenus dans  $F$ , associé à la première inclusion montre que :

$$\text{FAS}(D) = \bigcup_{\mathcal{O}} \text{CycFAS}(\mathcal{O})$$

où l'union est prise sur tous les ordres cycliques.



Pour voir qu'un élément de  $\text{Ret}(\mathcal{O})$ , même minimal par inclusion, n'appartient pas nécessairement à  $\text{CycFAS}(\mathcal{O})$ , il suffit de considérer le digraphe suivant :



Les arcs 12 et 34 constituent un feedback arc set cyclique minimal par inclusion mais ne peuvent être simultanément retour dans un ordre équivalent puisque à rotation près cette représentation de l'ordre est unique.

En fait, on peut dire dans quels cas on aura bien équivalence entre feedback arc set cyclique minimal et ensemble d'arcs retour. L'exemple de la figure précédente est un ordre cyclique cohérent, donc on voit que ce n'est pas la bonne condition, en fait les bons ordres sont les ordres dits anticohérents que l'on va définir maintenant. Si  $\mathcal{O}$  est un ordre cyclique contenant l'ordre linéaire  $(v_1, \dots, v_n)$ , on définit l'ordre inverse  $\overline{\mathcal{O}}$  comme l'ordre cyclique contenant l'ordre linéaire  $(v_n, \dots, v_1)$ . Un ordre est alors dit *anticohérent* si son inverse est cohérent. Comme l'indice d'un circuit dans un ordre cyclique correspond au nombre d'arcs retour dans un ordre linéaire quelconque appartenant à cet ordre cyclique, on a pour tout circuit  $C$ ,  $\text{ind}_{\mathcal{O}}(C) = |C| - \text{ind}_{\overline{\mathcal{O}}}(C)$ . Les ordres anticohérents sont donc les ordres cycliques maximaux pour l'ordre partiel défini en 3.2.

On démontre le résultat suivant :

**Proposition 3.3** *Soit  $D = (V, A)$  un digraphe muni d'un ordre cyclique anticohérent  $\mathcal{O}$  et  $F \subset A$ . Les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

- i)  $F$  est un feedback arc set cyclique
- ii) Il existe un ordre linéaire  $O$  appartenant à  $\mathcal{O}$  tel que  $\text{Ret}(O) \subset F$ ,  
le cas d'égalité dans ii) correspondant aux feedback arc sets cycliques minimaux par inclusion.

Pour démontrer cette proposition, on va se placer dans le contexte totalement équivalent mais plus naturel des ordres cohérents. Notons que  $F$  est un feedback arc set cyclique pour  $\mathcal{O}$  si et seulement si son complémentaire  $F' = A \setminus F$  vérifie  $|F' \cap C| \leq \text{ind}_{\mathcal{O}}(C)$  pour tout circuit  $C$ . On va donc démontrer le résultat strictement équivalent suivant :

**Proposition 3.4** *Soit  $D = (V, A)$  un digraphe muni d'un ordre cyclique cohérent  $\mathcal{O}$  et  $F \subset A$ . Les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

**i)** *Pour tout circuit  $C$  de  $D$ ,  $|F \cap C| \leq \text{ind}(C)$*

**ii)** *Il existe un ordre linéaire  $O$  appartenant à  $\mathcal{O}$  tel que  $F \subset \text{Ret}(O)$ ,*

*le cas d'égalité dans ii) correspondant aux ensembles  $F$  maximaux par inclusion pour la propriété i).*

#### Preuve

**ii)  $\Rightarrow$  i)** est immédiat, il faut donc montrer **i)  $\Rightarrow$  ii)**. Pour cela il suffit de se placer dans le cas où  $F$  est maximal par inclusion pour la propriété **i)**. On commence par montrer que dans ce cas,  $F$  est un feedback arc set, c'est à dire que  $F$  intersecte tous les circuits. Par l'absurde supposons qu'il existe un circuit  $C$  un circuit tel que  $C \cap F = \emptyset$ . Alors par maximalité de  $F$ , tout arc  $a$  de  $C$  est contenu dans un circuit  $C_a$  tel que  $\text{ind}(C_a) = F \cap C_a$  (sinon  $F \cup \{a\}$  vérifierait la condition **i)**). Maintenant si on considère la circulation  $C'$  donnée par  $C' = \sum_{a \in C} C_a - C$  (on reprend ici la notation déjà utilisée à la section 3.3 qui consiste à identifier les circuits avec les vecteurs de  $\{0, 1\}^A$ ), alors on aura  $\text{ind}(C') < \sum_{a \in A} \text{ind}(C_a) = \sum_{a \in A} |F \cap C_a| = \sum_{a \in A} |F \cap (C_a \setminus \{a\})|$ . Et cela contredit **i)** pour cette somme de circuits  $C'$ .

Ainsi  $A \setminus F$  induit un digraphe acyclique, donc il existe un ordre linéaire  $O$  dans lequel tous les arcs retour sont contenus dans  $F$ . Comme l'indice d'un circuit dans  $O$  est le nombre d'arcs retour, alors l'indice de tout circuit dans  $O$  est inférieur à la taille de son intersection avec  $F$  et est donc inférieur à l'indice dans  $\mathcal{O}$ . Comme  $\mathcal{O}$  est cohérent, par le Théorème 3.1, cela implique que  $O$  appartient à  $\mathcal{O}$  et donc que l'indice de tout circuit est égal au nombre d'arcs du circuit appartenant à  $F$ . Il est clair que cela implique maintenant que  $F = \text{Ret}(O)$ . ■

Mentionnons aussi que l'on peut énoncer un théorème min-max impliquant la notion de feedback arc set cyclique, mais il faut pour cela relaxer cette notion en définissant une *pondération feedback cyclique des arcs* comme

une fonction  $f : A \rightarrow \mathbb{N}$  telle que pour tout circuit  $C$ , on ait  $f(C) \geq \text{ind}_{\mathcal{O}}(C)$ . Ce résultat peut être vu comme une sorte de propriété d'Erdős-Pósa cyclique.

**Théorème 3.6** *Soit  $D = (V, A)$  un digraphe muni d'un ordre cyclique  $\mathcal{O}$ . Alors*

$$\begin{aligned} & \max \{i(\mathcal{C}) : \mathcal{C} \text{ ensemble de circuits arcs-disjoints de } D\} \\ &= \min \{f(A) : f \text{ une pondération feedback cyclique des arcs de } D\}. \end{aligned}$$

### Preuve

On note  $n = |V|$  et  $m = |A|$ . On ne détaille pas cette preuve, identique dans son déroulement à celle du Théorème 3.5. Il suffit juste de remplacer le problème d'optimisation par le suivant :

$$\begin{aligned} & \text{maximiser } \mathbf{c}\mathbf{x} \\ & \text{sous les contraintes } \mathbf{T}\mathbf{x} \leq \mathbf{d} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

où la matrice  $\mathbf{T}$  est la matrice totalement unimodulaire à  $(n + m)$  lignes et  $m$  colonnes définie par :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix}$$

$\mathbf{M}$  désignant toujours la matrice d'incidence sommets arcs de  $D$  et  $\mathbf{I}_m$  la matrice identité carrée de taille  $m$ .

Comme dans la preuve du Théorème 3.5,  $c$  désigne le vecteur caractéristique des arcs retour d'un ordre linéaire de  $\mathcal{O}$  et  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_{n+m})$  est défini par :

$$d_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

■

### 3.5.2 Pondérations Indice-Bornées des Arcs

De façon similaire à ce que l'on avait fait pour les pondérations indices bornées des sommets, on définit une *pondération indice-bornée des arcs* de  $D = (V, A)$  comme une application  $\omega : A \rightarrow \mathbb{N}$  telle que pour tout circuit  $C$ ,  $\omega(C) \leq \text{ind}(C)$ . On peut alors énoncer le théorème suivant :

**Théorème 3.7** *Soit  $D$  un digraphe fortement connexe, et  $\mathcal{O}$  un ordre cyclique des sommets de  $D$ . Alors*

$$\begin{aligned} & \min \{i(\mathcal{C}) : \mathcal{C} \text{ une couverture en circuits des arcs de } D\} \\ = & \max \{w(A) : w \text{ une pondération indice-bornée des arcs}\}. \end{aligned}$$

**Preuve**

La preuve se fait de façon strictement identique à celle du Théorème 3.6 en remplaçant le problème d'optimisation de la preuve par le suivant (en gardant les mêmes notations) :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } \mathbf{c}\mathbf{x} \\ & \text{sous les contraintes } \mathbf{T}\mathbf{x} \geq \mathbf{d} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

■

Pour les pondérations indice-bornées des sommets, on avait vu que dans le cas d'un ordre cyclique cohérent, on pouvait dire des choses supplémentaires, ce qui nous avait permis de déduire la Conjecture de Gallai à partir du Théorème 3.5. Dans le cas des pondérations indice-bornées des arcs, puisque tout arc est contenu dans un circuit d'indice 1, être dans un ordre cohérent signifie que la pondération des arcs ne prend que les valeurs 0 ou 1. Ainsi dans le cas cohérent, une telle pondération est simplement un sous-ensemble d'arcs  $F$  vérifiant :

$$\text{pour tout circuit } C, |F \cap C| \leq \text{ind}(C) \tag{3.3}$$

On reconnaît là les ensembles d'arcs de la Proposition 3.4, les ensembles maximaux vérifiant 3.3 sont exactement les ensembles d'arcs retour. Finalement cela nous permet de déduire du Théorème 3.7 le Corollaire suivant (déjà énoncé par Bessy et Thomassé dans [15]) :

**Corollaire 3.1** *Soit  $D$  un digraphe fortement connexe, et  $\mathcal{O}$  un ordre cyclique cohérent des sommets de  $D$ . Alors*

$$\begin{aligned} & \min \{i(\mathcal{C}) : \mathcal{C} \text{ une couverture en circuits des arcs de } D\} \\ = & \max \{|F| : F = \text{Ret}(O) \text{ pour un ordre linéaire } O \text{ appartenant à } \mathcal{O}\}. \end{aligned}$$

### 3.5.3 Stabilité Cyclique

On va revenir dans ce paragraphe sur la notion de pondération indice-bornée introduite dans la preuve de la Conjecture de Gallai faite à la section précédente. On avait vu que cette notion, définie pour tout digraphe muni d'un ordre cyclique, prenait un sens particulier dans le cas où le digraphe pouvait être muni d'un ordre cyclique cohérent. Dans ce cas, on rappelle qu'une pondération indice-bornée prend ses valeurs dans  $\{0, 1\}$  et que l'ensemble des sommets valant 1 constitue un stable du graphe. Dans [15], les auteurs parlent de *stable cyclique* pour cette notion. En fait, ils donnent une définition différente qui est la suivante : un stable cyclique d'un ordre cyclique est défini comme un stable du digraphe tel qu'il existe un ordre linéaire dans l'ordre cyclique dans lequel tous ces sommets sont consécutifs. Dans le cas d'un ordre cyclique cohérent, on peut montrer que cette définition est équivalente à être le support d'une pondération indice bornée. Le résultat a été démontré par András Sebő dans [44] mais la preuve donnée ici est différente.

**Proposition 3.5** *Soit  $D = (V, A)$  un digraphe muni d'un ordre cyclique cohérent  $\mathcal{O}$  et  $S \subset V$  un stable. Les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

- i) *Il existe un ordre linéaire dans l'ordre cyclique  $\mathcal{O}$  dans lequel les sommets de  $S$  sont consécutifs.*
- ii) *Pour tout circuit  $C$ ,  $|C \cap S| \leq \text{ind}_{\mathcal{O}}(C)$ .*

#### Preuve

i)  $\Rightarrow$  ii) est l'implication facile. Comme les sommets d'un stable cyclique  $S$  sont consécutifs et forment un stable, il est clair qu'un circuit doit faire au moins un tour autour du cercle pour aller d'un point de  $S$  à un autre.

ii)  $\Rightarrow$  i). Soit donc  $S$  vérifiant ii). On commence par remarquer que cela implique que l'ensemble des arcs  $F$  qui ont pour fin un sommet de  $S$  vérifie  $|F \cap C| \leq \text{ind}_{\mathcal{O}}(C)$  pour tout circuit  $C$ . Par la Proposition 3.4 il existe donc un ordre linéaire  $O$  dans  $\mathcal{O}$  tel que les arcs de  $F$  soient tous des arcs retour. Soit  $s \in S$ , supposons qu'il existe un arc reliant  $s$  à un des sommets qui le précèdent dans l'ordre. Par ce qui vient d'être dit, ce ne peut qu'être qu'un arc sortant  $sx$ . Mais par cohérence de l'ordre il existe un chemin constitué d'arc avants qui va de  $x$  à  $s$  et donc il existe un arc entrant en  $s$  qui est un arc avant, ce qui donne une contradiction. Donc il n'existe aucun arc entre  $s$  et les sommets qui le précèdent. On peut donc via des opérations élémentaires d'échange amener tout sommet de  $s$  au début de l'énumération et on a donc

bien montré que  $S$  vérifie **i**). ■

De même que pour les arcs on peut parler de feedback vertex set cyclique et énoncer un théorème min-max similaire au Théorème 3.6.

**Théorème 3.8** *Soit  $D = (V, A)$  un digraphe muni d'un ordre cyclique  $\mathcal{O}$  sur ces sommets. Alors*

$$\begin{aligned} & \max \{i(\mathcal{C}) : \mathcal{C} \text{ un ensemble de circuits sommets-disjoints de } D\} \\ = & \min \{f(D) : f : V \rightarrow \mathbb{N} \text{ telle que } f(C) \geq \text{ind}(C) \text{ pour tout circuit } C\}. \end{aligned}$$

La preuve est encore similaire aux preuves précédentes.

Il est possible d'énoncer encore d'autres théorèmes min-max ainsi que des généralisations de ceux-ci. Pour plus de précision, on invite les lecteurs à se reporter à l'article [44] écrit par A. Sebő.

# Chapitre 4

## Longueur cyclique et Plongements

### 4.1 Introduction

Soit  $D = (V, A)$  un digraphe muni d'un ordre cyclique  $\mathcal{O}$ . On définit la *longueur cyclique* d'un circuit  $C$  de  $D$  relativement à  $\mathcal{O}$  comme  $l_{\mathcal{O}}(C) := |C|/\text{ind}(C)$ , où  $|C|$  désigne le nombre d'arcs de  $C$ , c'est à dire sa longueur usuelle. Dans cette section on va s'intéresser à différents théorèmes min-max impliquant cette notion. On va commencer par étudier la longueur cyclique minimum d'un digraphe. Cette étude est motivée par la conjecture de Caccetta-Häggkvist, qui peut s'énoncer ainsi : si  $\delta^+$  désigne le plus petit degré sortant d'un digraphe, et  $g$  la taille d'un plus petit circuit orienté, alors  $g \leq \lceil n/\delta^+ \rceil$ . On verra comment ceci peut se traduire lorsque l'on considère les versions cycliques de ces notions.

Avant d'aller plus loin on veut faire une première remarque triviale sur cette notion. Contrairement à ce qui se passe pour la longueur classique d'un circuit, dans le cas de la longueur cyclique il est équivalent d'étudier le maximum et le minimum de cette quantité. En effet, si  $(v_1, \dots, v_n)$  est un représentant de l'ordre cyclique  $\mathcal{O}$  et si on note  $\overline{\mathcal{O}}$  l'ordre cyclique inverse, c'est à dire celui contenant l'énumération  $(v_n, \dots, v_1)$ , alors pour tout circuit  $C$ ,  $1/l_{\mathcal{O}}(C) = 1 - 1/l_{\overline{\mathcal{O}}}(C)$ . Ainsi, étudier le minimum de la longueur cyclique des circuits dans un ordre donné revient à étudier le maximum dans son inverse. Tous les résultats que l'on pourra énoncer en terme de longueur

cyclique maximum auront leur pendant en terme de longueur cyclique minimum et vice versa. Cependant, tout n'est pas strictement équivalent, si on est dans les cas où on a des conditions sur l'ordre cyclique. Par exemple, l'ordre inverse d'un ordre cyclique cohérent n'est évidemment pas cohérent. En fait on fera des allers et retours entre ces deux points de vue, notamment pour donner une preuve simplifiée d'un résultat de Bessy et Thomassé concernant la longueur cyclique maximum dans un ordre cohérent en relation avec la notion de coloration circulaire.

Dans toute cette section les digraphes considérés sont fortement connexes.

## 4.2 Maille Cyclique

Ainsi qu'on l'a expliqué dans l'introduction de cette partie, on se propose ici d'étudier la *maille cyclique* d'un ordre cyclique  $\mathcal{O}$  des sommets d'un digraphe  $D$ . On la note  $g_c(\mathcal{O})$ , et elle est définie comme le minimum sur tous les circuits de leur longueur cyclique.

On adopte ce point de vue pour essayer de faire le lien avec la Conjecture de Caccetta-Häggkvist. En effet, on peut faire la remarque facile suivante : notons  $(v_1, \dots, v_n)$  un ordre linéaire qui appartient à l'ordre cyclique  $\mathcal{O}$ . A chaque sommet  $v_i$ , on associe le sommet  $\varphi(v_i)$  qui est le sommet le plus loin de  $x_i$  dans l'ordre cyclique (au sens de la longueur d'un arc définie en 3.2). Alors  $]v_i, \dots, \varphi(v_i)]$  contient au moins  $\delta^+$  éléments, si  $\delta^+$  désigne le degré sortant minimum de  $D$ . On considère maintenant un circuit  $C = (v, \varphi(v), \varphi^2(v), \dots, \varphi^k(v) = v)$ . Grâce à l'observation précédente,  $\text{ind}(C) \geq k\delta^+/n$ , ou encore  $l_{\mathcal{O}}(C) \leq n/\delta^+$ . Donc  $g_c(\mathcal{O}) \leq n/\delta^+$  et donc la Conjecture de Caccetta-Häggkvist est vraie lorsqu'on remplace la maille par la maille cyclique.

On va maintenant exposer un résultat de dualité sur la maille cyclique. Soit  $D = (V, A)$  un digraphe fortement connexe et  $\mathcal{O}$  un ordre cyclique sur ses sommets. Soit  $O = (v_1, \dots, v_n)$  un ordre linéaire appartenant à  $\mathcal{O}$ . On rappelle que la longueur d'un arc  $v_i v_j$  est définie par  $(j - i)/n$  si  $j > i$  et  $(n + j - i)/n$  sinon. Si  $r$  est un réel positif et si  $O$  est tel que tous les arcs ont une longueur inférieure à  $r$ , alors en sommant les longueurs des arcs d'un



circuit  $C$  on a  $\text{ind}_{\mathcal{O}}(C) \leq r|C|$  et donc  $1/g_c(\mathcal{O}) \leq r$ . On a donc l'inégalité :

$$\frac{1}{g_c(\mathcal{O})} \leq \min\{r : \exists E \in \mathcal{O} \text{ tel que la longueur des arcs est inférieure à } r\} \quad (4.1)$$

On pourrait espérer avoir l'égalité. Malheureusement, l'exemple de la Figure 4.1, où l'ordre cyclique est représenté dans le sens trigonométrique, prouve que non. En effet, ici tous les sommets consécutifs sont reliés, donc on ne peut pas faire d'échanges, cette représentation est donc la seule (à rotation près) de l'ordre cyclique, et l'arc central a pour longueur  $1/2$ , alors que la maille cyclique vaut 3.

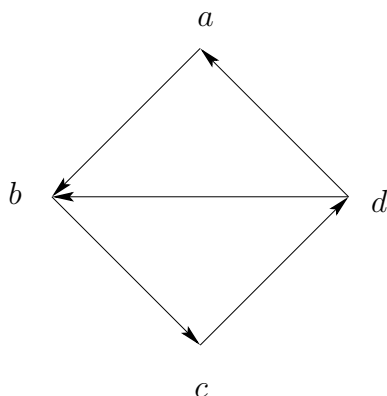


FIG. 4.1 – Un premier contre-exemple

On voit sur cet exemple que le problème vient de la "rigidité" d'un ordre cyclique en tant que plongement d'un digraphe sur le cercle. C'est pourquoi on va considérer des plongements plus généraux, donnés par des fonctions  $f : V \rightarrow [0, 1[$ . Pour une telle fonction, on dira aussi qu'un arc  $a = xy$  est un arc avant si  $f(x) < f(y)$  et arc retour sinon.

Si  $f$  est un tel plongement, on définit la *longueur* d'un arc  $a = xy$  par

$$l_f(a) = \begin{cases} f(y) - f(x) & \text{si } a \text{ est un arc avant} \\ 1 + f(y) - f(x) & \text{si } a \text{ est un arc retour} \end{cases}$$

Comme précédemment, l'indice d'un circuit dans un tel plongement est simplement la somme des longueurs de ses arcs. On dit que deux plongements

sont équivalents si l'indice de tout circuit est le même dans les deux plongements.

