Olivier Carton, 21 nov 2018, Normalité

* Aléatoire, Normalité

$A = \{0,1\}$, $w \in A^*$, $\Gamma_w = wA^{\mathbb{N}}$, $\mu(\Gamma_w) = 2^{-|w|}$

Martin-Löf aléatoire

Ensemble X récursivement μ-nul

__Def__ $x \in A^{\mathbb{N}}$ est __Martin-Löf aléatoire__ si pour tout Z réc. μ-nul $x \notin Z$.

$$\text{Aléa} = A^{\mathbb{N}} \setminus \bigcup_{\substack{Z \text{ réc} \\ \mu\text{-nul}}} Z \Rightarrow \mu(\text{Aléa}) = 1$$

__Def__ X est __Récursivement μ-nul__ si

$\exists\, U \subseteq \{(i,w) : i \in \mathbb{N}, w \in A^*\}$ réc. énumérable

$U_i = \{u : (i,w) \in U\}$

1. $U_i A^* = U_i$
2. $U_{i+1} \subseteq U_i$
3. $X \subseteq U_i A^{\mathbb{N}}$
4. $\mu(U_i A^{\mathbb{N}}) \leq 2^{-i}$

__Propriété.__ $x \in \text{Aléa} \Rightarrow x$ non calculable

- $\text{Freq}(x,0) = 1/2 = \text{Freq}(x,1)$
- $\text{Freq}(x,00) = 1/4$

__Martingale__ $\sigma : A^* \to \mathbb{R}^+$

$$\sigma(w) = \frac{1}{2}\left(\sigma(w0) + \sigma(w1)\right)$$

mesure: $\mu(w) = \sigma(w)\, 2^{-|w|}$

Théorème (Schnorr)

x aléatoire ssi pour toute martingale σ faiblement calculable

$$\limsup_{n\to\infty} \sigma(x[1..n]) < \infty$$

Def σ faiblement calculable $\exists$ (il existe) $g : \mathbb{N} \times A^* \to \mathbb{R}^+$ calculable t.q.

- $g(i+1, w) \geq g(i, w)$
- $\lim_{i\to\infty} g(i,w) = \sigma(w)$

Normalité

$$occ(u,w) = \#\{i : u[i..i+|w|-1] = w\}$$

Def $x \in A^{\mathbb{N}}$ est normal ssi

$$\forall w \in A^* \lim_{n\to\infty} \frac{occ(x[1..n], w)}{n} = 2^{-|w|}$$

Def2 $alocc(u,w) = \{i : u[i+|w|-1] = w \wedge i \equiv 1 [|w|]\}$

$x \in A^{\mathbb{N}}$ est normal ssi

$$\forall w \lim_{n\to\infty} \frac{alocc(x[1..n], w)}{n/|w|} = 2^{-|w|}$$

La preuve de l'équivalence des 2 déf. utilise le thm ergodique.

Générique pour μ invariante pour $(A^{\mathbb{N}}, \text{shift})$.

On a l'équivalence entre les 2 def pour les mesure markoviennes (donc Lebesgue).

Est-ce plus général ?

Vincent Delecroix : Thue-Morse shift, occ. de 00 n'est pas unif. réparties.

Synthèse d'invariant par boucles linéaires P. Ohlmann

21 nov 2018

INPUT : $x, y \in \mathbb{Q}^d$, $A \in \mathbb{Q}^{d \times d}$

Question : Existe-t-il P tel que $x \in P$, $y \notin P$

et $AP \subset P$

P fini, polyèdre, semi-linéaire, algébriques, semi-algébriques

Théorème : $\exists$ invariant semi-alg $\Leftrightarrow y \notin \overline{O}$

$\Rightarrow$ OK

$\Leftarrow$ A = forme normale Jordan $= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} & \\ & \ddots \end{pmatrix}$

① $\exists \lambda, |\lambda| > 1$

② $\exists \lambda, |\lambda| < 1$

③ $\exists \lambda, |\lambda| = 1$ non diagonalisable

④ $\exists \lambda, |\lambda| = 1$ diagonalisable

$O = \{(\lambda_1^n \cdots \lambda_d^n), n \in \mathbb{N}\}$

Kronecker, $= \{(\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{T}^d \mid \forall v \in \mathbb{Z}^d, \lambda_1^{v_1} \cdots \lambda_d^{v_d} = 1 \Rightarrow \mu_1^{v_1} \cdots \mu_d^{v_d} = 1\}$

Massen $= \bigcap_{v^{(1)} \dots v^{(l)}} \{\mu \mid \dots \exists$ vecteurs bases petits en terme du degré input $\}$

$\square$

Théorème C'est décidable si il existe un invariant semi-linéaire.