De plus, si on voit une énumération des sommets  $E = (v_1, \dots, v_n)$  appartenant à un ordre cyclique  $\mathcal{O}$  comme le plongement  $f$  défini par  $f(v_i) = (i-1)/n$ , alors cette définition de longueur coïncide bien avec la définition donnée en 3.2. Par extension, on dira alors qu'un plongement est équivalent à un ordre cyclique  $\mathcal{O}$ , si il est équivalent à un quelconque de ces plongements canoniques de  $\mathcal{O}$ .

Il est facile de vérifier que l'analogie de l'inégalité 4.1 reste vraie, c'est à dire :

$$\frac{1}{g_c(\mathcal{O})} \leq \min\{r : \exists f \text{ équivalent à } \mathcal{O} \text{ tel que tout arc a longueur au plus } r\} \quad (4.2)$$

De nouveau, on peut se demander si il y a égalité. La réponse est encore non. Avant de donner un contre-exemple et d'expliquer dans quels cas ce résultat est vrai, on fait une remarque sur ces plongements. Notons que l'application  $l_f : A \rightarrow ]0, 1]$  est telle que la somme des valeurs prises sur chaque circuit est entière. Le lemme suivant donne une équivalence.

**Lemme 4.1** *Soit  $D = (V, A)$  un digraphe fortement connexe. Si  $\omega : A \rightarrow ]0, 1]$  est telle que  $\omega(C) = \sum_{a \in C} \omega(a)$  est un entier pour tout circuit  $C$ , alors il existe  $f : V \rightarrow [0, 1[$  tel que  $\omega = l_f$ .*

**Preuve :**

Fixons un sommet  $r$  de  $D$ , et considérons une arborescence sortante couvrante  $T$  dont on note la racine  $r$ . On définit alors  $f : V \rightarrow [0, 1[$  par  $f(x) := \omega(P_{rx}) \bmod 1$  où  $P_{rx}$  est l'unique  $(r, x)$ -chemin orienté de  $T$ . Montrons que  $\omega = l_f$ . Pour cela, observons que puisque  $D$  est fortement connexe, tout chemin orienté peut être complété en une marche fermée orientée et qu'une telle marche a un poids entier (par décomposition en circuits). On en déduit que si  $P$  et  $P'$  sont deux chemins orientés de  $x$  vers  $y$ ,  $\omega(P) \equiv \omega(P') \bmod 1$ . Ainsi, si  $xy \in A$ ,  $f(y) - f(x) \equiv \omega(P_{ry}) - \omega(P_{rx}) \bmod 1 \equiv \omega(xy)$  puisque  $P_{ry}$  et  $P_{rx} \cup xy$  sont des  $(x, y)$ -chemins. Comme  $\omega(xy)$  appartient à  $]0, 1]$  et  $(f(y) - f(x))$  à  $] -1, 1[$ , on a bien l'égalité  $l_f(xy) = \omega(xy)$ . ■

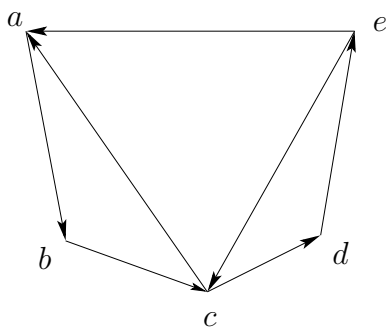


FIG. 4.2 – Un deuxième contre-exemple

On vient donc de voir que considérer un plongement des sommets sur le cercle est la même chose que considérer la pondération des arcs donnée par leur longueur relativement à ce plongement. On peut alors réécrire l'inégalité 4.2 de cette façon :

$$\frac{1}{g_c(\mathcal{O})} \leq \min\{\max_{a \in A} \omega(a) : \omega : A \rightarrow ]0, 1] \text{ équivalent à } \mathcal{O}\} \quad (4.3)$$

où on dit que  $\omega$  est équivalent à  $\mathcal{O}$  si pour tout circuit  $C$ ,  $\omega(C) = \text{ind}_{\mathcal{O}}(C)$ .

L'exemple de la figure 4.2 prouve qu'on n'a pas égalité. Ici la maille cyclique est égale à 3, supposons que l'on puisse trouver  $\omega$  borné par  $1/3$  équivalent à cet ordre. Comme les deux triangles ont indice 1, cela implique que les arcs  $(a, b)$ ,  $(b, c)$ ,  $(c, d)$ ,  $(d, e)$  ont poids précisément  $1/3$ . Mais il est alors impossible de trouver un poids positif sur  $(e, a)$  de telle façon que le circuit  $abcdea$  ait poids 1.

Cependant, si on autorise  $\omega$  à prendre des valeurs négatives, on voit qu'il est possible sur cet exemple de trouver un bon  $\omega$  (il suffit de prendre  $-1/3$  pour  $(e, a)$  et  $1/3$  pour tous les autres arcs).

On peut alors se demander si l'égalité suivante est vérifiée

$$\frac{1}{g_c(\mathcal{O})} = \min\{\max_{a \in A} \omega(a) : \omega : A \rightarrow ]-\infty, 1] \text{ équivalent à } \mathcal{O}\} \quad ? \quad (4.4)$$

Maintenant la réponse est oui. Définissons le *degré maximum cyclique*

d'un ordre cyclique  $\mathcal{O}$  d'un digraphe par :

$$\delta_c(\mathcal{O}) = \min\{\max_{a \in A} \omega(a) : \omega : A \rightarrow ]-\infty, 1] \text{ équivalent à } \mathcal{O}\}$$

**Théorème 4.1** *Soit  $D$  un digraphe et  $\mathcal{O}$  un ordre cyclique de ses sommets.*

$$\delta_c(\mathcal{O})g_c(\mathcal{O}) = 1.$$

On utilise le lemme suivant, conséquence immédiate du Lemme de Farkas :

**Lemme 4.2** *Soit  $p : A \rightarrow \mathbb{R}$  une pondération des arcs d'un digraphe  $D = (V, A)$  tel que pour tout circuit de  $D$ ,  $\sum_{a \in C} p(a) \geq 0$ . Alors il existe  $z : V \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :*

$$\forall a = (x, y) \in A \quad z(y) - z(x) \leq p(a).$$

**Preuve du Théorème 4.1**

L'inégalité  $\delta_c(\mathcal{O})g_c(\mathcal{O}) \geq 1$  provient de la remarque faite au début de la section. En effet, si  $\omega$  est équivalent à  $\mathcal{O}$  et vérifie  $\omega(a) \leq \delta_c(\mathcal{O})$  pour tout arc, alors pour tout circuit  $\text{ind}(C) \leq \delta_c(\mathcal{O})|C|$  et donc  $1/g_c(\mathcal{O}) \leq \delta_c(\mathcal{O})$ .

Montrons maintenant l'inégalité inverse. Soit  $O = (v_1, \dots, v_n)$  un ordre linéaire appartenant à  $\mathcal{O}$ , et  $\varepsilon : A \rightarrow \{0, 1\}$  définie par  $\varepsilon(a) = 1$  si  $a$  est un arc retour dans  $O$  et 0 sinon. Comme pour chaque circuit  $C$ ,  $g_c(\mathcal{O}) \leq |C|/\text{ind}_O(C)$ , si on définit  $p(a) = 1/g_c(\mathcal{O}) - \varepsilon(a)$ , alors  $p$  est une pondération des arcs telle que le poids de tout circuit est positif. En conséquence, le Lemme 4.2 implique l'existence de  $z : V \rightarrow \mathbb{R}$  telle que si on définit  $\omega : A \rightarrow \mathbb{R}$  par  $\omega(a) = z(y) - z(x) + \varepsilon(a)$  pour tout arc  $a = (x, y)$ , alors  $\omega(a) \leq 1/g_c(\mathcal{O})$ . De plus, pour tout circuit  $C$  :

$$\sum_{a \in C} \omega(a) = \sum_{a=(x,y) \in C} (z(y) - z(x)) + \sum_{a \in C} \varepsilon(a) = \text{ind}_O(C)$$

et  $\omega$  est équivalent à  $\mathcal{O}$ . ■

On vient donc de voir que 4.2 (ou 4.3) était fautive pour un ordre cyclique quelconque et qu'il fallait remplacer les pondérations à valeurs dans  $[0, 1]$  par celles à valeurs dans  $]-\infty, 1]$ . Cependant, on peut donner des cas 4.2 est vraie. Ce sont des ordres que l'on a déjà évoqués, les ordres anticycliques,

c'est à dire les ordres  $\mathcal{O}$  tels que l'ordre inverse  $\overline{\mathcal{O}}$  soit cohérent. Ce sera l'objet de la partie suivante. Néanmoins, on va changer de cadre pour cela, et énoncer le résultat en prenant le point de vue de la longueur cyclique maximum (on a vu en introduction que c'était la même chose, quitte justement à inverser l'ordre), et ceci pour plusieurs raisons.

- Premièrement, parce que ce résultat avait déjà été démontré par Bessy et Thomassé dans[15] avec une méthode purement combinatoire, et de même que pour la preuve de la Conjecture de Gallai, on va faire ici une preuve plus simple en utilisant le théorème de dualité en programmation linéaire.
- Deuxièmement, parce qu'il est intéressant de voir que dans ce cadre le degré maximum cyclique se traduit en terme de coloration circulaire.
- Enfin, parce que si on avait adopté le point de vue de la longueur cyclique minimum au début de ce chapitre pour faire le lien avec la Conjecture de Caccetta-Häggkvist, il paraissait plus naturel maintenant que l'on doive s'intéresser à des ordres particuliers, de parler des ordres cohérents plutôt que des ordres anticohérents.

### 4.3 Longueur Cyclique Maximum et Coloration Cyclique

Comme on l'a expliqué précédemment, on va ici étudier la longueur cyclique maximum des circuits d'un digraphe muni d'un ordre cyclique cohérent. Lorsqu'on étudiait la longueur cyclique minimum, on mettait cette quantité en dualité avec des plongements circulaires de l'ordre cyclique dans lesquels tout arc avait une longueur cyclique inférieure à  $r > 0$  en cherchant à minimiser  $r$ . Ici comme on travaille dans l'ordre inverse, on va donc s'intéresser naturellement à des plongements pour lesquels tout arc aura une longueur cyclique supérieure à  $r$  et on cherchera cette fois à maximiser  $r$ .

En fait, on va étudier le problème facilement équivalent suivant. On veut placer les sommets d'un ordre cyclique sur un cercle de périmètre  $r$  le plus petit possible avec les arcs de longueur cyclique toujours supérieure à 1. Comme on est dans le cas cohérent, cela implique en plus que tout arc a un longueur inférieure à  $r - 1$  puisque il doit être contenu dans un circuit d'indice 1 et que l'arc qui le suit dans ce circuit a longueur cyclique au moins

1 par hypothèse. Autrement dit, si on se place dans le cas cohérent, supposer que les arcs aient longueur cyclique supérieure à 1, revient à supposer dans le graphe non-orienté sous-jacent que les extrémités d'une arête soient à distance supérieure à 1 sur le cercle. On reconnaît ici une notion de coloration circulaire, c'est d'ailleurs pour recoller avec les définitions usuelles que l'on a décidé de prendre se point de vue inverse totalement équivalent : au lieu de fixer la taille du cercle et de maximiser la taille minimum des arcs (comme on aurait pu le faire dans la continuité de la section précédente), on fixe ici la taille minimum des arcs et on essaie de minimiser la taille du cercle.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe non-orienté.

Dans [49], Zhu définit une *r-coloration circulaire* de  $G$  comme une fonction  $f : V \rightarrow [0, r) = (\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < r\})$ , telle que pour tout  $(x, y) \in E$  :  $\text{dist}(x, y) \geq 1$ , où  $\text{dist}(x, y) := \text{dist}_{f,r}(x, y) := \min\{|f(x) - f(y)|, r - |f(x) - f(y)|\}$  – la *distance* entre de  $x$  et  $y$  sur le cercle de périmètre  $r$ .

Si le graphe est muni d'un ordre cyclique  $\mathcal{O}$ , alors une *r-coloration circulaire* est appelée une *r-coloration cyclique* (par rapport à  $\mathcal{O}$ ) si en plus l'ordre  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ , donné par  $0 \leq f(v_1) \leq f(v_2) \leq \dots \leq f(v_n) < r$  appartient à  $\mathcal{O}$ . On utilisera ces notions pour les digraphes aussi, dès lors que ces propriétés sont vérifiées pour le graphe non-orienté sous-jacent.

Le minimum des réels  $r > 0$  pour lesquels  $G$  admet une *r-coloration circulaire* est appelé *nombre chromatique circulaire*, noté  $\chi_{\text{circ}}(D)$ . Le minimum des réels  $r > 0$  pour lesquels il existe une *r-coloration cyclique* (par rapport à  $\mathcal{O}$ ) s'appelle *nombre chromatique cyclique* et est noté  $\chi_c(\mathcal{O})$ . (Il est facile de prouver que  $\chi_{\text{circ}} \leq \chi \leq \lceil \chi_{\text{circ}} \rceil \leq \lceil \chi_c(\mathcal{O}) \rceil$ , où  $\chi = \chi(D)$  est le nombre chromatique usuel.)

Il est clair que  $\chi_c(\mathcal{O})$  est borné inférieurement par la longueur cyclique de n'importe quel circuit. En effet si on a une *r-coloration cyclique*, et  $C$  un circuit orienté,  $r \text{ind}_{\mathcal{O}}(C) = \sum_{xy \in C} l_f(xy) \geq |C|$ . Le théorème suivant établit la dualité de ces deux quantités.

**Théorème 4.2** *Soit  $D = (V, A)$  un digraphe fortement connexe et  $\mathcal{O}$  un ordre cyclique cohérent de  $V$ . Alors*

$$\chi_c(\mathcal{O})(D) = \max\{l_{\mathcal{O}}(C) : C \text{ circuit de } D\}.$$

**Remarques :**

- Modulo le changement de contexte, la première étape de la preuve est en fait contenue dans la preuve du Théorème 4.1. C'est dans la preuve des Faits 2 et 3 que l'on va réellement utiliser la cohérence et que des idées nouvelles apparaissent. Néanmoins on a choisi de la mettre en entier cette preuve de programmation linéaire afin d'avoir une démonstration indépendante de ce résultat intéressant.
- Ainsi qu'il avait été noté par Bessy et Thomassé dans [15], comme pour tout circuit  $C$ ,  $|C| \geq l_c(C)$ , et que  $\chi(D) \leq \chi_{\mathcal{O}}(D)$ , ce résultat a pour corollaire un résultat de Bondy de 1971 ([12]) selon lequel tout digraphe fortement connexe contient un circuit de longueur supérieure ou égale au nombre chromatique.

**Preuve :**

Soit  $O = (v_1, \dots, v_n)$  un ordre linéaire de  $V$ , appartenant à l'ordre cyclique  $\mathcal{O}$ . On note les arcs  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ .

Considérons le problème d'optimisation linéaire (P) suivant :

$$\begin{aligned} \text{maximiser} \quad & \mathbf{1} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^m x_i \\ \text{sous les contraintes} \quad & \mathbf{M} \mathbf{x} \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{c} \mathbf{x} \leq 1 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

où, de même que dans la preuve du Théorème 3.5,  $\mathbf{M} = (m_{ij})$  désigne la matrice  $n \times m$  d'incidence de  $D$  :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ est le début } a_j \\ -1 & \text{si } v_i \text{ est la fin } a_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)$  le vecteur caractéristique des arcs retour :

$$c_j = \begin{cases} 1 & \text{si } a_j \text{ est un arc retour} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Clairement ce programme linéaire est faisable et borné

**Fait 1 :** L'optimum du problème (P) est égal au membre droit de l'égalité du théorème.

En effet, comme on l'a déjà vu dans la preuve du Théorème 3.5  $\mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$  implique  $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , donc les solutions primales sont des circulations, c'est à dire des combinaisons linéaires de circuits. On écrit  $x = \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda_C C$ , ( $\lambda_C \geq 0$ ), où  $\mathcal{C}$  est un ensemble de circuits. La condition  $\mathbf{c}\cdot\mathbf{x} \leq 1$  est donc équivalente à  $\sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda_C \text{ind}(C) \leq 1$ . Ce qui nous permet de décrire :

$$1.\mathbf{x} = \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda(C) |C| = \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda(C) \text{ind}(C) l_O(C) \leq \max\{l_O(C) : C \text{ circuit de } D\}$$

Enfin, il est clair que n'importe quel circuit  $C$  de  $D$  est représenté par la solution  $C/\text{ind}(C)$  de ce problème, et l'affirmation est bien montrée.

Remarquons que la preuve du Fait 1 n'a pas utilisé l'hypothèse de cohérence faite sur l'ordre cyclique. Posons  $(\pi_1, \dots, \pi_n, r)$  une solution du dual réalisant l'optimum. On va construire à partir de ce vecteur une  $r$ -coloration.

D'après le Fait 1,  $r = \max\{l_O(C) : C \text{ circuit de } D\} > 1$ .

**Fait 2 :** Pour tout arc avant  $uv$ ,  $1 \leq \pi_v - \pi_u \leq r - 1$ .  
Pour tout arc retour  $uv$ ,  $1 \leq \pi_u - \pi_v \leq r - 1$ .

Tout d'abord écrivons les contraintes du problème dual.  $(\pi_1, \dots, \pi_n, r)$  vérifie :

pour tout arc  $a = uv \in A$  :

$$\pi_v - \pi_u \geq \begin{cases} 1 & \text{si } uv \text{ arc avant} \\ 1 - r & \text{si } uv \text{ arc retour} \end{cases} \quad (4.5)$$

De plus, par cohérence, si  $uv$  est un arc retour, il existe un chemin avant  $P$  qui va de  $v$  à  $u$ , et en sommant les inégalités correspondant aux arcs de ce chemin on obtient :  $\pi_u - \pi_v \geq |P| - 1 \geq 1$ .

De façon similaire, si  $uv$  est un arc avant,  $uv$  appartient à un circuit  $C$  d'indice 1. Soit  $u'v'$  l'unique arc retour de  $C$ . Alors  $\pi_{v'} \leq \pi_u \leq \pi_v \leq \pi_{u'}$ , et donc  $|\pi_u - \pi_v| \leq |\pi_{u'} - \pi_{v'}| \leq r - 1$ . Ceci conclut la preuve du Fait 2.

Pour toute solution duale  $(\pi_1, \dots, \pi_n, r)$  de  $(P^*)$  définissons  $f : V(D) \rightarrow [0, r)$  par  $\pi_i = p(v_i)r + f(v_i)$ , c'est à dire que  $f(v_i)$  est le reste de  $\pi_i$  modulo  $r$ . Il est immédiat de vérifier que le Fait 2 implique que  $f$  est une  $r$ -coloration circulaire.

**Fait 3 :** La fonction  $f$  est une  $r$ -coloration cyclique de  $\mathcal{O}$ .

Il ne nous reste plus qu'à montrer que  $f$  définit un ordre cyclique *équivalent* à  $\mathcal{O}$ . On commence par remarquer que l'ordre défini par  $\pi$  est bien équivalent



à  $O$ . En effet, ces deux ordres ont le même ensemble d'arcs retour donc le Théorème 3.3 permet de conclure. On va donc montrer que les ordres définis par  $f$  et  $\pi$  sont équivalents. On peut conclure par deux méthodes différentes. On va exposer ces deux méthodes car elles n'utilisent pas les mêmes outils.

**Méthode 1 :**

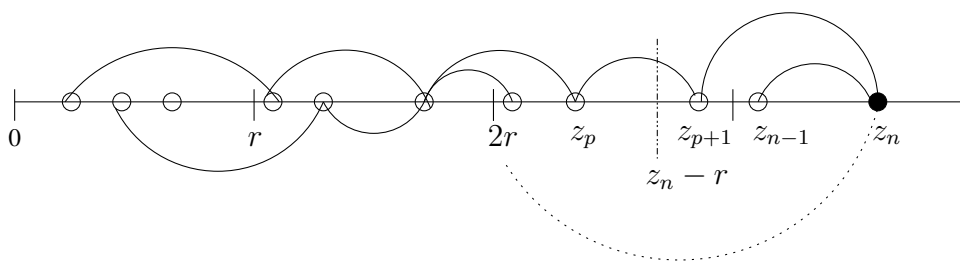


FIG. 4.3 – Méthode 1 : Le sommet d'affixe  $z_n$  n'est relié par aucun arc aux sommets d'affixes inférieur à  $z_n - r$  ...

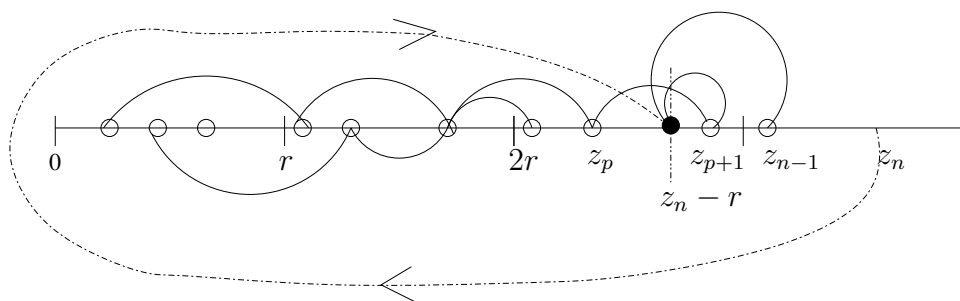


FIG. 4.4 – ... on peut donc le switcher avec tout ces sommets et l'amener en position  $z_n - r$  sans changer d'ordre cyclique.

On va explicitement montrer que l'ordre  $O_f$  défini par l'ordre croissant sur  $f$  est équivalent à  $O_\pi$  défini par  $\pi$ . Afin de simplifier les notations, si  $0 \leq \pi_{j_1} \leq \pi_{j_2} \leq \dots \leq \pi_{j_n}$  on note  $v_{j_k} = w_k$  et  $\pi_{j_k} = z_k$ . Supposons que  $r \leq z_n$  et  $0 \leq z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_p \leq z_n - r \leq z_{p+1} \leq \dots \leq z_n$ . Alors  $(w_1, w_2, \dots, w_p, w_n, w_{p+1}, \dots, w_{n-1})$  est un ordre linéaire équivalent à  $O_\pi = (w_1, \dots, w_n)$ . En effet, grâce au Fait 2, on sait qu'il n'y a pas d'arc entre  $w_n$  et les sommets  $w_i$  tels que  $z_i \leq z_n - r$ , donc on peut switcher  $w_n$

avec  $w_1$ , puis  $w_2$  et ainsi de suite jusqu'à ce que  $w_n$  ait atteint la position donnée par  $z_n - r$ . Ensuite on peut faire la même chose pour le nouveau sommet d'affixe maximal (qui peut être encore  $w_n$  si  $p = n - 1$ ) et on continue jusqu'à ce que tous les  $z_i$  aient un affixe inférieur à  $r$ . Les positions des points sont alors exactement celles données par les valeurs de  $f$ , ce qui était notre but.

### Méthode 2 :

D'après le Théorème 3.2, il suffit de montrer que dans l'ordre linéaire  $O_f$ , les indices des circuits sont les mêmes que dans  $O_\pi$ , puisque l'on a montré que ce dernier appartenait à  $\mathcal{O}$ .

Soit  $C$  un circuit quelconque. Grâce au Fait 2, on sait que pour tout arc  $uv$ ,  $p(u) - p(v)$  est égal à  $-1$ ,  $0$ , ou  $1$ . De façon claire, les arcs  $uv$  avec  $p(u) = p(v)$  ne changent pas de statut avant ou retour lorsque l'on passe de  $O_\pi$  à  $O_f$ . Le Fait 2 implique aussi que dans le cas  $p(u) - p(v) = 1$ ,  $uv$  est retour dans  $O_\pi$ , et avant dans  $O_f$ ; de façon similaire, si  $p(u) - p(v) = -1$ , alors  $uv$  est un arc avant dans  $O_\pi$ , et retour dans  $O_f$ . Comme  $\sum_{uv \in C} p(u) - p(v) = 0$ , on a :

$$|\{uv \in C : p(u) - p(v) = 1\}| = |\{uv \in C : p(u) - p(v) = -1\}|,$$

c'est à dire que le nombre d'arcs retour de  $C$  est le même dans  $O_\pi$  et  $O_f$ , ce qui était bien notre objectif.

Les Faits 1 et 3 prouvent que  $\max\{l_{\mathcal{O}}(C) : C \text{ circuit de } D\} = r \geq \chi_{\mathcal{O}}(D)$ . Grâce à la remarque faite juste avant l'énoncé du théorème, on a bien égalité et ceci conclut la preuve. ■

## 4.4 Retour à la maille cyclique et étude du cas général

Le résultat que l'on vient de montrer dans la section précédente peut s'exprimer en termes de maille cyclique de la façon suivante.

**Théorème 4.3** *Si  $D = (V, A)$  est un digraphe fortement connexe muni d'un ordre cyclique  $\mathcal{O}$  anti-cohérent, alors il existe un plongement  $f$  des sommets de  $D$  dans le cercle de périmètre 1, équivalent à  $\mathcal{O}$ , tel que pour tout arc  $a \in A$ ,  $l_f(a) \leq 1/g_c(\mathcal{O})$ .*

Ainsi dans ce cas on a réussi à lier la maille cyclique avec une représentation géométrique du digraphe, ce que ne permettait pas de faire le Théorème 4.1.

Le problème si l'on voulait faire un lien entre la maille cyclique et la maille classique du digraphe est que dans le cas d'un ordre cyclique anticonhérent, les circuits vont être d'indices grands et donc que la maille cyclique risque d'être très inférieure à la vraie maille. On veut donc voir si, en addition du Théorème 4.1, on peut obtenir dans le cas d'un ordre cyclique quelconque un résultat qui traduise la maille cyclique en terme de plongements associés.

**Corollaire 4.1** *Soit  $D = (V, A)$  un digraphe muni d'un ordre cyclique  $\mathcal{O}$ . Il existe des fonctions  $f : V \mapsto [0, 1[$  et  $p : A \mapsto ]-\infty, 1] \cap \mathbb{Z}$  telles que  $p$  est une pondération des arcs équivalente à  $\mathcal{O}$  et :*

$$\forall a = (x, y) \in A \quad f(y) - f(x) \leq 1/g_c(\mathcal{O}) - p(a)$$

**Preuve :**

Soit  $\omega$  donné par le Théorème 4.1. Par le Lemme 4.1, il existe  $f : V \mapsto [0, 1[$  telle que  $\forall a \in A, l_f(a) = \omega(a) - \lceil \omega(a) - 1 \rceil$ . Soit  $\varepsilon$  la fonction à valeurs dans  $\{0, 1\}$  définie sur  $A$  par  $\varepsilon_f(a) = 1$  si  $a$  est un arc retour dans  $f$  et 0 sinon. Alors

$$f(y) - f(x) = \omega(a) - \lceil \omega(a) - 1 \rceil - \varepsilon_f(a) \leq \delta_c(\mathcal{O}) - p(a)$$

où  $p(a) = \lceil \omega(a) - 1 \rceil + \varepsilon_f(a)$  prend bien ses valeurs dans l'ensemble voulu et la première égalité implique que  $p$  est équivalent à  $\mathcal{O}$ . ■

Une telle paire  $(f, p)$  est appelée  $\delta_c(\mathcal{O})$ -plongement de  $(D, \mathcal{O})$ .

**Remarque 4.1** *Si  $p(a) = 1$ , alors  $f(y) < f(x)$  puisque  $1/g_c(\mathcal{O}) < 1$ . Donc pour tout circuit  $C$  :*

$$ind_{\mathcal{O}}(C) = \sum_{a \in C} p(a) \leq |\{a \in C : p(a) = 1\}| \leq ind_f(C).$$

*Ainsi, le plongement  $f$  que l'on récupère représente un ordre cyclique qui est supérieur à  $\mathcal{O}$  pour l'ordre partiel que l'on avait défini en 3.2. Par exemple, comme les anticonhérents sont maximaux pour cet ordre, alors dans ce cas, le plongement  $f$  est équivalent à  $\mathcal{O}$ .*

Soit donc  $(f, p)$  donnée par le résultat précédent. Quelles propriétés peut-on déduire de ce plongement ? Avant d'aller plus loin, on a besoin d'une définition :

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on définit  $g : V \rightarrow [0, 1[$  par  $g(x) \equiv f(x) + \alpha \pmod{1}$  et  $p' : A \rightarrow \mathbb{R}$  par  $p'(a) = p(a) + \epsilon$ ,

$$\text{où } \epsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ est un arc avant dans } f \text{ et retour dans } g \\ -1 & \text{si } a \text{ est un arc retour dans } f \text{ et avant dans } g \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

$(g, p')$  est appelé un  $\alpha$ -shift de  $(f, p)$ . Il est facile de constater que  $g$  est aussi un  $\delta_c(\mathcal{O})$ -plongement de  $D$  muni de l'ordre  $\mathcal{O}$ .

La remarque que l'on peut faire alors est la suivante :

**Proposition 4.1** *Soit  $(f, p)$  un  $\delta_c(\mathcal{O})$ -plongement de  $(D, \mathcal{O})$ . Pour tout intervalle  $I = [a, b[$  de  $[0, 1[$  de longueur au moins  $\delta_c$ , l'ensemble  $f(V) \cap I$  est une feedback vertex set, c'est à dire que  $D \setminus X$  est acyclique.*

### Preuve

Quitte à considérer un  $(-a)$ -shift de  $f$ , on peut supposer que  $I = [0, d[$ , où  $d \geq \delta_c(\mathcal{O})$ . Supposons par l'absurde que  $C$  soit un circuit de  $D \setminus X$ . Pour tout arc  $a = (x, y)$  de  $C$ , on a  $f(y) - f(x) > \delta_c(\mathcal{O}) - 1$ . Par définition de  $f$ , on a  $f(y) - f(x) \leq \delta_c(\mathcal{O}) - p(a)$ . En particulier,  $p(a) < 1$ . Comme  $p$  est à valeurs entières, on a  $p(a) \leq 0$  pour tout arc de  $C$ , ce qui est impossible puisque  $p(C) = \text{ind}(C) \geq 1$ . ■

On peut alors énoncer le résultat suivant :

**Théorème 4.4** *Soit  $D = (V, A)$  un digraphe. Les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *Il existe un ordre linéaire des sommets de  $D$  telle que pour tout circuit  $C$   $|\{\text{arcs avant de } C\}| \geq |C|/k$ .*
2. *Il existe une partition des sommets de  $D$  en  $k$  digraphes acycliques.*

### Preuve

Supposons que (1) soit vrai. Cela revient exactement à dire qu'il existe un ordre cyclique  $\mathcal{O}$  tel que  $g_c(\mathcal{O}) \geq \frac{k}{k-1}$  et donc  $1 - \delta_c(\mathcal{O}) \geq \frac{1}{k}$ . Si tel est le cas, on considère  $(f, p)$  un  $\delta_c(\mathcal{O})$ -plongement de  $(D, \mathcal{O})$ . Alors, d'après la

proposition 4.1  $[0, 1/k[, [1/k, 2/k[, \dots, [1 - 1/k, 1[$  partitionne  $V$  en digraphes acycliques.

Inversement, supposons que (2) soit vraie. Pour un digraphe acyclique, il est clair que l'on peut trouver un ordre linéaire sur ses sommets tels que tous les arcs sont des arcs avant. Si on partitionne  $D$  en digraphes  $(D_1, \dots, D_k)$  acycliques, on note  $O_i$  ces ordres pour chaque digraphe  $D_i$ , et on définit un ordre linéaire  $O$  sur les sommet de  $D$  en juxtaposant :  $O = O_1, O_2, \dots, O_k$ . Dans cette énumération, les arcs retour sont seulement les arcs  $(x, y)$  où  $x \in D_i$  et  $y \in D_j$ , avec  $i > j$ . Ainsi  $O$  satisfait les conditions de (1) ■

Par exemple, dans le cas  $k = 2$  on obtient que l'existence d'un ordre cyclique  $\mathcal{O}$  tel que  $g_c(\mathcal{O}) \geq 2$  est équivalente à la possibilité de partitionner  $D$  en deux acycliques. Cela pourrait être un moyen de montrer la conjecture de Neumann-Lara suivante :

**Conjecture 4.1 (V. Neumann-Lara)** *Si  $D$  est un digraphe planaire,  $D$  peut être partitionné en deux acycliques.*

## 4.5 Inversions de circuits

Pour finir ce chapitre on va montrer un résultat lié au même sujet. On s'intéresse aux digraphes que l'on peut obtenir en répétant l'opération suivante : on inverse le sens de tous les arcs d'un circuit du digraphe. On prouve le résultat suivant :

**Théorème 4.5** *Pour tout digraphe, Il existe une suite d'inversions de circuits telle que le digraphe obtenu soit partitionnable en deux acycliques.*

### Preuve

Soit  $D = (V, A)$  un digraphe, on note  $n = |V|$  et  $m = |A|$ .

D'après le Théorème 4.4, si on se donne au départ un ordre cyclique sur les sommets, il suffit d'arriver après une séquence d'inversions de circuits sur un digraphe pour lequel la maille cyclique dans cet ordre est supérieure ou égale à 2. On commence par faire la remarque suivante : si  $\mathcal{O}$  est un ordre cyclique des sommets de  $D$ , considérons la fonction de  $\mathcal{O}$  donnée par  $f(\mathcal{O}) = \sum_{a \in A} l(a)$ , où  $l(a)$  est la longueur de l'arc  $a$  dans cet ordre. Si on inverse un circuit  $C$  de longueur cyclique strictement inférieure à 2, alors

cette quantité décroît strictement d'au moins  $1/n$ . En effet, inverser un arc revient à remplacer sa longueur  $l(a)$  par  $(1 - l(a))$  et donc

$$\sum_{a \in C} (1 - l(a)) = |C| - \text{ind}(C) < \text{ind}(C) - 1/|C| \leq \sum_{a \in C} l(a) - 1/n$$

Ainsi, si on part d'un digraphe  $D$  muni d'un ordre cyclique  $\mathcal{O}$  quelconque, soit  $g_c(\mathcal{O}) \geq 2$  auquel cas on a gagné, soit il existe un circuit de longueur cyclique strictement inférieure à 2. Dans ce cas on l'inverse et la somme des longueurs décroît strictement d'au moins  $1/n$ . Comme cette somme est de toute façon bornée inférieurement (par  $m/n$ ) cela signifie qu'au bout d'un certain nombre d'inversions, on arrive bien à un digraphe partitionnable en deux acycliques. ■

# Chapitre 5

## La Conjecture de Caccetta-Häggkvist

### 5.1 Introduction

Dans cette partie, on veut discuter d'une conjecture de théorie des graphes orientés, que l'on a déjà évoqué dans la partie précédente. La conjecture s'énonce de la façon suivante :

**Conjecture 5.1 (Caccetta-Häggkvist - 1978)** *Soit  $D$  un digraphe sur  $n$  sommets. Si pour tout sommet  $x$   $|x^+| \geq n/k$ , où  $k$  est un entier, alors il existe dans  $D$  un circuit orienté de longueur inférieure à  $k$ .*

On peut aussi dire que si un digraphe à  $n$  sommets a degré sortant minimum supérieur à  $r$ , alors il existe un circuit de longueur au plus  $\lceil n/r \rceil$ . La Conjecture a été démontrée pour  $r = 2$  pour Caccetta et Häggkvist, pour  $r = 3$  par Hamidoune et pour  $r = 4, 5$  par Hoàng et Reed.

Les cas qui nous intéressent ici sont les petites valeurs de  $k$  dans l'énoncé 5.1, le cas  $k = 3$  restant non démontré. Pour ce cas, la borne suivante peut être obtenue :

**Proposition 5.1** *Soit  $D = (V, A)$  un digraphe sur  $n$  sommets. Si  $\forall x \in V$   $|x^+| \geq pn$ , où  $p \geq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382$ , alors  $D$  contient un circuit de taille au plus 3.*

#### Preuve

On fait une preuve par récurrence sur  $n$ . Supposons par l'absurde qu'il

n'existe pas de circuit de longueur inférieure ou égale à 3. Par un argument de moyenne il est facile de voir qu'il existe un sommet  $x$  tel que  $|x^-| \geq pn$ . On note  $A$  son voisinage entrant et  $B$  son voisinage sortant, et par  $C$  son second voisinage sortant c'est à dire les sommets qui sont des voisins sortant de  $B$  mais qui ne sont pas dans  $B$ . Par hypothèse ces trois ensembles sont disjoints et  $|A| \geq pn$  et  $|B| \geq pn$ . On applique l'hypothèse de récurrence à  $B$  qui ne contient pas de triangle orienté, on sait donc qu'il existe un sommet de  $B$  de degré sortant inférieur  $p^2n$ . Cela implique que le reste de son voisinage est inclus dans  $C$  et donc  $|C| \geq pn - p^2n$ .

Mais on doit avoir  $|A| + |B| + |C| < n$ , soit  $p^2 - 3p + 1 < 0$  et donc  $p < (3 - \sqrt{5})/2$ . ■

On voit dans cette preuve qu'il est intéressant d'avoir des informations sur le second voisinage  $x^{++}$  d'un sommet  $x$ . La conjecture du second voisinage de Seymour est la suivante :

**Conjecture 5.2 (Seymour)** *Soit  $D$  un digraphe. Il existe un sommet  $x$  tel que  $|x^{++}| \geq |x^+|$ .*

Cette conjecture implique le cas plus faible (mais toujours ouvert) de la conjecture 5.1 où on suppose que les voisinages sortants et entrants de tout sommet ont taille supérieure à  $n/3$ .

On peut aussi s'intéresser au nombre de contre-exemples a cette conjecture. Shen, dans ([46]) a démontré que pour  $r = n/k$  fixé , le nombre de contre-exemples à la conjecture 5.1 est fini. Plus précisément, il a montré que la conjecture est vraie quand  $n \geq 2r^2 - 3r + 1$ , ce qui implique donc le résultat si  $r \leq \sqrt{n/2}$ .

Avant de continuer on va présenter les familles classiques de digraphes extrémaux qui montrent que si la conjecture est vraie alors elle est meilleure possible.

La première famille a déjà été évoquée et se construit de la façon suivante. On place  $n = 3k + 1$  points équirépartis sur un cercle, et on met un arc de  $x$  vers les  $k$  sommets qui le suivent dans cet ordre cyclique. On voit ici quelque chose qui ressemble aux problèmes de longueur cyclique et de plongements circulaires évoqués dans la partie précédente. Le degré sortant de chaque sommet est donc  $n/3 - \varepsilon$  et comme chaque arc a une longueur strictement



plus petite que  $1/3$  du périmètre total du cercle il est clair qu'il n'y a pas de circuit de longueur 3.

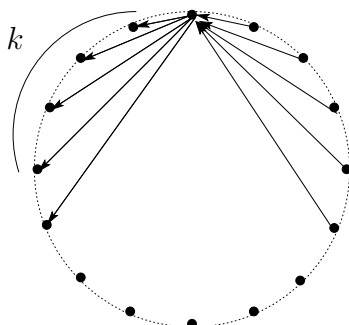


FIG. 5.1 – Un exemple de la première famille de graphes extrémaux pour  $k = 5$

La deuxième est un peu différente. On va la construire de façon récursive. On part du circuit à 4 éléments, noté  $C_4$ , c'est le premier digraphe. Ensuite on remplace chaque sommet par un  $C_4$  et on met tous les arcs entre les sommets correspondant aux sommets éclatés pour lesquels ces arcs existaient. Et on continue ainsi de suite. Le  $k$ -ème digraphe construit a donc  $4^k$  sommets et il est facile de montrer, par induction par exemple, que le degré sortant de chaque sommet est égal à  $(4^k - 1)/3$ . De plus, la taille d'un plus petit circuit ne peut diminuer à chaque étape (si jamais on a un circuit de longueur 3 dans un de ces digraphes alors il existe clairement un circuit de longueur inférieure dans celui qui le précède). Ainsi la maille est bien de 4 pour tous ces digraphes. On reviendra dans les sections suivantes sur ces exemples extrémaux. Le but de ce chapitre est de faire un tour d'horizon des connaissances sur cette question et de montrer quelques pistes d'études sur lesquelles nous avons travaillé avec Stéphane Thomassé durant ma thèse, avec plusieurs énoncés équivalents ou plus forts.

Dans toute la suite, on notera  $\mathcal{D}_k$  l'ensemble des digraphes de maille strictement supérieure à  $k$ .

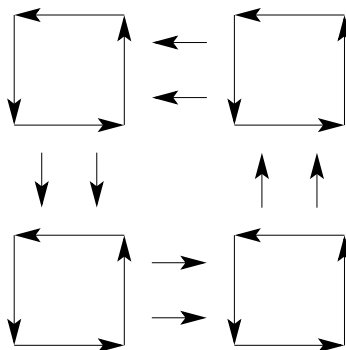


FIG. 5.2 – Un exemple de la deuxième famille de graphes extrémaux pour  $k = 2$

## 5.2 Plongements toriques

Dans cette section on va essayer d'étendre la notion de longueur cyclique à d'autres plongements en commençant par construire une famille générique. On part de l'idée suivante : on veut encore construire une famille naturelle de digraphes incluse dans  $\mathcal{D}_k$ . On va pour cela revenir sur la notion de longueur d'arc que l'on avait évoqué dans la section 4.3. La remarque simple que l'on a déjà faite est la suivante : si on dispose d'un digraphe plongé dans un cercle (de périmètre 1), de telle façon que tout arc ait une longueur circulaire inférieure strictement à  $1/k$ , alors ce digraphe ne contient pas de cycle de longueur inférieure ou égale à  $k$ . Dans ce cas, il est facile de voir qu'il existe un sommet de degré inférieur à  $n/k$ . En effet, par un argument de moyenne, il existe un arc (ouvert) de longueur  $1/k$  sur le cercle contenant strictement moins de  $n/k$  points. Le premier sommet qui précède cet arc aura alors son voisinage inclus dans cet arc et donc de la taille voulue. Malheureusement, il est clair que tous les digraphes de  $\mathcal{D}_k$  ne peuvent se représenter de cette façon. En effet pour un digraphe représentable de cette façon, les voisinages sortant sont acycliques, ce qui n'est évidemment pas le cas de tous les éléments de  $\mathcal{D}_k$ .