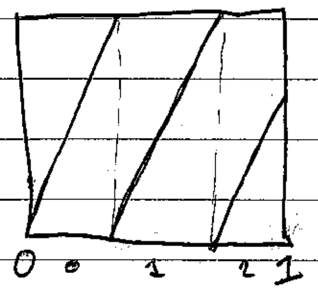
22/11/18

Frédéric Paccaut — Orbites périodiques et form. thermodyn.

$T : [0,1] \to [0,1]$

$x \mapsto \{\beta x\}$

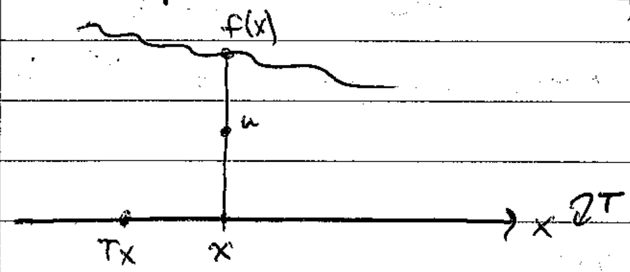
T markov si image intervalles sont des unions d'intervalles de la partition



T^p markov $\Leftrightarrow$ orbite de 1 est finie (tombe sur 0)

$\Leftrightarrow \beta^{n+1} = d_n \beta^n + \dots + d_1 \beta + d_0$

Flot suspendu



$f : X \to \mathbb{R}$, $f > 0$, fonction toit

$X_f = \{(x,u),\ u \le f(x),\ x \in X\}_{\sim (x, f(x)) = (Tx, 0)}$

$\sigma_f^t(x,0) = \begin{cases} (x,t) & \text{si } t < f(x) \\ (Tx,0) & \text{si } t = f(x) \end{cases}$

Bowen, Parry, Pollicot

f assez régulière. Si μ est une mesure invariante par $T : X \to X$ alors la mesure μ_f

$F : X_f \to \mathbb{R}$

$(x,u) \mapsto F(x,u)$

$$\int F \, d\mu_f = \frac{\int \int_0^{f(x)} F(x,u) \, du \, d\mu}{\int f \, d\mu}$$

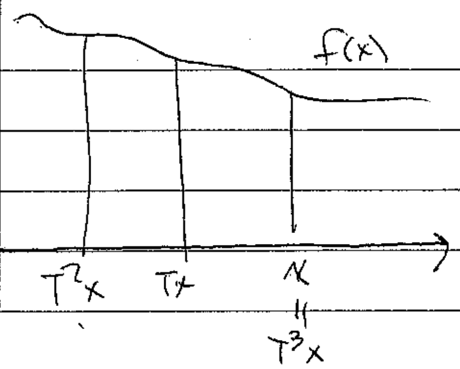
Formule d'Abramov $h(\mu_f, \sigma_f) = \dfrac{h(\mu, T)}{\int f \, d\mu}$

Entropie topologique

Sur X, $h = \sup_{\mu \text{ invariante}} h(\mu, T)$

Pour le flot $h_f = \sup_{\mu_f \text{ inv}} h(\mu_f, \sigma_f)$

formule de Rokhlin : $h_\mu = \int \log |T'| \, d\mu$



τ orbite périodique primitive pour le flot

$\lambda(\tau)$ sa longueur

τ associée à x dont l'orbite

$$\lambda(\tau) = f(x) + f(Tx) + \dots + f(T^{p(x)-1}x)$$

$$K : X_f \to \mathbb{R} \qquad k(x) = \int_0^{f(x)} K(x,u)\,du$$
$$(x,u) \mapsto K(x,u)$$