On veut généraliser cette remarque à des combinaisons d'ordres cycliques. Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux plongements de l'ensemble des sommets  $V = \{1, \dots, n\}$  d'un digraphe dans le cercle de périmètre 1. On définit la longueur moyenne

d'une paire ordonnée  $(i, j)$  par :

$$l_{f_1, f_2}(i, j) = \frac{l_{f_1}(i, j) + l_{f_2}(i, j)}{2}.$$

Et encore une fois il est facile de voir que si  $D$  est un digraphe tel que tous ses arcs ont une longueur moyenne inférieure à  $1/k$  strictement alors  $D \in \mathcal{D}_k$ . En effet, si on note  $\text{ind}_i$  l'indice d'un circuit dans le plongement  $f_i$ , en sommant les longueurs des arcs on obtient :

$$|C|/k > \sum_{a \in C} l_{f_1, f_2}(a) = \frac{\text{ind}_1(C) + \text{ind}_2(C)}{2} \geq 1.$$

Il est donc naturel de se demander si il est facile pour les digraphes représentables de cette façon de montrer l'existence d'un sommet de degré inférieur à  $n/k$ .

On va définir plus explicitement la classe de graphes à laquelle on s'intéresse. Étant donné les deux plongements  $f_1$  et  $f_2$  de  $V = \{1, \dots, n\}$  dans  $[0, 1]$ , et un réel  $\alpha \in ]0, 1[$ , on définit le digraphe  $D_{f_1, f_2, \alpha}$  d'ensemble de sommets  $V$  et d'arcs  $A = \{(i, j), \text{ tels que } l_{f_1, f_2}(i, j) < \alpha\}$ . Les graphes considérés plus haut sont donc des sous graphes de  $D_{f_1, f_2, 1/k}$ . Il est facile de visualiser le voisinage sortant d'un sommet, si on représente les sommets sur le carré  $[0, 1]^2$ . C'est un triangle isocèle rectangle pointé sur le sommet et dont les cotés égaux ont pour longueur  $2\alpha$ . Attention, on est dans le tore et donc il faut considérer ce triangle modulo 1. La figure 5.3 représente ce dessin.

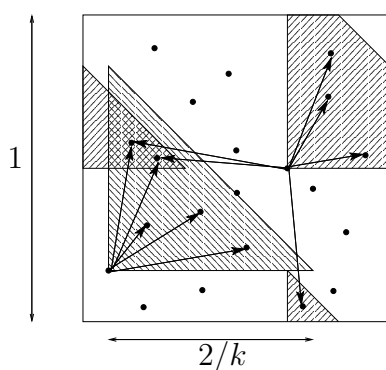


FIG. 5.3 – Un exemple de deux voisinages de sommets dans un graphe torique

Ici on s'est placé en dimension 2 mais il est facile de généraliser cette définition à n'importe quelle dimension en prenant la moyenne sur  $n$  plonge-

ments et on parle alors de digraphes toriques. On considère donc la classe de digraphes  $\mathcal{DT}_\alpha^n$  définie par :

$$\mathcal{DT}_\alpha^n = \{D \text{ digraphe, tel qu'il existe } f_1, \dots, f_n \text{ avec } D = D_{f_1, \dots, f_n, \alpha}\} \subset \mathcal{D}_{\lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor}$$

Malheureusement, même en dimension 2, on n'a pas réussi à prouver qu'un digraphe torique possédait un sommet de petit degré. Cette question est intéressante et sûrement accessible, notons ici qu'elle n'implique pas cependant la conjecture de Caccetta-Häggkvist puisqu'ainsi que nous le verrons dans la suite, tous les digraphes de  $D_k$  ne sont pas des digraphes toriques. Néanmoins cette construction nous a permis d'infirmier une conjecture due à Joseph Myers en relation avec la conjecture de Caccetta-Häggkvist.

**Conjecture 5.3 (J. Myers)** *Si  $D$  est un digraphe tel que toute paire de sommets possède un voisin sortant commun, alors  $D$  contient-il un circuit de longueur 3 ?*

Avant d'aborder cette question expliquons le lien avec la Conjecture de Caccetta-Häggkvist. Il faut pour cela poser la question plus forte suivante :

**Question :** Si  $D$  est un digraphe tel que les extrémités de tout arc possèdent un voisin sortant commun, alors  $D$  contient-il un circuit de longueur 3 ?

La raison qui fait que cette question est reliée à la Conjecture de Caccetta-Häggkvist est la suivante. Considérons un digraphe  $D = (V, A)$  sur  $n$  sommets, sans circuit de longueur 2, satisfaisant les conditions de degré de la version faible de la Conjecture de Caccetta-Häggkvist, c'est à dire que tout sommet a un voisinage sortant et un voisinage entrant de taille supérieure à  $n/3$ . Soient maintenant  $xy$  un arc de  $D$ . Comme le digraphe ne contient pas de circuit de longueur 2, cela implique que les voisinages sortants et entrants  $x^+$  et  $x^-$  de  $x$  sont disjoints. Mais si les voisinages sortants de  $x$  et  $y$  sont disjoints, comme ces trois ensembles  $x^+$ ,  $x^-$  et  $y^+$  sont de taille supérieure à  $n/3$ , alors cela signifie que  $x^-$  et  $y^+$  sont d'intersection non vide et que donc le digraphe contient un circuit de longueur 3.

Ainsi de même que pour la Conjecture du second voisinage de Seymour, si cette conjecture était vraie, alors elle impliquerait le cas faible de la Conjecture de Caccetta-Häggkvist. Néanmoins, il est facile d'infirmier cette question. Il suffit pour cela de considérer le produit  $C_4 \times C_4$ , qui est le deuxième élément de la deuxième famille de graphes extrémaux décrites dans l'introduction de

ce chapitre. C'est le digraphe dessiné à la figure 5.2. Dans ce digraphe, tout arc est dominé mais il n'y a pas de circuit de longueur 3.

On va maintenant infirmer la Conjecture faite par Joseph Myers.

Pour cela, on va considérer un digraphe torique en dimension 4 avec  $\alpha = 1/3$ . De même que précédemment, si on somme les longueurs moyennes (inférieures à  $1/3$  par hypothèse) des arcs d'un circuit  $C$ , on obtient que la moyenne des 4 indices dans chaque dimension est inférieure strictement à  $|C|/3$ . Ainsi on montre qu'un tel digraphe ne contient pas de circuit de longueur inférieure ou égale à 3. On va donc essayer de construire un tel digraphe avec en plus la propriété que tout couple de points ait un voisin sortant commun.

Soit  $p$  un entier assez grand, on définit l'ensemble des sommets  $V$  de notre digraphe :

$$V = \left\{ \frac{1}{p}(x_1, x_2, x_3, x_4), x_i \in [0, p[ \cap \mathbb{Z} \right\}$$

C'est le réseau standard de maille  $\varepsilon = 1/p$ , et on notera  $l$  la distance (orientée) moyenne dans ce tore de dimension 4. On considère deux points  $X$  et  $Y$  dans  $V$  et on leur cherche un voisin commun. On fait trois remarques :

- Quitte à permuter les points  $X$  et  $Y$  on peut supposer que  $l(X, Y) \leq 2$  (puisque pour tous points  $X$  et  $Y$ ,  $l(X, Y) + l(Y, X) = 4$ )
- Quitte à translater on peut supposer que le point  $X$  est de coordonnées  $(0, 0, 0, 0)$ .
- Quitte à permuter les variables, on peut supposer que les coordonnées  $(a, b, c, d)$  de  $Y$  vérifient  $a \leq b \leq c \leq d$ .

On va déterminer  $Z \in X^+ \cap Y^+$ . On distingue deux cas :

i)  $c + d > 2/3 + 4\varepsilon$ .

Cela implique donc  $a + b < 4/3 - 4\varepsilon$  puisque  $a + b + c + d \leq 2$ . Dans ce cas on prend  $Z = (a + \varepsilon, b + \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$  (où ces coordonnées sont prises modulo 1).

On a bien  $l(X, Z) = a + b + 4\varepsilon < 4/3$  et  $l(Y, Z) = 2 + 4\varepsilon - (c + d) < 4/3$ .

ii)  $c + d \leq 2/3 + 4\varepsilon$ .

Comme on a supposé  $a \leq b \leq c \leq d$ , cela implique  $a + b \leq 2/3 + 4\varepsilon$  et  $c \leq 1/3 + 2\varepsilon$ . On choisit alors  $Z = (a + \varepsilon, b + \varepsilon, c + \varepsilon, \varepsilon)$  et en prenant  $\varepsilon$  assez petit on a bien  $l(X, Z) = a + b + c + 4\varepsilon \leq 1 + 6\varepsilon < 4/3$  et  $l(Y, Z) = 1 + 4\varepsilon - d < 4/3$ .

Et cela conclut la construction du contre-exemple.

On finit cette section par deux questions.

On pourrait se demander si le même genre de construction, en gardant le paramètre de seuil  $1/3$  mais en augmentant la dimension, permettrait de construire des digraphes sans circuits de longueur inférieure ou égale à 3 mais tels que tout ensemble de  $k$  sommets possède un voisin sortant commun avec  $k$  fixé quelconque.

La réponse est non pour  $k \geq 3$ , le problème étant que si l'on considère les  $k$  points de la diagonale du cube de coordonnées toutes égales à  $i/k$ ,  $i = 0, \dots, k-1$ , alors pour tout point  $x$ , un rapide calcul montre que la somme des distances moyennes de ces points à  $x$  est strictement supérieure à 1. Ainsi il existe nécessairement un des points qui ne contient pas  $x$  dans son voisinage. Cette construction ne donne pas la réponse voulue, mais on ne sait pas si il existe de tels digraphes.

A l'inverse, à la suite de cette construction ; on peut aussi se poser la question intéressante suivante : si un digraphe vérifie cette propriété que tout couple ait un voisin sortant commun, est-ce que cela implique une borne sur la maille, ou alors est-ce que l'on peut construire de tels digraphes de maille arbitrairement grande ?

### 5.3 Barycentres d'ordres totaux, Vote de majorité

On va commencer par construire une famille de digraphes de maille strictement supérieure à un entier  $k$  donné.

Pour  $r \in [1/2, 1]$ , on dit qu'un digraphe  $D = (V, A)$  est un digraphe de  $r$ -majorité si il existe une famille  $\mathcal{P}$  d'ordres totaux (des ordres linéaires) sur l'ensemble  $V = \{1, \dots, n\}$  telle que  $(i, j) \in A$  si et seulement si  $i$  est placé avant  $j$  dans strictement plus de  $r|\mathcal{P}|$  ordres de la famille  $\mathcal{P}$ . On notera  $\mathcal{DM}_r$  l'ensemble des digraphes de  $r$ -majorité.

Pour fixer les idées le circuit de longueur 4 est un digraphe de  $r$ -majorité pour  $r$  quelconque dans  $[1/2; 3/4[$  en prenant la famille des 4 ordres 1234, 2341, 3412 et 4123.

Maintenant on veut faire un lien avec les digraphes toriques introduits

dans la section précédente. On va montrer qu'en fait les digraphes de  $(1-r)$ -majorité sont exactement l'ensemble des digraphes toriques de paramètre  $r$  c'est à dire :

**Proposition 5.2**

$$\mathcal{DM}_{1-r} = \bigcup_{d=1}^{\infty} \mathcal{DT}_r^d$$

**Preuve**

Soit  $D \in \mathcal{DT}_r^d$ . Pour fixer les idées, supposons pour commencer que  $d = 1$ . On a donc un plongement des sommets de  $D$  sur un cercle donc un certain ordre cyclique. Supposons que l'on "ouvre" cet ordre pour en faire plusieurs ordres linéaires en coupant avec un pas de  $1/p$ , avec  $p$  entier (voir figure 5.4). On fait en sorte que les points où l'on ouvre l'ordre ne soient pas des sommets du digraphe, c'est qui est toujours possible en prenant  $p$  assez grand. Si on fait tendre  $p$  vers l'infini, alors quelle est la proportion d'ordres dans lequel un arc donné est un arc retour ? Un arc  $xy$  est retour si et seulement si on a coupé l'ordre circulaire entre  $x$  et  $y$ . La proportion va donc tendre exactement vers la longueur de l'arc dans le plongement circulaire. Plus précisément si on note  $f(a)$  le nombre d'ordres dans lesquels  $xy$  en un arc retour, et  $l(a)$  la longueur de l'arc  $xy$ , on a  $pl(a) \leq f(a) \leq pl(a) + 1$ . Ainsi la proportion  $m(a) = 1 - f(a)/p$  d'ordres dans lesquels l'arc est un arc avant vérifie  $1 - l(a) - 1/p \leq m(a) \leq 1 - l(a)$ . Comme  $l(a) < r$  pour tout  $a$ , on peut donc choisir  $p$  assez grand de façon à ce que  $m(a) > 1 - r$  pour tout  $a$ .

Pour  $d \geq 1$ , on fait la même chose sur chaque dimension, avec le même  $p$ . La proportion obtenue  $m(a)$  est alors la moyenne des propositions dans chaque dimension et comme cette fois c'est la longueur moyenne qui est bornée par  $r$ , le même raisonnement convient.

Réciproquement, si  $D \in \mathcal{DM}_{1-r}$ , on va réaliser  $D$  comme un digraphe torique. Soient  $L_1, \dots, L_s$  les ordres linéaires qui font de  $D$  un digraphe de  $(1-r)$ -majorité. On se donne  $\varepsilon$  (que l'on va faire tendre vers 0) et à chaque  $L_i = (v_1, \dots, v_n)$  on associe le plongement circulaire  $f_i$  défini par  $f_i(v_j) = \varepsilon j$ . Autrement dit, on "comprime" tout l'ordre sur un intervalle de taille  $\varepsilon$  placé au début du plongement. Ainsi la longueur d'un arc est inférieure à  $\varepsilon$  si l'arc est avant et proche de 1 si l'arc est retour. Si on note  $m(a) > (1-r)$  la proportion d'ordres dans lesquels  $a$  est un arc avant, la longueur moyenne de l'arc  $a$  vérifie donc :  $l(a) \leq 1 - m(a) + m(a)\varepsilon$  et en choisissant  $\varepsilon$  assez petit, on a bien  $l(a) < r$  pour tout  $a$ . ■

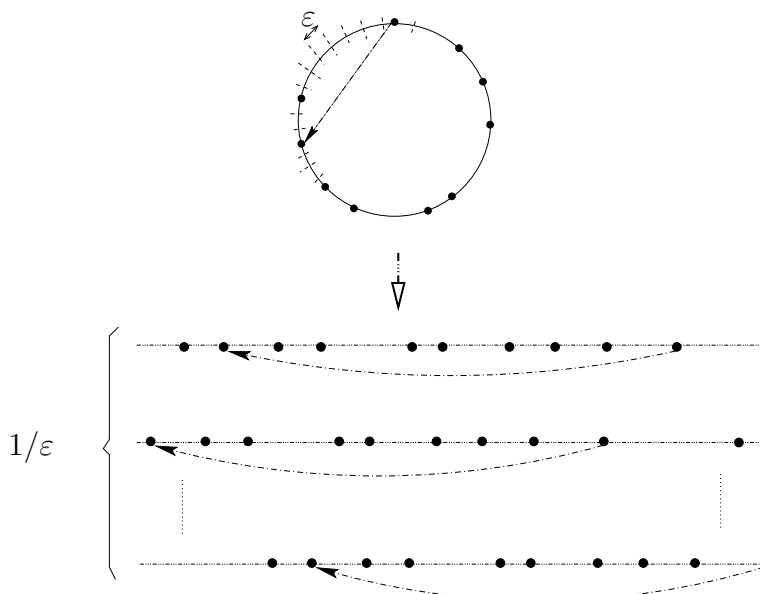


FIG. 5.4 – Passer d'un digraphe torique à un digraphe de majorité

Ainsi, les digraphes de  $(k - 1)/k$ -majorité ne contiennent pas de circuit orienté de longueur inférieure ou égale à  $k$ . On peut aussi dire plus simplement que si tel était le cas alors par un argument de moyenne facile, il existerait un des ordres dans lequel tous les arcs du circuit seraient des arcs avant, ce qui est évidemment impossible.

A partir de là, l'idée naturelle serait de :

- i) Montrer que tous les éléments de  $\mathcal{D}_k$  sont des digraphes de  $(k - 1)/k$ -majorité.
- ii) Montrer que dans un digraphe de  $(k - 1)/k$ -majorité, il existe un sommet de degré inférieur à  $n/k$ .

Malheureusement i) est vraie pour  $k = 2$  mais fausse pour  $k \geq 3$ .

Pour  $k = 2$ , cela signifie qu'on s'intéresse aux graphes orientés. On procède par induction sur le nombre d'arcs. Soit  $D$  un digraphe, on cherche une famille d'ordres linéaires sur les sommets tels que un arc appartienne à  $D$  si et seulement si il est un arc avant dans strictement plus de la moitié des ordres de la famille. Par hypothèse d'induction, pour tout arc  $a$ , il existe une famille d'ordres  $\mathcal{P}_a$  représentant le digraphe  $D \setminus a$ . Soit  $\mathcal{P} = \cup_{a \in A} \mathcal{P}_a$ ,



montrons que cette famille convient. En effet, un arc  $a = (i, j)$  de  $D$  est un arc avant dans strictement plus de la moitié des ordres pour les familles  $\mathcal{P}_b$   $b \neq a$  et comme  $(i, j)$  et  $(j, i)$  n'appartiennent pas à  $D \setminus a$ , cela signifie que dans la famille  $\mathcal{P}_a$   $i$  est avant  $j$  dans exactement la moitié des ordres. Les arcs de  $D$  apparaissent donc bien comme arcs avant dans strictement plus de la moitié des ordres de  $\mathcal{P}$ . Réciproquement si  $(i, j)$  n'est pas un arc de  $D$  alors ce n'est pas non plus un arc de  $D \setminus a$  pour tout  $a$  et pour les raisons décrites précédemment cela signifie que  $i$  apparaît avant  $j$  dans exactement la moitié des ordres de  $\mathcal{P}$  et on a bien démontré le résultat voulu.

Pour voir que la réponse est non dans le cas  $k \geq 3$ , on va utiliser un argument probabiliste. On va voir que les graphes obtenus par cette construction sont loin d'être des graphes aléatoires. En effet, considérons une orientation aléatoire des arêtes d'un biparti complet équilibré sur  $2n$  éléments. La remarque est que pour un tel digraphe, un feedback arc set (un ensemble d'arcs dont la suppression rend le digraphe acyclique) de taille minimum a taille au moins  $m/2 - o(m)$ . Cela provient du fait que le nombre d'arcs dans un feedback arc set suit une loi binomiale et par Tchebycheff par exemple on obtient facilement cette borne. Or si ce devait être un digraphe de  $2/3$ -majorité pour une famille d'ordres  $L_1, L_2, \dots, L_s$ , par double comptage il existerait dans la famille d'ordre un ordre dans lequel strictement plus de  $2/3$  des arcs sont des arcs avant, ce qui donnerait donc un feedback arc set de taille inférieure à  $n/3$ .

Désormais pour fixer les idées on s'intéresse au cas  $k = 3$ , la borne devient donc  $2/3$ .

On a donc vu que tous les digraphes de  $\mathcal{D}_3$  ne peuvent être représentés par ces constructions. On va essayer de raffiner ce raisonnement.

Pour cela on va représenter les digraphes par leurs matrices d'incidence. C'est à dire la matrice carrée de taille le nombre de sommets et telle que  $a_{ij} = 1$  si  $(i, j)$  est un arc et 0 sinon. Par exemple, les matrices correspondant aux ordres totaux sont donc à une permutation des lignes et colonnes près, des matrices triangulaires supérieures. On commence par prendre l'enveloppe convexe des ordres totaux, c'est à dire l'ensemble des barycentres de ces matrices (les barycentres que l'on a considérés par le biais des familles d'ordres sont à coefficients rationnels mais évidemment tout est identique dans le cas réel). Ensuite, les digraphes que l'on a construit précédemment sont obtenus à partir de ce polyèdre en tronquant de la façon suivante. Chaque entrée de la matrice obtenue comme barycentre, est remplacée par un 1 si l'entrée

est strictement supérieure à  $2/3$  et par un  $0$  sinon. On obtient donc une matrice de graphe orienté et toutes les matrices obtenues ainsi représentent exactement les digraphes que l'on pouvait construire grâce à nos familles d'ordres avec seuil  $2/3$ . On note  $\phi$  cette opération de troncature.

On étudie donc cette opération : en partant d'un ensemble de digraphes, représentés par leur matrices d'incidence,

- on prend l'enveloppe convexe des matrices
- on tronque toutes les matrices obtenues par  $\phi$ , pour obtenir un nouvel ensemble strictement plus gros de digraphes.

On désigne par  $\psi$  cette application, et  $\mathcal{OT}$  l'ensemble des ordres totaux. Pour les raisons expliquées plus haut, les digraphes que l'on obtient par itération de  $\psi$  sont tous dans  $D_3$ . On a donc  $\cup_{i=1}^{\infty} \psi^i(\mathcal{OT}) \subset D_3$ . Et réciproquement, on peut montrer que tous les digraphes de maille plus grande que 3 sont obtenus par une telle construction. En effet, supposons le contraire et considérons un contre-exemple minimal  $D$  pour le nombre d'arcs. Par minimalité pour tout arc  $a$  de  $D$ , le digraphe  $D \setminus a$  est obtenu par une telle construction. Il existe donc un indice  $p$  tel que pour tout arc  $a$ ,  $D \setminus a \in \psi^p(\mathcal{OT})$ . Soit  $M$  la matrice d'incidence de  $D$  et  $M_a$  la matrice d'incidence de  $D \setminus a$ . Alors, en notant  $\|D\|$  le nombre d'arcs de  $D$ , il est facile de voir que

$$M = \frac{1}{\|D\| - 1} \sum_{a \in A} M_a = \phi\left(\frac{1}{\|D\|} \sum_{a \in A} M_a\right).$$

Ainsi  $D \in \psi^{p+1}(\mathcal{OT})$  et on a bien montré :

$$\cup_{i=1}^{\infty} \psi^i(\mathcal{OT}) = D_3$$

**Remarque 5.1** *Il est facile de vérifier que l'on peut faire la même chose pour les graphes non-orientés sans triangle. La seule différence est que l'on part non pas des ordres totaux mais des graphes bipartis complets.*

Revenons maintenant au point ii) évoqué à la page 66. Comme les digraphes de  $(k-1)/k$ -majorité sont dans  $\mathcal{D}_k$ , si la conjecture de Caccetta-Häggkvist est vraie, alors il doit y avoir au moins un sommet de degré sortant inférieur à  $n/k$ . Une des motivations pour étudier ce cas est que tous les digraphes extrémaux évoqués dans l'introduction de cette partie sont des digraphes de  $(k-1)/k$ -majorité. Montrer donc ii) serait donc meilleur possible.

**Proposition 5.3** *Les deux familles de graphes extrémaux décrites en 5.1 peuvent être réalisées comme digraphes de 2/3-majorité avec une famille de 4 ordres, c'est à dire que chaque arc apparaît comme arc avant dans au moins 3 ordres sur 4.*

### Preuve

Pour la première famille décrite dans l'introduction, montrer que ce sont des digraphes de 2/3-majorité si on n'impose pas le nombre d'ordre dans la famille est facile, puisqu'en fait ces digraphes sont plongeables dans le cercle avec une longueur d'arc inférieure à  $1/3$ . Néanmoins on veut les réaliser avec 4 ordres. Pour cela, on commence par construire trois ordres. Pour ces trois ordres, certains arcs seront des arcs avant dans les trois, donc quel que soit le quatrième ordre que l'on pourra prendre, ces arcs seront présents dans le graphe de majorité obtenu. Les autres arcs seront des retour dans un des trois ordres. Il faudra alors construire le quatrième ordre de façon à ce que, dans cet ordre, ces arcs soient tous des arcs avant. Ce sera possible car on verra que ces arcs induisent un digraphe acyclique (et on sait qu'un digraphe acyclique peut être représenté par un ordre linéaire avec tous ces arcs vers l'avant). On rappelle que le digraphe que l'on considère est obtenu en plaçant  $3k + 1$  sommets sur un cercle et en mettant un arc d'un sommet vers les  $k$  sommets qui lui succèdent dans l'ordre cyclique. Les points sont notés  $(1, 2, \dots, 3k + 1)$ . Les trois premiers ordres que l'on considère sont alors :

$$\begin{aligned} &1, \dots, k, k + 1, \dots, 2k, 2k + 1, \dots, 3k + 1 \\ &k + 1, \dots, 2k, 2k + 1, \dots, 3k + 1, 1, \dots, k \\ &2k + 1, \dots, 3k + 1, 1, \dots, k, k + 1, \dots, 2k \end{aligned}$$

On voit facilement que tout arc de notre digraphe est un arc avant dans au moins deux de ces trois ordres, il ne reste plus qu'à montrer que ceux qui sont retour une fois constituent un digraphe acyclique.

Supposons qu'il existe un circuit  $C$  utilisant ces arcs. On va s'intéresser à l'indice de ce circuit dans les ordres construits. On rappelle que l'indice peut être vu à la fois comme le nombre d'arcs retour dans un ordre linéaire, mais aussi comme la somme des longueurs des arcs dans une représentation circulaire. On va utiliser ces deux points de vue pour aboutir à une absurdité. Tout d'abord, l'indice de ce circuit dans les trois ordres précédents est le même, puisque ce sont trois ordres linéaires issus du même ordre cyclique. De plus, comme chaque arc est retour dans exactement un des ordres, cela signifie

que la somme des indices (donc en fait 3 fois l'indice) est égal exactement à  $|C|$ . Maintenant du point de vue des longueurs, comme par hypothèse tout arc a une longueur inférieure à  $k/3k + 1$ , la somme des longueurs dans un quelconque des trois ordres doit être inférieure à  $k|C|/(3k + 1)$ . Finalement on devrait avoir  $k|C|/(3k + 1) \geq |C|/3$ , ce qui est impossible.

Pour la deuxième famille, on le montre par récurrence.. Supposons que pour la  $k$ -ième puissance du  $C_4$  on sache trouver ces 4 ordres  $L_1, L_2, L_3, L_4$  sur les  $4^k$  sommets. Pour la puissance suivante, on considère  $V_1, V_2, V_3, V_4$  de taille  $4^k$ . On notera  $L_i(V_j)$  les sommets de  $V_j$  dans l'ordre  $L_i$ . Les 4 ordres que l'on considère sont alors :

$$\begin{aligned} &L_1(V_1) L_2(V_2) L_3(V_3) L_4(V_4) \\ &L_1(V_4) L_2(V_1) L_3(V_2) L_4(V_3) \\ &L_1(V_3) L_2(V_4) L_3(V_1) L_4(V_2) \\ &L_1(V_2) L_2(V_3) L_3(V_4) L_4(V_1). \end{aligned}$$

On obtient bien 4 copies du digraphe précédent et qui sont reliés entre elles pour former un  $C_4$ . ■

Pour conclure, on veut donc s'intéresser à cette question précise, c'est à dire le cas de 4 ordres, cas que je n'ai pas pu résoudre. La question s'écrit alors :

**Question :** Étant donnés quatre ordres totaux sur  $\{1, \dots, n\}$ , si  $D$  est le digraphe dont les arcs sont ceux qui apparaissent comme arcs avant dans au moins 3 ordres sur les quatre,  $D$  contient-il un sommet de degré inférieur ou égal à  $n/3$ ?

## 5.4 Algèbre linéaire

Dans cette courte section on va présenter quelques pistes pour une étude de la conjecture de Caccetta-Häggkvist via les matrices d'incidence des digraphes. On rappelle que cette matrice  $\mathbf{A}$  est définie par  $A_{ij} = 1$  si  $(i, j) \in E$  et 0 sinon.

Ainsi, si  $\mathbf{A}$  est la matrice d'incidence de  $D$ , alors les degrés sortants des sommets de  $D$  sont donnés par le vecteur  $\mathbf{A}\mathbf{1}$ , où  $\mathbf{1}$  désigne le vecteur colonne dont toutes les entrées sont des 1.

D'un autre côté, les cycles de  $D$  peuvent être interprétés comme les traces des puissances de  $\mathbf{A}$ . En effet  $\text{Tr}(\mathbf{A}^n)$  représente le nombre de marches fermées de longueur  $n$ . Ainsi la maille d'un digraphe  $D$  est simplement donnée par  $g(D) = \inf\{k, \text{Tr}(\mathbf{A}^k) > 0\}$ .

Mais on peut interpréter ceci différemment car ces traces sont reliés de façon linéaire aux coefficients du polynôme caractéristique de  $\mathbf{A}$ ; c'est à dire  $\chi_{\mathbf{A}}(X) = \det(\mathbf{A} - X\mathbf{I}_n)$ . Cela provient des relations classiques coefficients-racines de Newton. Grâce à cette observation on peut déduire la proposition suivante :

**Proposition 5.4** *Soit  $\chi_{\mathbf{A}}(X) = \det(\mathbf{A} - X\mathbf{I}_n) = (-1)^n X^n + \sum_{k=1}^n a_k X^{n-k}$  le polynôme caractéristique d'une matrice  $\mathbf{A}$  de dimensions  $n \times n$ .  $\chi_{\mathbf{A}}$  est entièrement déterminé par l'ensemble  $\{\text{Tr}(\mathbf{A}^i), i = 1 \dots n\}$ . De plus, l'équivalence suivante est vraie pour tout  $k$ .*

$$\forall 1 \leq i \leq k \ a_i = 0 \iff \forall 1 \leq i \leq p \ \text{Tr}(\mathbf{A}^i) = 0$$

Finalemment, on obtient le corollaire suivant :

**Corollaire 5.1** *Soit  $D = (V, A)$  un digraphe sur  $n$  sommets et  $P(X) = (-1)^n X^n + \sum_{k=1}^n a_k X^{n-k}$  le polynôme caractéristique de sa matrice d'incidence.*

*Alors  $g(D) = \inf\{k \geq 1, a_k \neq 0\}$*

Pour finir, on veut revenir sur le degré sortant minimum d'un digraphe afin de formuler une conjecture qui implique celle de Caccetta-Häggkvist.

On note  $\rho$  le rayon spectral de la matrice d'incidence  $\mathbf{A}$  d'un digraphe  $D$ . Alors la relation suivante est vérifiée :

$$\min_{x \in V} d_+(x) \leq \rho \leq \max_{x \in V} d_+(x)$$

Ainsi une conjecture plus forte que celle de Caccetta-Häggkvist peut être :

**Conjecture 5.4** *Soit  $\mathbf{A}$  une matrice  $n \times n$  dont les entrées appartiennent à  $\{0, 1\}$ . Soit  $\chi_{\mathbf{A}}(X) = (-1)^n X^n + \sum_{k=1}^n a_k X^k$  son polynôme caractéristique et  $\rho$  son rayon spectral. Alors :*

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0 \implies \rho < \frac{n}{k}.$$

## 5.5 Fonctions de Choix

Soient  $k \leq n$  deux entiers positifs. Une  $(k, n)$ -fonction de choix est une application  $\Phi$  de  $\binom{n}{k}$  (l'ensemble des parties à  $k$  éléments de  $\{1, \dots, n\}$ ) dans  $\{1, \dots, n\}$  telle que  $\Phi(X) \in X$  pour tout  $X \in \binom{n}{k}$ . On peut dans ce contexte proposer la conjecture suivante.

**Conjecture 5.5** *Si  $\Phi$  est une  $(k, n)$ -fonction de choix, il existe  $i$  tel que  $|\bigcup \Phi^{-1}(i)| > (k-1)n/k$*

### Preuve de l'équivalence des Conjectures 5.1 et 5.5

Commençons par montrer que si  $D$  est un contre-exemple à la Conjecture de Caccetta-Häggkvist, alors c'est un contre-exemple à la Conjecture 5.5. Supposons que  $D$  soit un digraphe de maille supérieure à  $k$  et de degré sortant minimum plus grand que  $n/k$ . On peut alors définir une  $(k, n)$ -fonction de choix sur les sommets de  $D$ . En effet, tout sous graphe induit sur  $k$  éléments étant acyclique, il possède au moins un sommet de degré sortant 0, et cela permet de définir une fonction de choix. Comme par construction pour tout sommet  $i$ ,  $\bigcup \Phi^{-1}(i)$  est disjoint du voisinage sortant de  $i$ , il est clair que cela fournit un contre-exemple à la conjecture 5.5.

Réciproquement, on considère un contre-exemple à la Conjecture 5.5 minimal pour  $n$  et  $k$ . On construit un digraphe  $D$  sur  $\{1, \dots, n\}$  en mettant un arc  $ij$  si  $j \notin \bigcup \Phi^{-1}(i)$ . Par hypothèse  $|\bigcup \Phi^{-1}(i)| \leq (k-1)n/k$  pour tout  $i$ , donc  $D$  a un degré sortant minimum au moins  $n/k$ .

Montrons que  $D$  a une maille strictement supérieure à  $k$ . Par définition du digraphe, pour toute partie de taille  $k$ , le sommet choisi par la fonction de choix doit avoir un degré sortant nul dans la partie. Ainsi  $D$  ne contient pas de circuit de longueur  $k$ . Si  $D$  contient un circuit de taille  $l < k$ , on considère la section initiale de  $D$  engendrée par  $C$  (i.e. l'ensemble des sommets  $x$  pour lesquels il existe un chemin orienté de  $x$  vers un sommet de  $C$ ). Remarquons que  $C \subseteq S$ . Donc  $l := |S| \geq k$ , alors on a une contradiction puisque  $S$  contient un digraphe fonctionnel  $F$  de taille  $k$  (un digraphe fonctionnel est un digraphe dans lequel tout sommet a degré sortant égal à 1), et donc  $\Phi(F)$  ne peut être défini. On est ramené à étudier deux cas :

- $|V(D) \setminus S| \geq k$ .

Par définition de  $S$ , tout sommet  $i \notin S$  est tel que  $\bigcup \Phi^{-1}(i)$  contient  $S$ . Désignons par  $\Phi'$  la restriction de  $\Phi$  à  $V(D) \setminus S$ . Par la minimalité du contre-exemple, il existe  $i \notin S$  tel que  $|\bigcup \Phi'^{-1}(i)| > (k-1)(n-l)/k$ ,

et donc  $|\bigcup \Phi^{-1}(i)| > (k-1)(n-l)/k + l \geq (k-1)n/k$ , et on aboutit à une contradiction

- $|V(D) \setminus S| < k$ .

Dans ce cas, on a  $n \geq k > n/2$ . Si  $k = n$ , le problème est trivial, on peut donc supposer  $k < n$ . Comme  $\Phi$  est un contre-exemple, pour tout sommet  $i$ ,  $|\bigcup \Phi^{-1}(i)| < (k-1)n/k \leq n-1$ , et donc le degré sortant minimum dans  $D$  est au moins 2. On considère alors les composantes fortement connexes terminales  $T_1, T_2, \dots, T_p$  de  $D$ . Le degré sortant des sommets dans chaque  $T_i$  est donc au moins 2. Maintenant on utilise le fait que la Conjecture de Caccetta-Häggkvist est vraie pour degré sortant supérieur à 2, c'est à dire qu'il existe dans  $T_i$  un circuit de taille au plus  $T_i/2$ . Cela signifie qu'il existe un sous graphe fonctionnel couvrant de  $D$ , dont l'ensemble des circuits est précisément  $C_1, \dots, C_p$ . En particulier, il existe des sous graphes fonctionnels de  $D$  pour toute taille comprise entre  $(|T_1| + \dots + |T_p|)/2$  et  $n$ . Donc il existe un sous graphe de taille  $k$ , ce qui constitue à nouveau une contradiction. ■

## 5.6 Structures Homogènes

Un *âge de graphes*  $\mathcal{A}$  est un ensemble de graphes finis ayant les propriétés suivantes :

- si  $G \in \mathcal{A}$  et  $H$  est un sous graphe induit de  $G$ , alors  $H \in \mathcal{A}$ .
- Si  $G, G' \in \mathcal{A}$ , il existe  $H \in \mathcal{A}$  tel que  $G$  et  $G'$  soient des sous graphes induits de  $H$ .

On peut démontrer que tout âge de graphes est en fait l'ensemble des sous graphes induits d'un certain graphe dénombrable. On parle donc de l'âge d'un graphe.

On dit qu'un âge  $\mathcal{A}$  a la propriété d'*amalgamation* si étant donnés  $G, H_1, H_2 \in \mathcal{A}$  et  $f_1 : G \rightarrow H_1, f_2 : G \rightarrow H_2$ , il existe  $A \in \mathcal{A}$  et  $g_1 : H_1 \rightarrow A, g_2 : H_2 \rightarrow A$  pour lesquels  $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$ .

Autrement dit,  $\mathcal{A}$  a la propriété d'amalgamation si pour toute paire  $H_1, H_2$ , et pour tout graphe  $G$  qui est à la fois un sous graphe induit de  $H_1$  et  $H_2$ , il est possible d'amalgamer  $H_1$  et  $H_2$  sur  $G$  (attention au fait que  $H_1 \cap H_2$  contient  $G$ , mais n'est pas nécessairement égal à  $G$ ). Le théorème qui suit donne une caractérisation de la propriété d'amalgamation. Il faut avant de l'énoncer définir la notion suivante : on dit qu'un graphe  $G$  est *homogène* si

tout isomorphisme entre deux sous graphes induits finis de  $G$  s'étend en un automorphisme de  $G$  tout entier.

**Théorème 5.1** *Fraïssé Un âge  $\mathcal{A}$  a la propriété d'amalgamation si et seulement si il existe un graphe dénombrable homogène  $G$  d'âge  $\mathcal{A}$ .*

Les graphes homogènes dénombrables ont été caractérisés par Lachlan et Woodrow [36] et les digraphes homogènes dénombrables par Cherlin [24]. Il est à noter que l'âge  $\mathcal{D}_3$  des digraphes finis de maille au moins 4 a la propriété d'amalgamation : pour amalgamer  $H_1, H_2$  sur  $G$ , il suffit de poser  $H_1 \cap H_2 = G$ , et de n'ajouter aucun autre arc.

Soit  $\mathcal{D}$  la classe des digraphes finis  $D$  pour lesquels tout sous graphe induit  $S$  de  $D$  sur  $s$  sommets contient un sommet de degré sortant inférieur à  $s/3$ . Par définition,  $\mathcal{D}$  est stable par sous-graphes induits et pour tous  $D, D' \in \mathcal{D}$ , l'union disjointe de  $D \cup D'$  est aussi dans  $\mathcal{D}$ . Ainsi  $\mathcal{D}$  est un âge. De plus, pour  $s = 2$  ou  $s = 3$ , la propriété implique clairement qu'un digraphe de  $\mathcal{D}$  ne peut contenir de circuit de longueur inférieure ou égale à 3. Ainsi  $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_3$ .

L'espoir pourrait être que  $\mathcal{D}$  ait la propriété d'amalgamation et qu'on puisse utiliser la caractérisation des digraphes homogènes dénombrables.

**Conjecture 5.6** *La classe  $\mathcal{D}$  a la propriété d'amalgamation.*

En fait, il se trouve que cette question est équivalente à la conjecture de Caccetta-Häggkvist.

### Preuve de l'équivalence des Conjectures 5.6 et 5.1

La première remarque à que l'on fait est que la conjecture de Caccetta-Häggkvist est équivalente à  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_3$  et implique donc la conjecture 5.6 puisque l'on a vu que  $\mathcal{D}_3$  a la propriété d'amalgamation.

Réciproquement, supposons que  $\mathcal{D}$  ait la propriété d'amalgamation, on va montrer que  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_3$  par récurrence sur le nombre  $n$  de sommets des éléments de  $\mathcal{D}$ . Supposons que tout graphe  $D$  de  $\mathcal{D}_3$  avec moins de  $n$  sommet appartienne à  $\mathcal{D}$ . Maintenant considérons  $D \in \mathcal{D}_3$  à  $n$  sommets. Si  $D$  est un tournoi, alors c'est nécessairement le tournoi transitif et donc il appartient à  $\mathcal{D}$ . Sinon, il existe  $x, y \in V(D)$  qui forment un stable. On peut de plus supposer que  $x$  et  $y$  n'ont pas les mêmes voisinages entrants et sortants, car sinon,  $D$  serait juste un tournoi transitif, avec des sommets remplacés par



des stables. Par hypothèse de récurrence,  $D \setminus x$  et  $D \setminus y$  sont dans  $\mathcal{D}$ . Grâce à la propriété d'amalgamation de  $\mathcal{D}$ , on peut amalgamer  $D \setminus x$  et  $D \setminus y$  sur  $D \setminus \{x, y\}$  pour obtenir un graphe  $D' \in \mathcal{D}$ . Si  $D'$  a  $n$  sommets, c'est soit  $D$  soit  $D$  plus un arc reliant  $x$  et  $y$ . Dans les deux cas,  $D'$  appartient à  $\mathcal{D}$  (car  $\mathcal{D}$  est aussi stable par sous-graphes induits). Le dernier cas à regarder est celui où  $D'$  a  $n - 1$  sommets, mais cela n'est pas possible puisque  $x$  et  $y$  ont des voisinages différents. ■

## 5.7 Programmation linéaire et Pondérations

L'objet de cette section est de montrer des énoncés équivalents de la conjecture du second voisinage de Seymour 5.2. On veut reformuler ces énoncés la conjecture en termes de pondérations positives des sommets, c'est à dire des fonctions  $\omega : V(D) \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

**Conjecture 5.7** *Soit  $D = (V, A)$  un digraphes sur  $n$  sommets. Alors :*  
 $\forall \omega \in V^{\mathbb{R}_+} \exists x \in V \omega(x^{++}) \geq \omega(x^+)$ .

Pour montrer que cette conjecture est équivalente à 5.2, on peut commencer par remarquer que cela est vrai pour des pondérations entières. Il suffit de remplacer chaque sommet par un stable de taille égale à son poids constitué de copies du sommet. Puis si c'est vrai pour des valuations entières, c'est clairement vrai pour des pondérations rationnelles par linéarité et par densité on obtient le résultat pour des pondérations réelles.

En revanche, il est plus surprenant de constater que cet énoncé est équivalent au suivant qui résulte simplement d'une inversion de quantificateurs.

**Conjecture 5.8** *Soit  $D = (V, A)$  un digraphe sur  $n$  sommets. Alors :*  
 $\exists \omega \in V^{\mathbb{R}_+}, \omega \neq 0, \forall x \in V \omega(x^{++}) \geq \omega(x^+)$ .

### Preuve de l'équivalence de 5.7 et 5.8

On note  $\{v_1, \dots, v_n\}$  les sommets de  $D$ . Soit la matrice  $\mathbf{A}$   $n \times n$  définie par :

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_j \in v_i^{++} \\ -1 & \text{si } v_j \in v_i^+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit  $\mathbf{1}$  le vecteur colonne dont toutes les entrées sont des 1 et  $(P)$  le problème linéaire suivant :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } \mathbf{x} \\ & \text{satisfaisant les contraintes } \mathbf{Ax} \leq -\mathbf{1} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ainsi, la Conjecture 5.7 est équivalente à la non-faisabilité de  $(P)$  pour tous les digraphes.

Le problème dual  $(P^*)$  de  $(P)$  est simplement :

$$\begin{aligned} & \text{maximiser } \mathbf{y} \cdot \mathbf{1} \\ & \text{sous les contraintes } \mathbf{yA} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ce problème est faisable, il suffit de prendre  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ . Donc la Conjecture 5.7 est équivalente au fait que  $(P^*)$  soit non-borné pour tous les digraphes, ce qui s'écrit :

$$\forall D \exists \omega \in V(D)^{\mathbb{R}_+}, \omega \neq 0 \forall x \in V \omega(x^{--}) \geq \omega(x^-),$$

ce qui est exactement la Conjecture 5.8. ■

## 5.8 Dénombrement de Sous-Graphes

On veut ici évoquer une méthode très intéressante d'exploration de cette conjecture qui a été principalement développée par J.A. Bondy dans [13]. L'idée est d'obtenir des relations linéaires entre le nombre de sous graphes induits de chaque type d'isomorphie d'une taille donnée. Par exemple, si on étudie les sous-graphes non-isomorphes de taille 3 et qu'on interdit les circuit de taille 3, il y a 6 possibilités différentes. Le nombre de sous-graphes (non nécessairement induits) d'un type donné est alors une combinaison linéaire des nombres de sous graphes induits des différents types. De plus il est possible de calculer ou de borner ces nombres en fonction des degrés. On obtient ainsi un système d'inégalités dont les variables sont le nombre de sous graphes induits d'une taille donnée. Cette étude permet d'obtenir des bornes sur le degré sortant minimum d'un digraphe de maille supérieur ou égale à 4. Avec ces méthodes pour les sous graphes induits de taille 4, J.A. Bondy a montré qu'un digraphe eulérien régulier de degré  $cn$  où  $c \geq (2\sqrt{6} - 3)/5 \approx 0,38$  contient un triangle orienté.

# Chapitre 6

## Plongements de graphes non-orientés

### 6.1 Introduction

Dans les parties précédentes, on a étudié différents plongements d'un graphe en voyant comment on pouvait lier des propriétés géométriques de ces plongements avec des propriétés combinatoires des graphes. Dans cette partie, on va s'intéresser à un problème de graphes non-orientés. L'idée est la suivante : on veut plonger des graphes dans une sphère de  $\mathbb{R}^d$  (pas de contraintes sur  $d$ ) de façon à ce que deux sommets adjacents dans le graphe soient "loin" sur la sphère, c'est à dire que l'angle au centre formé par les deux points soit supérieur à un angle  $\theta$  fixé (on dira que la longueur sphérique de l'arc est au moins  $\theta$ ) . Par exemple on peut réaliser le graphe complet à  $n$  éléments (donc n'importe quel graphe) dans  $S^{n-1}$  avec des vecteurs deux à deux orthogonaux, il suffit de prendre une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  comme représentants des sommets. Si on fixe  $\theta = 2\pi/3$ , on remarque qu'un graphe  $G$  plongeable est nécessairement sans triangles. En effet si  $xyz$  est un triangle de  $G$  et si  $U_x, U_y, U_z$  en sont les images, on a :

$$0 \leq \|U_x + U_y + U_z\|^2 = 3 + 2(\langle U_x, U_y \rangle + \langle U_x, U_z \rangle + \langle U_y, U_z \rangle)$$

Donc l'un des doubles produits doit être au moins égal à  $-1/2$ , et par conséquent deux des vecteurs  $U_x, U_y, U_z$  forment un angle inférieur ou égal à  $2\pi/3$ .

En 1972, M. Rosenfeld a donc posé la question suivante : est-ce que tout graphe sans triangles est plongeable dans une sphère de telle façon que deux sommets adjacents forment un angle supérieur strictement à  $2\pi/3$  ?

D. Larman ([37]) a infirmé cette conjecture en 1978 en construisant un contre-exemple et a conjecturé qu'on ne pouvait faire mieux pour la classe des graphes sans triangles que pour la classe de tous les graphes, dans le sens que pour tout  $\theta > \pi/2$ , il existe un graphe sans triangle qui n'est pas plongeable avec des arêtes de longueur supérieure à  $\theta$ . Ce résultat a été popularisé par P. Erdős (voir [40] pour un survey), et a été prouvé indépendamment par M. Rosenfeld ([42]) et V. Rödl ([41]). Dans [41] Rödl a même prouvé que cela est vrai pour des graphes de maille impaire aussi grande que l'on veut. Dans la section suivante, on va généraliser ce résultat aux graphes de maille quelconque et expliquer comment ce problème peut être vu comme un problème de programmation semi-définie.

## 6.2 Définitions et Théorème

Soit  $\alpha > 0$  fixé. Le graphe de Borsuk  $Bor(d, (1 + \alpha)\pi/2)$  est le graphe infini défini sur la sphère euclidienne de dimension  $d$  où deux points sont reliés par une arête si et seulement si leur distance sur la sphère est supérieure à  $(1 + \alpha)\pi/2$ . Un graphe est  $\alpha$  sphérique si c'est un sous graphe de  $Bor(d, (1 + \alpha)\pi/2)$  pour un certain  $d$ . Le fait central est le suivant.

**Lemme 6.1** *Si  $G$  est  $\alpha$ -sphérique, alors il existe dans  $G$  une coupe avec au moins  $(1 + \alpha)m/2$  arêtes, où  $m$  est le nombre total d'arêtes.*

**Preuve :**

Plongeons  $G$  dans une sphère  $S^d$  de façon à ce que chaque arête ait une longueur sphérique supérieure à  $(1 + \alpha)\pi/2$ . Si on coupe la sphère par un hyperplan aléatoire, la probabilité pour une arête d'être coupée par l'hyperplan est égale à sa longueur sphérique divisée par  $\pi$ , et est donc supérieure à  $(1 + \alpha)/2$ . Par double comptage, il existe donc un hyperplan qui coupe au moins  $(1 + \alpha)m/2$  arêtes. ■

Maintenant on va montrer qu'un tel graphe ne peut pas être un graphe aléatoire, en utilisant la célèbre construction des graphes d'Erdős de maille et nombre chromatique arbitrairement grands, en montrant qu'ils ne sont pas  $\alpha$ -sphérique.

**Lemme 6.2** *Pour tout  $\alpha > 0$  et tout entier  $k$ , il existe un graphe  $G$ , de maille au moins  $k$ , dans lequel toute coupe contient moins de  $(1 + \alpha)m/2$  arêtes, où  $m$  est le nombre total d'arêtes.*

**Preuve :**

On considère pour cela des graphes aléatoires sur  $n$  sommets avec des arêtes choisies de façon indépendante avec probabilité  $p$ . On veut borner la taille d'une coupe maximum.

Soit  $A$  un sous-ensemble de sommets. On note par  $X$  le nombre d'arêtes entre  $A$  et son complémentaire. Le pire cas étant lorsque  $|A| = n/2$ ,  $X$  est au plus une loi binomiale  $Bin(n^2/4, p)$ . Son espérance vaut donc au plus  $\frac{pn^2}{4}$ . Ainsi :

$$\Pr\left(X \geq (1 + \alpha)\frac{pn^2}{4}\right) \leq \Pr\left(Bin(n^2/4, p) - \frac{pn^2}{4} \geq \alpha\frac{pn^2}{4}\right)$$

On utilise la forme suivante de la borne de Chernoff, pour tout  $0 \leq t \leq Np$  :

$$\Pr(|Bin(N, p) - Np| > t) < 2e^{-t^2/3Np}$$

Ainsi, pour  $t = \alpha\frac{pn^2}{4}$ , on obtient

$$\Pr\left(X \geq (1 + \alpha)\frac{pn^2}{4}\right) < 2e^{-4\alpha^2 p^2 n^4 / 48pn^2} = 2e^{-\alpha^2 n^2 p / 12}$$

Donc la probabilité qu'il existe une coupe de taille supérieure à  $(1 + \alpha)\frac{pn^2}{4}$  est inférieure à  $2^n 2e^{-\alpha^2 n^2 p / 12}$ , le terme  $2^n$  étant un majorant du nombre de coupes.

En choisissant  $p = n^{-k/k+1}$ , la probabilité tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

Soit  $k$  un entier fixé et  $Y$  le nombre de cycles de longueur au plus  $k$ .

$$E(Y) = \sum_{i=3}^k \binom{n}{i} \frac{(i-1)}{2} p^i \leq \frac{1}{2} \sum_{i=3}^k n^i p^i \leq \frac{1}{2} (k-2) n^k p^k.$$

où la dernière inégalité vient du fait que  $np = n^{\frac{1}{k+1}} \geq 1$ .

En appliquant l'inégalité de Markov,

$$\Pr(Y \geq \frac{n}{2}) \leq \frac{E(Y)}{n/2} \leq (k-2)n^{-\frac{1}{k+1}}.$$

Ainsi, pour  $n$  suffisamment grand, on peut trouver un graphe sur  $n$  sommets avec  $m = n^{\frac{k+2}{k+1}}$  arêtes tel que le nombre de circuits de longueur au plus  $k$  soit inférieur à  $n/2$  et que la taille d'une coupe maximale soit inférieure à  $(1 + \alpha)m/2$ .

On peut alors enlever moins de  $n/2$  arêtes pour obtenir un graphe de maille  $\gamma > k$  et puisque  $n/2$  est négligeable devant  $m$ , on a toujours la majoration de la taille d'une coupe par  $(1 + \alpha)m/2$ . ■

Ainsi en combinant ces deux lemmes, on a montré le résultat suivant :

**Théorème 6.1** *Pour tout  $\alpha > 0$  et tout entier  $k$ , il existe un graphe  $G$  de maille au moins  $k$  qui n'est pas  $\alpha$ -sphérique.*

Observons que ce résultat suffit à garantir l'existence de graphe de maille et de nombre chromatique arbitrairement grands puisque tout graphe  $k$ -chromatique s'envoie dans  $K_k$  qui est  $\alpha_k$  sphérique pour  $\alpha_k = \arccos(\frac{-1}{k-1})$ .

Un cas intéressant est celui des graphes sans triangles de degré minimum  $\delta$  avec  $\delta \geq c.n$  pour une constante  $c$ . Il existe ici une constante  $\alpha_c$ , qui dépend de  $c$ , telle que tout graphe sans triangle de degré minimum supérieur à  $c.n$  soit  $\alpha$ -sphérique. Pour prouver ceci, on se donne une énumération  $v_1, \dots, v_n$  des sommets de  $G$  et on fixe  $c = \delta/n$ . Pour tout  $v_i$ , on fixe un ensemble  $N_i$  de voisins de  $v_i$  de taille exactement  $\delta$ . Le vecteur unitaire associé est alors  $V_i = \frac{1}{\sqrt{c(1-c)n}}(x_1^i, \dots, x_n^i)$  où  $x_j^i = -c$  si  $j \notin N_i$  et  $x_j^i = 1 - c$  si  $j \in N_i$ .

Comme  $N_i \cap N_j$  est non vide si  $v_i$  et  $v_j$  sont adjacents, on a  $\langle V_i, V_j \rangle = \frac{-c}{1-c}$ . Et donc la longueur sphérique d'une arête est exactement  $\arccos(\frac{-c}{1-c})$ .

On peut alors poser la question suivante :

**Problème 6.1** *Pour tout  $c \in ]0, 1/2]$ , quel est la plus grande constante  $\alpha_c$  tel que tout graphe sans triangles de degré minimum  $c.n$  soit  $\alpha_c$ -sphérique.*

Un cas particulier de la construction précédente est la cas  $c = 1/3$ , pour lequel on obtient  $\langle V_i, V_j \rangle = -1/2$ . Cela signifie que si un graphe sans triangle a degré minimum  $\geq n/3$ , ses sommets peuvent être plongés dans une sphère unité de telle façon que les arêtes aient longueur sphérique au moins  $2\pi/3$ . Or, la classe des graphes sans triangles de degré minimum  $> n/3$

a été récemment entièrement caractérisée ([16]), ce sont ceux de nombre chromatique au plus 4. Il pourrait être intéressant de voir si on peut obtenir ce résultat par des considérations géométriques.

### 6.3 Programmation semi définie

Ici, on va s'intéresser à la forme du problème soulevé, à savoir : Associer aux sommets d'un graphe des vecteurs de  $\mathbb{R}^d$  en imposant certaines contraintes linéaires sur les produits scalaires de ces vecteurs. Il n'y aura pas dans cette section de résultats nouveaux mais il est intéressant de montrer que ce problème est un problème d'optimisation semi définie afin d'en exprimer le dual.

A ce stade de la discussion, une précision importante doit être apportée : La dimension  $d$  est laissée totalement libre. De fait, imposer des contraintes sur  $d$  rendrait les problèmes NP-difficiles, ainsi que l'on peut s'en convaincre sur la généralisation suivante du problème de Rosenfeld, introduite par Karger, Motwani et Sudan [34] :

Problème de *coloration vectorielle* : Étant donné un graphe  $G$  trouver une application  $\phi$  de  $V$  dans  $S^d$  qui minimise le plus grand produit scalaire  $\langle \phi(x), \phi(y) \rangle$  parmi les arêtes  $xy$  de  $G$ .

Intuitivement, on cherche à placer les sommets de  $G$  sur une sphère et ce en essayant de rendre toutes les arêtes plus longues qu'une certaine distance. Si l'on impose ici  $d = 1$ , le problème est équivalent à minimiser  $p > 0$  tel que l'on puisse placer les points de  $G$  sur un cercle de périmètre  $p$  en imposant que chaque arête de  $G$  décrive un arc de cercle de longueur au moins 1. On retrouve la notion de *nombre chromatique circulaire* de  $G$ , noté  $\chi_{circ}(G)$ , que l'on avait déjà évoquée dans la section 4.3, et il est facile de vérifier que pour tout graphe :

$$\chi_c(G) \leq \chi(G) \leq \lceil \chi_c(G) \rceil$$

Ainsi le calcul du nombre chromatique circulaire est au moins aussi difficile que celui du nombre chromatique usuel. Ce qui place le problème, lorsque  $d = 1$  dans la classe des problèmes NP-difficiles.

Dans le cas  $d = 2$ , ajoutons que même des instances simples du problèmes sont très célèbres : par exemple, le très classique problème des 13 sphères, demandant s'il est possible de placer 13 sphères unités disjointes tangentes à la sphère unité peut se formaliser ainsi. Peut-on associer à chaque sommet de

$K_{13}$  un vecteur de  $S^2$  de telle sorte que le produit scalaire de deux quelconques de ces vecteurs est au plus  $1/2$ .

La réponse surprenante apportée par la programmation semi-définie est que les problèmes sont algorithmiquement faciles, ou du moins approximables polynomialement à tout degré de précision fixé à l'avance (voir [27] pour un survey sur ces notions).

On veut faire ici quelques rappels sur les notions de programmation semi-définie pour pouvoir exprimer le dual de notre problème.

Rappelons qu'une matrice symétrique  $M$  est *semi-définie positive* (sdp) si pour tout vecteur  $x$  on a  ${}^t x A x \geq 0$ .

De façon équivalente,  $A$  sdp si et seulement si il existe une matrice  $A$  telle que  $M = {}^t A A$ . Plus simplement  $M = (m_{ij})$  est sdp s'il existe une famille de  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^d$  telle que  $m_{ij} = U_i \cdot U_j$ . Une autre caractérisation des matrices sdp est la suivante : une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles. On notera  $A \succeq 0$  (resp.  $A \succeq B$ ) si  $A$  sdp (resp.  $(A - B)$  sdp).

Nous allons à présent donner un équivalent du problème de coloration vectorielle. Soit  $G$  un graphe sur les sommets  $\{1, \dots, n\}$ . On veut :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser } u \in \mathbb{R} & \\ \text{sous les contraintes} & a_{ii} = 1 \quad \text{pour tout } i = 1 \dots n \\ & a_{ij} \leq u \quad \text{pour } ij \text{ arête de } G \\ & (a_{ij}) \quad \text{semi-définie positive.} \end{array}$$

Plus généralement un *programme sdp* est un problème d'optimisation où l'on cherche à maximiser une fonction linéaire des variables  $a_{ij}$ , sous des contraintes linéaires en les  $a_{ij}$  et la contrainte  $(a_{ij})$  sdp.

Pour une notation plus compacte, rappelons que le *produit de Frobenius* (ou produit naïf) de deux matrices  $n \times m$   $A$  et  $B$  est égal à  $A \bullet B := \sum a_{ij} b_{ij}$ . Notons que  $A \bullet B = \text{Tr}({}^t A B) = \text{Tr}(A B)$ . Un *programme sdp* est donc de la forme :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser } C \bullet A & (6.1) \\ \text{sous les contraintes} & B_i \bullet A \leq b_i \text{ pour tout } i = 1 \dots k \\ & A \succeq 0 \end{array}$$

Afin de montrer le parallèle avec la programmation linéaire, rappelons qu'un programme linéaire standard est de la forme :



$$\max\{c.x : M.x \leq b \text{ et } u \text{ positif}\}$$

et son dual s'écrit

$$\min\{y.b : y.M \geq c \text{ et } y \text{ positif}\}.$$

Ainsi, si on considère les matrices comme des vecteurs de taille  $n^2$ , un programme sdp est un programme linéaire habituel à ceci près que la contrainte de positivité des entrées est remplacée par la condition sdp.

En regardant de plus près, les conditions  $u$  positif et  $A$  sdp sont deux cas particuliers de cônes convexes. Et, de façon générale, si  $K_1$  et  $K_2$  sont deux cônes convexes fermés, on peut étudier des problèmes de la forme

$$\max\{c.x : b - M.x \in K_2 \text{ et } x \in K_1\}.$$

Le dual d'un tel programme est :

$$\min\{y.b : y.M - c \in K_1^* \text{ et } y \in K_2^*\}.$$

où  $K_i^*$  désigne le cône polaire de  $K_i$  c'est à dire  $\{s : s.x \geq 0 \text{ pour tout } x \in K_i\}$

Remarquons que le cas particulier de la programmation linéaire correspond au cas où  $K_1$  et  $K_2$  désignent l'ensemble des vecteurs à coordonnées positives puisque dans ce cas on a  $K_i^* = K_i$ .

De plus, cette formulation implique directement le théorème de dualité faible qui dit que le max est inférieur ou égal au min. En effet, si  $x$  et  $y$  sont des solutions des contraintes respectivement primales et duales, alors :

$$yb \geq yMx + ys_1 = cx + s_2x + ys_1 \geq c.x$$

puisque  $s_i \in K_i^*$ .

Dans le cas de la programmation SDP, c'est à dire quand  $K$  désigne le cône convexe des matrices SDP, que peut-on dire de  $K^*$  ? En fait, de même que pour le cas du cône positif pour la programmation linéaire, si on se place dans l'espace des matrices symétriques,  $K^* = K$ . Quand cette condition est réalisée, le cône convexe est dit *auto-polaire*. Démontrons ce fait :

**Lemme 6.3** Une matrice symétrique  $A$  est sdp si et seulement si pour toute matrice sdp  $B$ , on a  $A \bullet B \geq 0$ .

**Preuve :**

Tout d'abord, si  $A$  et  $B$  sont sdp, on a  $A = {}^t MM$ ,  $B = {}^t NN$ , et ainsi

$$A \bullet B = \text{Tr}({}^t({}^t MM){}^t NN) = \text{Tr}({}^t MM {}^t NN) = \text{Tr}({}^t N {}^t M M N) \geq 0$$

La réciproque est un théorème de Fejer, que l'on peut prouver ainsi : si pour toute matrice sdp  $B$ , on a  $A \bullet B \geq 0$ , en particulier pour tout vecteur  $x$ , on a

$$0 \leq A \bullet (x {}^t x) = \text{tr}(A x {}^t x) = \text{Tr}({}^t x A x) = {}^t x A x$$

ce qui conclut la preuve du lemme. ■

Le point crucial est que si une matrice  $M$  n'est pas sdp, on peut trouver une matrice sdp  $A$  telle que  $A \bullet M < 0$ . Cette propriété permet d'obtenir un théorème de dualité pour la programmation sdp.

Le dual du programme SDP (6.1) s'écrit finalement :

$$\text{Minimiser } \sum_{i=1}^n y_i b_i \text{ sous les contraintes } \sum_{i=1}^n y_i A_i \succeq C, \quad y \text{ positif} \quad (6.2)$$

On a égalité entre ce min et le max du problème primal (dualité forte) si ces contraintes sont strictement réalisables c'est à dire si il existe une matrice définie positive réalisant les contraintes (conditions de Slater). On ne veut pas ici s'étendre sur ces conditions, on pourra se référer à [48] pour plus de précisions.

Revenons à l'exemple initial. Le problème était, étant donné un graphe  $G = (V, E)$ , de trouver des vecteurs unitaires  $v_i \in \mathbb{R}^d$ ,  $i \in V$ , tels que  $\langle v_i, v_j \rangle \leq -c$  si  $(i, j) \in E$ . En terme de programmation semi-définie, cela s'écrit

$$\begin{aligned} \text{Trouver } A \succeq 0 \text{ telle que} & \quad A \bullet E_{ii} = 1 \text{ pour } i = 1 \dots n \\ \text{et} & \quad A \bullet E_{ij} < -1 \text{ pour tous } (i, j) \in E. \end{aligned}$$

où les matrices  $E_{ij}$  sont les matrices ayant pour seule entrée non nulle l'entrée en position  $ij$  égale à 1.

En vertu des considérations de la section précédente, ceci est réalisable si et seulement si :

$$\text{pour toute matrice SDP } A \text{ telle que} \quad A_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j)$$

$$A_{ij} = 0 \text{ pour tout } (i, j) \notin E$$

$$\text{on a } \sum_{i=1}^n A_{ii} - c \sum_{i \neq j} A_{ij} \geq 0.$$

Ainsi on peut énoncer le résultat suivant

**Proposition 6.1** *Un graphe  $G = (V, E)$  est 1/3-sphérique sauf si :*

$$\begin{aligned} \text{il existe des vecteurs } x_i \text{ } i \in V, \text{ tels que } & x_i \cdot x_j \geq 0 \quad \forall (i, j) \\ & x_i \cdot x_j = 0 \text{ pour } (i, j) \notin E \\ & \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 < \sum_{ij \in E} x_i \cdot x_j \end{aligned}$$



# Chapitre 7

## Matrices de parité et Feedback Arc set

### 7.1 Un problème de Dimitri Grigoriev

Le problème que l'on va étudier dans cette section provient d'une question initialement étudiée par Dimitri Grigoriev comme un lemme dans l'article [30]. Il considère une famille de  $N$  vecteurs dans l'espace vectoriel  $E = (\mathbf{F}_2)^d$  et cherche un vecteur de  $E$  qui soit orthogonal à au moins  $N/3$  vecteurs et à au plus  $2N/3$  vecteurs de la famille. On peut alors se poser la question de savoir si on peut trouver un vecteur qui soit orthogonal à un nombre de vecteurs de la famille plus proche de  $N/2$ . On va montrer que cette fourchette  $[N/3, 2N/3]$  peut être remplacée par une bien meilleure de  $[N/2 - \sqrt{N}/2, N/2 + \sqrt{N}/2]$  et on donnera un algorithme parallèle déterministe efficace pour trouver un tel vecteur. On étudiera aussi l'optimalité de cette borne.

Les résultats exposés ici sont le résultat d'un travail effectué en collaboration avec Pascal Koiran, Sylvain Perifel et Stéphane Thomassé ([19]).

On peut reformuler ce problème en termes de théorie des ensembles. Il suffit de voir chaque vecteur comme la fonction caractéristique (puisque les entrées du vecteurs sont 0 ou 1) de la partie d'un ensemble à  $d$  éléments. On a donc une famille  $\mathcal{F}$  de  $N$  sous-ensembles distincts d'un ensemble fini  $X$ . Or, la valeur du produit scalaire dans  $\mathbf{F}_2^d$  de deux vecteurs correspond du point de vue des parties à donner la parité de l'intersection de ces deux parties. Le but est donc de trouver une partie  $F$  de  $X$  tel que le nombre de parties de  $\mathcal{F}$  qui soient d'intersection paire avec  $F$  soit le plus proche possible de  $|\mathcal{F}|/2$ .

On va donner deux preuves différentes de ce même résultat. La première, qui suit l'intuition, procède en considérant une partie aléatoire et en montrant qu'elle satisfait la condition voulue. La seconde décrit la question de façon plus précise et permet d'obtenir un algorithme déterministe très simple pour trouver la partie cherchée.

### 7.1.1 Une preuve probabiliste

Le résultat que l'on va démontrer est le suivant :

**Théorème 7.1** *Soit  $X$  un ensemble fini et  $\mathcal{F}$  un ensemble de  $N$  parties de  $X$ . Il existe une partie  $F \subseteq X$  telle que*

$$-\frac{\sqrt{N}}{2} \leq |\{F_i \in \mathcal{F} \mid |F \cap F_i| \text{ paire}\}| - \frac{N}{2} \leq \frac{\sqrt{N}}{2} \quad (7.1)$$

#### Preuve

Notons  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_N\}$ . On choisit aléatoirement un sous-ensemble  $F$  de  $X$  avec probabilité  $1/2$  sur chaque élément de  $X$ .

Soit  $Y_i$  la variable aléatoire définie par :

$$Y_i = 1 \text{ si } |F \cap F_i| \text{ est pair et } 0 \text{ sinon.}$$

La variable aléatoire qui nous intéresse est donc  $Y = \sum_{i=1}^N Y_i$ .

Tout d'abord, prouvons que  $P(Y_i = 1) = 1/2$ . Cela provient immédiatement du fait que la probabilité que  $F$  soit égal à un sous ensemble donné ne dépende pas de l'ensemble (elle vaut toujours  $1/2^n$ ) et du fait qu'il y a autant de parties paires que de parties impaires dans  $F_i$ . Ainsi par linéarité de l'espérance, on a  $E(Y) = \sum_{i=1}^N E(Y_i) = N/2$ .

Maintenant on va démontrer le fait central : Les événements  $\{Y_i = 1\}$  sont deux à deux indépendants (il est facile de remarquer qu'ils ne le sont pas trois à trois). Pour cela considérons deux éléments  $F_1$  et  $F_2$  de  $\mathcal{F}$ . On doit montrer que

$$P(Y_1 = 1 \cap Y_2 = 1) = P(Y_1 = 1)P(Y_2 = 1) = 1/4 \quad (7.2)$$

Il y a trois cas à considérer :

- $F_1$  et  $F_2$  sont disjointes. Dans ce cas, il est clair que les événements sont indépendants.

- $F_1 \subseteq F_2$ . Ce cas peut se ramener au précédent avec  $F_1$  et  $F_2 \setminus F_1$  et on toujours (7.2).
- Les trois ensembles  $A = F_1 \setminus F_2$ ,  $B = F_1 \cap F_2$  et  $C = F_2 \setminus F_1$  sont non vides. Mais alors  $X_1 = 1$  et  $X_2 = 1$  implique que  $|A \cap F| \equiv |B \cap F| \equiv |C \cap F| \pmod{2}$ . Ces trois ensembles étant disjoints on a une probabilité  $1/8$  d'être dans le cas pair-pair-pair et  $1/8$  d'être dans le cas impair-impair-impair. Finalement on a bien montré (7.2).

Comme les événements sont deux à deux indépendants on a la propriété suivante :

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^N \text{Var}(Y_i) = N/4$$

Pour conclure on utilise la forme suivante de l'inégalité de Tchebycheff.

$$P(|Y - E(Y)| > t) < \frac{\text{Var}(Y)}{t^2} = \frac{N}{4t^2}$$

Pour  $t = \sqrt{N}/2$  on obtient

$$P(|Y - \frac{N}{2}| > \frac{\sqrt{N}}{2}) < 1,$$

ce qui implique l'existence de l'ensemble voulu. ■

### Remarque 7.1

*L'inégalité de Tchebycheff permet aussi de dire que au moins  $3/4$  des sous-ensembles  $F$  sont dans la fourchette  $[N/2 - \sqrt{N}; N/2 + \sqrt{N}]$ , puisque*

$$P(|Y - \frac{N}{2}| > \sqrt{N}) < 1/4.$$

*Cela donne un algorithme probabilisé trivial pour trouver une telle partie. On donnera dans la section 7.1.4 un algorithme déterministe permettant d'obtenir la fourchette  $[N/2 - \sqrt{N}/2, N/2 + \sqrt{N}/2]$  donnée par le Théorème.*

### 7.1.2 Un preuve déterministe

On veut donc trouver une partie  $F$  qui minimise l'écart entre  $|\{i, F \cap F_i \text{ pair}\}|$  et  $|\{i, F \cap F_i \text{ impair}\}|$ . Mais cela signifie exactement trouver  $F$

qui maximise le nombre de paires  $\{F_i, F_j\}$  telles  $|F \cap F_i| \not\equiv |F \cap F_j| \pmod 2$ . En effet, si on définit  $t = |\{i : F \cap F_i \text{ odd}\}| - \frac{k}{2}$ , le nombre de telles paires est exactement  $(k/2 - t)(k/2 + t) = k^2/4 - t^2$ .

Le fait central est que si  $F \subset X$  et  $F_i, F_j$  sont deux éléments de  $\mathcal{F}$  :

$$|F \cap F_i| \not\equiv |F \cap F_j| \pmod 2 \iff |F \cap (F_i \Delta F_j)| \equiv 1 \pmod 2$$

Ainsi, trouver  $F$  qui minimise l'écart entre  $|\{i, F \cap F_i \text{ pair}\}|$  et  $|\{i, F \cap F_i \text{ impair}\}|$ , revient exactement à trouver  $F$  qui maximise  $|\{(i, j) : F \cap (F_i \Delta F_j) \text{ impair}\}|$ .

On considère maintenant le graphe biparti  $(V, E)$  suivant :

- $V = (V_1 \cup V_2)$  où  $V_1 = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq k\}$ , et  $V_2 = \mathcal{P}(X)$
- $(F, (i, j)) \in E$  si et seulement si  $|F \cap (F_i \Delta F_j)|$  impair.

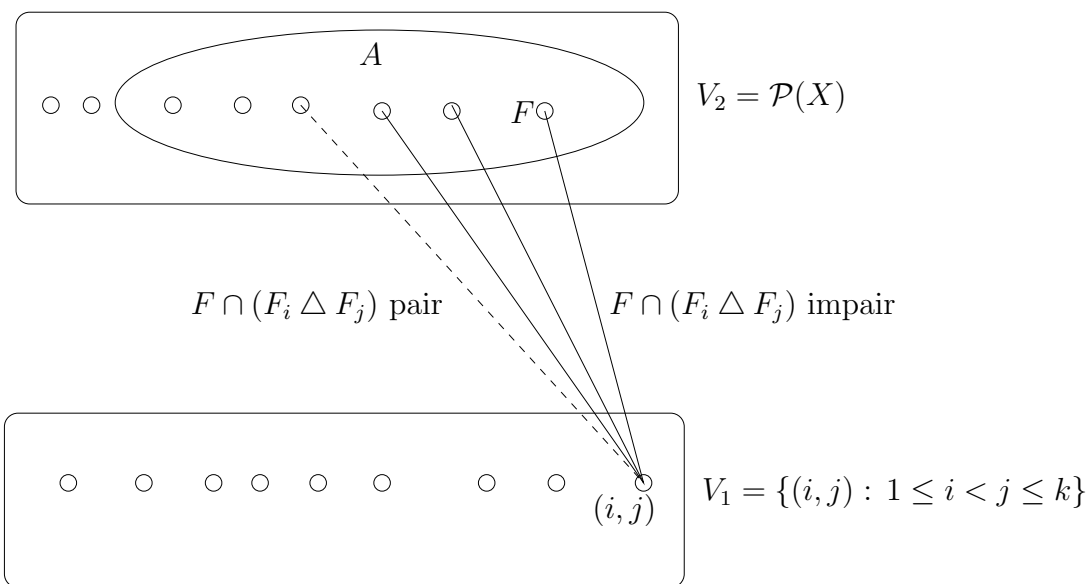


FIG. 7.1 – Une autre façon de voir le problème

Ce que l'on cherche est donc ni plus ni moins qu'un sommet de  $V_2$  de degré maximum. Notons  $N(x)$  l'ensemble des voisins de  $x$ . On va démontrer le lemme suivant, dont on n'aura besoin que dans le cas particulier  $A = V_2$ . Cependant il se trouve que l'on peut caractériser par ce lemme tous les sous-ensembles  $A \subset V_2$  pour lesquels la preuve fonctionne encore.



**Lemme 7.1** Soit  $A \subset V_2$  tel que  $\emptyset \in A$  et  $\forall F, F' \in A, (F \triangle F') \in A$ . Supposons de plus que  $\forall x \in V_1, N(x) \cap A \neq \emptyset$ . Alors

$$\forall x \in V_1, |N(x) \cap A| = \frac{|A|}{2}.$$

**Preuve** Soit  $x \in V_1$ . Par hypothèse, il existe  $F \in A$  tel que  $(x, F)$  est une arête du graphe. Et par l'autre hypothèse on sait que la fonction suivante est bien définie,

$$\begin{aligned} \phi : A &\longrightarrow A \\ F' &\longmapsto (F \triangle F') \end{aligned}$$

et réalise une bijection entre  $N(x) \cap A$  et  $A \setminus N(x)$ , ce qui prouve l'affirmation. ■

**Lemme 7.2** Il existe un sous-ensemble  $A \subset V_2$  satisfaisant les hypothèses du Lemme 7.1.

**Preuve** Il suffit de prendre  $A = V_2$ . ■

**Corollaire 7.1** Il existe  $F \in V_2$  tel que  $|N(F)| \geq \frac{|V_1|}{2}$

**Preuve** Double comptage. ■

**Corollaire 7.2** Il existe  $F \subset X$  tel que  $|\{i, F \cap F_i \text{ pair}\}| - \frac{k}{2} \leq \frac{\sqrt{k}}{2}$

**Preuve** Soit  $F$  donné par le Corollaire 7.1. Définissons  $t = |\{i, F \cap F_i \text{ pair}\}| - \frac{k}{2}$ . Alors  $|N(F)| = (\frac{k}{2} + t)(\frac{k}{2} - t) = \frac{k^2}{4} - t^2$  et par hypothèse sur  $F$  :

$$\frac{k^2}{4} - t^2 \geq \frac{|V_1|}{2} = \frac{k(k-1)}{4} = \frac{k^2 - k}{4}$$

ce qui implique  $|t| \leq \frac{\sqrt{k}}{2}$ . ■

### 7.1.3 Discussion sur les bornes

Grâce au Théorème 7.1, on sait qu'il est possible d'atteindre la valeur espérée (la moitié des parties) avec une erreur de l'ordre de  $\sqrt{N}$ . Une question naturelle est de savoir si on peut assurer une erreur constante. L'exemple suivant prouve que non.

Considérons un ensemble  $X$  à  $n = 4k^2 + 1$  éléments et définissons  $\mathcal{F}$  comme l'ensemble des parties de  $X$  à deux éléments. On dénote par  $N$  la taille de  $\mathcal{F}$ . Dans ce contexte, le problème est de partitionner  $X$  en deux parties et de compter le nombre de paires séparées par cette coupe, qui correspondent aux parties d'intersection impaire. Il s'agit donc d'un problème de coupe maximum dans le graphe complet à  $n$  éléments.

On veut trouver  $0 \leq a \leq n/2$  tel que  $a(n-a)$  est aussi proche que possible de  $N/2 = k^2(4k^2 + 1)$ . Mais :

$$\begin{aligned}(2k^2 - k + 1)(2k^2 + k) &= 4k^4 + k^2 + k \\ (2k^2 - k)(2k^2 + k + 1) &= 4k^4 + k^2 - k\end{aligned}$$

La fonction  $a \mapsto a(n-a)$  étant croissante sur  $[0, n/2]$ , cela prouve que ce sont les deux meilleures valeurs possibles et que l'erreur est donc au moins  $k$ , ce qui est de l'ordre de  $N^{1/4}$ .

### 7.1.4 Un algorithme polynômial déterministe

On présente ici un algorithme polynômial très simple pour trouver un sous-ensemble  $F$  réalisant l'inégalité (7.1) du Théorème 7.1. On travaille avec le point de vue ensembliste décrit dans la section 7.1.2 : Étant données les parties  $F_i$ , on doit trouver un sous-ensemble  $F$  qui est d'intersection impaire avec plus de la moitié des  $F_i \triangle F_j$  (on considère ces ensembles comme un famille, c'est à dire avec des répétitions possibles, car il peut y avoir plusieurs fois la même partie pour des couples  $(i, j)$  différents). Notons que ces différences symétriques sont non vides puisque tous les  $F_i$  sont distincts. L'algorithme fonctionne ainsi :

1. On construit les ensembles  $F_i \triangle F_j$  et on dénote par  $\mathcal{G}$  le multi-ensemble obtenu.
2. Soit  $x \in X$  et  $\mathcal{G}'$  le multi-ensemble obtenu en enlevant de  $\mathcal{G}$  les ensembles contenant  $x$ .

On applique récursivement l'algorithme à  $X \setminus \{x\}$  et  $\mathcal{G}'$ . Ainsi on obtient un sous-ensemble  $F'$  de  $X \setminus \{x\}$  qui est d'intersection impaire avec plus de la moitié des éléments de  $\mathcal{G}'$ . Maintenant il y a deux cas possibles :

- $F'$  a une intersection impaire avec plus de la moitié des éléments de  $\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}'$ . Dans ce cas  $F = F'$  est une solution du problème.
- Sinon, comme  $x$  appartient à tous les éléments de  $\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}'$ ,  $F = F' \cup \{x\}$  est une solution du problème.

## 7.2 Le Problème du Feedback Arc Set Minimum

Dans cette section on va répondre à une question de théorie des graphes donnée par Bang-Jensen et Thomassen ([4]) concernant les feedback arc set.

On rappelle qu'un feedback arc set d'un digraphe  $D = (V, A)$  est un ensemble d'arcs  $F$  tel que  $D - F$  est acyclique. La taille minimum d'un feedback arc set de  $D$  est notée  $mfas(D)$ . Un résultat classique de Karp ([35]) affirme que trouver un feedback arc set minimum dans un digraphe est un problème NP-dur. Bang-Jensen et Thomassen ([4]) ont conjecturé que ceci restait vrai si on se restreint à la classe des tournois. Une réponse proche a été donnée par Ailon, Charikar et Newman dans l'article [1], où ils démontrent que problème est NP-dur modulo des réductions probabilistes. L'approche exposée ici est le résultat d'un travail effectué avec Stéphan Thomassé et Anders Yeo ([22]) et utilise une réduction plus simple non randomisée basée sur les matrices de parité d'intersection (voir Alon et Spencer [3], p255). On va en fait montrer que le problème du feedback arc set min pour les tournois est polynômialement équivalent au même problème dans le cas des digraphes, et est donc NP-dur.

**Remarque 7.2** *Une preuve différente cette conjecture, mais inconnue des auteurs au moment de la démonstration, avait été trouvée par Noga Alon quelques mois auparavant et est disponible en preprint (voir [2]) sur sa page web.*

On va donc revenir aux concepts utilisés dans la section précédente. On considère un ensemble fini  $X$  à  $n$  éléments et la matrice  $\mathbf{A}$  de taille  $2^z \times 2^z$  dont les ligne et les colonnes sont indexées par les sous-ensembles  $F_i$  de  $X$

(dans un ordre quelconque) et dont les entrées sont  $a_{ij} = (-1)^{|(F_i \cap F_j)|}$ . Les résultats de la section 7.1.2 impliquent le lemme suivant :

**Lemme 7.3** *Avec la définition de la matrice  $\mathbf{A}$  précédente, pour tout sous ensemble  $J$  de  $r$  colonnes, on a :*

$$\sum_{i=1}^{2^z} \left| \sum_{j \in J} a_{ij} \right| \leq 2^z \sqrt{r}$$

En effet comme sur chaque ligne on compte 1 pour une intersection paire et  $-1$  pour une intersection impaire, sommer les  $a_{ij}$  sur une ligne et prendre la valeur absolue revient bien à compter l'écart entre le nombre de parties qui intersectent de façon paire ou impaire la partie correspondant à la ligne choisie.

On va raffiner ce résultat.

**Lemme 7.4** *Soit  $z$  un entier naturel divisible par 3. Soit  $k = 2^z$  et  $\mathbf{A}$  la matrice introduite dans le lemme 7.3. Soit  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  une matrice obtenue à partir de  $\mathbf{A}$  par une permutation arbitraire des colonnes. On définit  $q_i$  de la façon suivante.*

$$q_i = \max \left\{ \left| \sum_{j=1}^p b_{ij} \right| : p = 1, 2, \dots, k \right\}$$

Alors  $\sum_{i=1}^k q_i \leq 2k^{5/3}$ .

### Preuve

On définit les entiers  $l = k^{2/3}$  et  $s = k^{1/3}$ . Pour tout  $i = 1, 2, \dots, k$  et  $j = 1, 2, \dots, s$ , on définit  $c_i^j = \left| \sum_{j'=(j-1)l+1}^{jl} b_{ij'} \right|$ . Par le lemme 7.3, on a  $\sum_{i=1}^k c_i^j \leq k\sqrt{l}$  pour tous  $j = 1, 2, \dots, s$ . On en déduit donc que  $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^s c_i^j \leq ks\sqrt{l} = k^{5/3}$ .

On va maintenant évaluer  $q_i$ . Supposons que  $p$  soit défini de telle façon que  $q_i = \left| \sum_{j'=1}^p b_{ij'} \right|$ . Soit alors  $j$  tel que  $(j-1)l \leq p < jl$ . Notons que  $q_i \leq c_i^1 + c_i^2 + \dots + c_i^{j-1} + l$ , le terme  $l$  étant un majorant de  $\left| \sum_{i=(j-1)l+1}^p b_{ij} \right|$ . Ainsi  $\sum_{i=1}^k q_i \leq \left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^s c_i^j \right) + kl \leq 2k^{5/3}$ . ■

**Remarque 7.3**

Avec des arguments probabilistes on peut montrer qu'il existe des matrices  $\mathbf{A}$  réalisant la borne  $\sum_{j=1}^k q_j = O(k^{3/2})$  pour toute permutation des colonnes. Mais on a besoin de réduction déterministes, et la borne  $(2k^{5/3})$  est suffisante dans cet objectif. Une preuve plus précise donnerait une borne en  $(\sqrt{2}k^{5/3})$  pour tout  $z$ , mais de nouveau cela n'est pas nécessaire à nos fins.

**Théorème 7.2** Soit  $z$  un entier naturel quelconque divisible par 3 et soit  $k = 2^z$ . Il existe un tournoi biparti  $G_k$ , où les deux classes ont  $k$  sommets ( $|V(G_k)| = 2k$ ) et  $mfas(G_k) \geq \frac{k^2}{2} - 2k^{5/3}$ . De plus on peut construire  $G_k$  en temps polynômial.

**Preuve**

Soit  $A = (a_{ij})$  la matrice carrée  $k \times k$  donnée par le Lemme 7.4. En dehors de la colonne correspondant à la partie vide dont toutes les entrées valent 1, toutes les colonnes ont exactement  $k/2$  entrées positives. Ainsi  $\mathbf{A}$  a  $k(k+1)/2$  entrées positives. On note  $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$  et  $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$  les deux classes de sommets de  $G_k$  et on ajoute maintenant un arc de  $r_i$  vers  $s_j$  si  $a_{ij} = -1$  dans  $\mathbf{A}$ , et un arc de  $s_j$  vers  $r_i$  si  $a_{ij} = 1$  dans  $\mathbf{A}$ . Cela définit clairement un tournoi biparti que l'on peut construire en temps polynômial.

Soit  $\pi$  une énumération des sommets de  $G_k$  qui réalise un feedback arc set minimum, dans les sens que les arcs retour (ceux pour lesquels la fin de l'arête est située avant son début dans  $\pi$ ) constituent un feedback arc set minimum. Quitte à renommer les sommets, on peut supposer que l'ordre des  $s_j$  dans  $\pi$  est  $s_1, s_2, \dots, s_k$ . Soit  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  quelconque et définissons  $p$  tel que  $s_1, s_2, \dots, s_p$  précèdent  $r_i$  dans  $\pi$  et  $s_{p+1}, s_{p+2}, \dots, s_k$  soit situés après  $r_i$  dans  $\pi$ . Notons  $m_i$  le nombre de "1" dans la  $i$ -ème ligne et remarquons que le nombre d'arcs retour adjacents à  $r_i$  est donné par la quantité suivante

$$\begin{aligned} & |\{a_{ij} : a_{ij} = -1, j \leq p\}| + |\{a_{ij} : a_{ij} = 1, j > p\}| \\ = & |\{a_{ij} : a_{ij} = -1, j \leq p\}| + (m_i - |\{a_{ij} : a_{ij} = 1, j \leq p\}|) \end{aligned}$$

Soit  $q_i = \min\{\sum_{j=1}^p a_{ij} : p = 1, 2, \dots, k\}$ . La taille d'un feedback arc set minimum de  $G_k$  est supérieure à  $\sum_{i=1}^k (m_i + q_i)$ , ce qui implique grâce au Lemme 7.4 que  $mfas(G_k) \geq \frac{k(k+1)}{2} - 2k^{5/3} > \frac{k^2}{2} - 2k^{5/3}$ . ■

**Théorème 7.3** Le problème du feedback arc set pour les tournois est NP-dur.

**Preuve** Ainsi qu'on l'a annoncé en début de section, on va réduire au problème du min feedback arc set dans les digraphes, soit donc  $D$  un digraphe quelconque sur  $n$  sommets. On peut supposer que  $D$  n'a pas de cycles de longueur 2 puisque si on efface un tel circuit on réduit d'exactly 1 la taille d'un feedback arc set minimum. On peut aussi supposer que  $D$  est sans boucles. Soit  $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  et  $k = 2^{\lceil 1 + \log_2(n) \rceil}$ . Remarquons que  $k \in O(n^6)$  et  $k \geq 64n^6$ .

On note  $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$  et  $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$  les deux classes de sommets du tournoi biparti  $G_k$ , défini dans le Théorème 7.2. On construit maintenant le tournoi  $T$  de sommets  $\{w_i^j : i = 1, 2, \dots, n \text{ et } j = 1, 2, \dots, k\}$  dont l'ensemble d'arcs est défini comme suit. Soit  $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$  et  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$  quelconques.  $T$  contient l'arc  $(w_a^i, w_b^j)$  si et seulement si

- (a) :  $a = b$  et  $i < j$ .
- (b) :  $v_a v_b \in A(D)$ .
- (c) :  $v_a$  et  $v_b$  ne sont pas reliés par un arc dans  $D$ ,  $a < b$  et  $r_i s_j \in A(G_k)$
- (d) :  $v_a$  et  $v_b$  ne sont pas reliés par un arc dans  $D$ ,  $a > b$  et  $s_i r_j \in A(G_k)$ .

Pour résumer, on éclate chaque sommet de  $D$  par un tournoi transitif de taille  $k$  et on remplit les trous bipartis résultant des non-arcs de  $D$  par des copies de  $G_k$ .

On va maintenant encadrer  $mfas(T)$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $|\{v_a v_b : v_a v_b \in A(D), a > b\}| = mfas(D)$ . Remarquons que le théorème 7.2 implique que les arcs issus des règles (c) et (d) vont toujours contribuer dans  $mfas(T)$  pour au moins  $\binom{n}{2} - |A(D)| \left(\frac{k^2}{2} - 2k^{5/3}\right)$  et au plus  $\binom{n}{2} - |A(D)| \left(\frac{k^2}{2} + 2k^{5/3}\right)$ . Considérons maintenant l'ordre suivant sur les sommets de  $T$

$$w_1^1, w_1^2, \dots, w_1^k, w_2^1, w_2^2, \dots, w_2^k, w_3^1, w_3^2, \dots, w_n^k$$

Cet ordre implique la borne suivante pour  $mfas(T)$ .

$$mfas(T) \leq k^2 mfas(D) + \left( \binom{n}{2} - |A(D)| \right) \left( \frac{k^2}{2} + 2k^{5/3} \right)$$

Afin de minorer  $mfas(T)$ , on définit  $\pi$  comme un ordre sur les sommets de  $T$  tel que exactement  $mfas(T)$  arcs sont des arcs retour. Soient  $i_1, i_2, \dots, i_n$  des entiers appartenant à  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Il y a au moins  $mfas(D)$  arcs entre les sommets  $\{w_1^{i_1}, w_2^{i_2}, w_3^{i_3}, \dots, w_n^{i_n}\}$  qui sont des arcs retour dans  $\pi$ , puisque ce

sous ensemble de sommets induit un digraphe isomorphe à  $D$ . En sommant sur toutes les valeurs possibles de  $i_1, i_2, \dots, i_n$  on obtient  $k^n mfas(D)$  arcs retour, où chaque arc est compté au plus  $k^{n-2}$  fois. On en déduit la borne suivante.

$$mfas(T) \geq \frac{k^n mfas(D)}{k^{n-2}} + \left( \binom{n}{2} - |A(D)| \right) \left( \frac{k^2}{2} - 2k^{5/3} \right)$$

Comme  $k^{1/3} \geq 64^{1/3} n^2 = 4n^2$  on obtient  $(\binom{n}{2} - |A(D)|) \times 2k^{5/3} < k^2 \frac{2n^2}{k^{1/3}} \leq \frac{k^2}{2}$ . Finalement on obtient l'encadrement suivant.

$$mfas(D) - \frac{1}{2} < \frac{mfas(T)}{k^2} - \frac{1}{2} \left( \binom{n}{2} - |A(D)| \right) < mfas(D) + \frac{1}{2}$$

Ainsi, si l'on pouvait calculer  $mfas(T)$  en temps polynômial, on aurait aussi calculé  $mfas(D)$ . Comme la réduction est polynômiale, cela conclut la preuve. ■





# Bibliographie

- [1] N. Ailon, M. Charikar et A. Newman, Aggregating Inconsistent Information : Ranking and Clustering. preprint.
- [2] N. Alon, Ranking tournaments. *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, to appear.
- [3] N. Alon et J. Spencer, The probabilistic method. Second edition. *Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization*, 2000.
- [4] J. Bang-Jensen et C. Thomassen, A polynomial algorithm for the 2-path problem for semicomplete digraphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 5 : 366-376, 1992..
- [5] J. Bang-Jensen et G. Gutin, Digraphs :Theory, Algorithms and Applications. *Springer Monographs in Mathematics* , 2001.
- [6] M. Behzad, Minimal 2-regular digraphs with given girth. *J. Math. Soc. Japan* 25 :1–6, 1973.
- [7] M. Behzad, G. Chartrand et C.E. Wall, On minimal regular digraphs with given girth. *Fund. Math* 69 :227-231, 1970.
- [8] C. Berge, Graphs. *North-Holland*, 1985.
- [9] C. Berge, k-optimal partitions of a directed graph. *Europ. J. Combinatorics* 3 :97-101, 1982.
- [10] J.-C. Bermond, 1-graphes réguliers minimaux de girth donne. *Colloque sur la Théorie des Graphes (Paris, 1974)*. *Cahiers Centre Etudes Recherche Opér.* 17 2-4 :125–135, 1975.
- [11] J. A. Bondy et P. Charbit, Cyclic Orders and Circuits Covering of Digraphs. *preprint*, 2004
- [12] J. A. Bondy, Large Cycles in Digraphs. *Discrete Math.* 1(2) :121-132, 1971.

- 
- [13] J. A. Bondy, Counting subgraphs : a new approach to the Caccetta-Häggkvist conjecture. *Discrete Math.*, 15 :165-166, 1997.
- [14] J.A. Bondy et U.S.R. Murty, Graph Theory with Applications. *North-Holland*, 1976.
- [15] S. Bessy et S. Thomassé, Spanning a strong digraph by  $\alpha$  circuits : A proof of Gallai's conjecture. *Combinatorica*, to appear.
- [16] S. Brandt et S. Thomassé, Dense Triangle-Free Graphs are Four-Colourable : A Solution to the Erdős-Simonovits Problem. preprint.
- [17] L. Caccetta, R. Häggkvist, On minimal digraphs with given girth. *Proceedings of the Ninth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing* 181–18, 1978.
- [18] V Chvátal, E. Szemere'di, Short cycles in directed graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 35 :323–327, 1983.
- [19] P. Charbit, P. Koiran, S. Perifel et S. Thomassé, Finding a Vector Orthogonal to Roughly Half a Collection of Vectors. preprint.
- [20] P. Charbit et A. Sebő, Cyclic Orders : Equivalence and Duality. preprint.
- [21] P. Charbit et S. Thomassé, Graphs with Large Girth not Embeddable in the Sphere. *Combinatorics Probability and Computing*, to appear.
- [22] P. Charbit, S. Thomassé, Anders Yeo, The Minimum Feedback Arc Set Problem is NP-Hard for Tournaments. *Combinatorics Probability and Computing*, to appear.
- [23] V. Chvátal, Linear Programming. *Freeman, A Series of Books in the Mathematical Sciences*, 1983.
- [24] G. L. Cherlin, Homogeneous directed graphs. The imprimitive case. *Logic Colloquium 1985* 67-88, 1985.
- [25] R. Diestel. Graph Theory. *Springer-Verlag, Heidelberg Graduate Texts in Mathematics, Volume 173* , 2000.
- [26] T. Gallai, Problem 15, *Theory of Graphs and its Applications* 161, 1964.
- [27] M. Goemans, Semidefinite Programming in Combinatorial Optimization. *Mathematical Programming*, 79 :143-161, 1997.
- [28] M. X. Goemans et D. P. Williamson, Improved Approximation Algorithms for Maximum Cut and Satisfiability Problems Using Semidefinite Programming, *J. ACM* 42 :1115-1145, 1995.

- [29] R. L. Graham et M. Grótschel et L. Lovász, Handbook of combinatorics, *MIT Press*, 1995.
- [30] D. Grigoriev, Topological complexity of the range searching. *Journal of Complexity*, 16 :50–53, 2000.
- [31] Y.O. Hamidoune, Quelques problèmes de connexité dans les graphes orientés. *J. Combin. Theory Ser. B* 30 :1–10, 1981.
- [32] Y.O. Hamidoune, A note on minimal directed graphs with given girth. *J. Combin. Theory Ser. B* 43 :343–348, 1987.
- [33] C.T. Hoàng, B. Reed, A note on short cycles in digraphs. *Discrete Math* 66 :103–107, 1987.
- [34] D. Karger, R. Motwani et M. Sudan, Approximate graph colouring by semidefinite programming, *J. ACM* 45 :162–169, 1978.
- [35] R. Karp, Reducibility among combinatorial problems, *Proc. Sympos., IBM Thomas J. Watson Res. Center, Yorktown Heights, N.Y.*, 85–103, 1972.
- [36] A. H. Lachlan et R. Woodrow, Countable ultrahomogeneous undirected graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 262 (1) : 51–94, 1980.
- [37] D.G. Larman, A Triangle Free Graph Which Cannot be square root of 3 Imbedded in any Euclidean Unit Sphere. *J. Comb. Theory, Ser. A* 24(2) :162–169, 1978.
- [38] N. Linial, Extending the Greene-Kleitman Theorem to Directed Graphs, *J. Comb. Theory, Ser. A* 30 :331–334, 1981.
- [39] K. Menger, Zur allgemeinen Kurventheorie, *Fund. Math.*, 10 :96–115, 1927.
- [40] J. Nešetřil et M. Rosenfeld, Embedding graphs in Euclidean spaces, an exploration guided by Paul Erdős. *Geombinatorics* 6 :143–155, 1997.
- [41] V. Rödl, On Combinatorial Properties of Spheres in Euclidean Spaces. *Combinatorica* 4 :345–349 : 1984.
- [42] M. Rosenfeld, Triangle free graphs that are not  $\sqrt{3}$ -embeddable in  $S^d$ . *J. Comb. Theory Series B* 33 :191–195, 1982.
- [43] A. Schrijver, Combinatorial Optimization, Springer, 2003.
- [44] A. Sebő, Minmax Relations for Cyclically Ordered Graphs. *Cahiers du Laboratoire Leibniz*, 2004.

- [45] J. Shen, Directed triangles in digraphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 74 :405–407, 1998.
- [46] J. Shen, On the girth of digraphs. *Discrete Math.* 211 :167–181, 2000.
- [47] J. Shen, On the Caccetta-Häggkvist conjecture. *Graphs and Combinatorics* 18(3) :645–654, 2002.
- [48] M. Todd, Semidefinite Optimization, *Acta Numerica* 10 :515–560, 2001.
- [49] X. Zhu, Circular chromatic number : a survey, *Discrete Mathematics*, 229 (1-3) : 371-410, 2001.

# Index

- $xy$ , 7
- $x \rightarrow y$ , 8
- $G[X]$ , 8
- $G \setminus F$ , 8
- $G - F$ , 8
- $G/X$ , 8
- $N_G(x)$ ,  $d_G(x)$ , 7
- $N_D^+(x)$ ,  $d_D^+(x)$ ,  $x^+$ , 8
- $P = x_0x_1 \dots x_p$ , 9
- $C = x_1 \dots x_lx_1$ , 9
- $\alpha(D)$ , 10
- $\kappa(D)$ , 10
- $g(D)$ , 9
- $\chi(D)$ , 10
- $\chi_{\text{circ}}(D)$ , 45
- $\chi_c(\mathcal{O})$ , 46
- $g_c(\mathcal{O})$ , 40
- $\delta_c(\mathcal{O})$ , 43
- $\delta_c(\mathcal{O})$ -plongement, 50
- $\text{Ret}(\mathcal{O})$ , 22
- $\text{Ret}(\mathcal{O})$ , 33
- $\mathcal{D}_k$ , 58
- $\mathcal{DT}_\alpha^n$ , 59
- $\mathcal{DM}_r$ , 62
  
- acyclique (digraphe), 9
- âge de graphes, 70
- amalgamation, 70
- anticohérent, 34
- arête, 7
- arbre, 9
  
- arc, 7
- arc avant, 22
- arc retour, 22
  
- boucle, 7
  
- chemin, 8
- circuit, 9
- cohérent, 27
- coloration, 10
- coloration circulaire, 45
- coloration cyclique, 45
- composantes fortement connexes, 9
- connectivité, 10
- connexe, 9
- $k$ -connexe, 10
- contraction, 8
- couvrant (sous-graphe), 8
- cycle, 9
  
- degré, 7
- degré maximum cyclique, 43
- digraphe, 7
- digraphe de majorité, 62
  
- écarts complémentaires, 12
  
- $\text{FAS}(D)$ , 9
- feedback arc set, 9
- feedback arc set cyclique, 33
- feedback vertex set, 9
- fonction de choix, 69

- 
- fortement connexe, 9  
FVS( $D$ ), 9  
graphe, 7  
homogène, 70  
indice-bornée, 29  
induit (sous-graphe), 8  
longueur, 22, 41  
longueur cyclique, 39  
maille, 9  
maille cyclique, 40  
nombre chromatique, 10  
nombre chromatique circulaire, 45  
nombre chromatique cyclique, 46  
ordre cyclique, 24  
ordre inverse, 34  
ordre linéaire, 21  
polyèdre, 10  
polytope, 10  
pondération feedback cyclique des arcs, 35  
pondération indice-bornée des arcs, 36  
séparateur, 10  
 $\alpha$ -shift, 51  
sommet, 7  
sous-graphe, 8  
 $\alpha$  sphérique, 76  
stabilité, 10  
stable, 10  
stable cyclique, 37  
totalement unimodulaire, 12  
tournoi, 10  
voisinage, 7









# UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON I

## DIPLOME DE DOCTORAT

AUTEUR : Pierre Charbit

TITRE : Plongement de Graphes et Étude des Circuits

MOTS CLES : Graphes, Digraphes, Circuits, Plongements, Optimisation Combinatoire

### RÉSUMÉ

Lorsque l'on étudie des propriétés ou des invariants, même purement combinatoires, des graphes, il est souvent utile de les plonger dans diverses surfaces. Cette thèse présente plusieurs résultats dans cette direction, concernant les circuits des graphes orientés ou non-orientés.

On considère tout d'abord les plongements circulaires en fournissant une étude détaillée de la notion d'ordre cyclique, introduite par S. Bessy et S. Thomassé dans leur preuve datant de 2003 d'une Conjecture de T. Gallai. De nouvelles preuves de leurs théorèmes ainsi que de nouveaux résultats concernant cette notion sont exposés.

On s'intéresse ensuite aux plongements des graphes sans triangles, en particulier lorsque l'on impose des conditions sur le degré minimum. Dans le cas orienté, les plongements seront toriques et mis en relation avec une question ouverte depuis trente ans : la Conjecture de Caccetta-Haggkvist. Cette partie contient quelques résultats concernant cette conjecture, on en expose notamment plusieurs formulations équivalentes. Puis dans le cas des graphes non orientés on fournit un nouveau résultat lié à une question de M. Rosenfeld concernant des plongements sphériques.

Enfin, le dernier chapitre de cette thèse contient deux résultats. Le premier concerne certaines propriétés d'orthogonalité des vecteurs de  $\mathbb{F}_2^n$  et permet de prouver le deuxième qui est la réponse à une question posée par J. Bang-Jensen et C. Thomassen : montrer que la détermination de la taille minimum d'un feedback arc set est un problème NP-dur pour la classe des tournois.