$\lambda_K(\tau)$ = intégrale de K le long de l'orbite périodique K

$$\lambda_K(\tau) = \int_\tau K\,d\mu_f = k(x) + k(Tx) + \dots + k(T^{p(x)-1}x)$$

Théorèmes

$$\#\{\tau, \lambda(\tau) \leq N\} \sim \frac{e^{Nh_f}}{Nh_f}$$

$$\sum_{\tau, \lambda(\tau) \leq N} \lambda_K(\tau) \sim \frac{e^{Nh_f}}{h_f} \int K\,dm_f$$

m_f : mesure d'entropie maximale du flot i.e. $h(\sigma_f, m_f) = h_f$

[...]

Pour β-transformation

$$\varepsilon(x) = \beta^{p(x)} \qquad f(x) = \log\beta \quad \text{fonction toit}$$

pas faiblement mélangeant

Vincent Delecroix 22/11/18

Problème ouvert: est-ce que $\sqrt[3]{2}$ a une orbite dense?

① Preuve automatique

② Fabriquer sur un ordinateur des orbites?

$$T(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right] \qquad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-ay \\ y \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x \\ y-ax \end{pmatrix} \right)$$

dimension + grande

$$T : \mathbb{R}^d_+ \longrightarrow \mathbb{R}^d_+ \qquad \mathbb{R}^d_+ = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_k \text{ partition}$$

$$x \longmapsto A_i^{-1} x \text{ si } x \in \Delta_i \qquad A_1 \dots A_k \in GL_d(\mathbb{N})$$

avec $A_i^{-1} \Delta_i \in \mathbb{R}^d_+$

Quelle est la dynamique de $\overline{T} : \mathbb{P}\mathbb{R}^d_+ \longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}^d_+$?

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = a_i \ \infty \text{ souvent} \\ \Updownarrow \\ T^n x \in [\tfrac{1}{2}, 1] \end{array} \right.$$

Étant donné AFCM

- est-ce qu'il existe une orbite dense?
- est-ce qu'il existe une mesure a.c. p/r à Lebesgue?
- décidabilité de ces questions?

$$\frac{1}{q^{1+\frac{1}{d}}} \Rightarrow \frac{1}{q^{1-\lambda_2/\lambda_1}}$$ exposants de Lyapunov

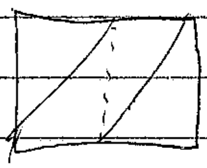
λ_1 on peut calculer par intervalles

λ_2 on peut donner des bornes supérieures.

Exp. Lyapunov

$$\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \|A^n\|}{n} \qquad \lambda_1 = \lim_n \frac{\log \|A(x) A(Tx) \cdots A(T^{n-1}x)\|}{n}$$

(convergence assurée par un thm type ergodique)



$2x \bmod 1$, discrétisation : $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right]$

les pts se retrouvent sur 0 ...

Si on s'autorise une source d'aléa, on peut générer des orbites
Et ça marche pour les applications dilatant

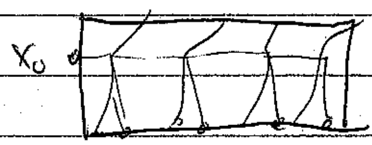
Thm approximatif f dilatant

$$\left(d(f(x), f(y)) > \rho\, d(x,y),\ \rho > 1 \right)$$

on peut générer des orbites inverses qui s'équidistribuent
sur la mesure d'entropie maximale.

$X_0 \longrightarrow X_{-1}$

$H = \{ \text{branches inverses} \}$ (suppose complètes)



4 choix

On choisit $X_{-1} = h(X_0)$ avec probabilité $\dfrac{|h'(X_0)|}{\sum_{g \in H} |g'(X_0)|}$

Chaîne de Markov sur $[0,1]$
avec une unique mesure stationnaire $\mu(x) = \sum_{h \in H} \frac{1}{|h'(x)|}$

Approche plus efficace en pratique. Faire un opérateur de transfert tronqué.

Pollicott : Calcul λ_1 : matrice $A, B \in GL_2(\mathbb{N}_{>0})$, mesure de Bernoulli

Discrépance, Wolfgang Steiner 23/11/18

Ref: Kuiper, Niederreiter, 1974
Drmota, Tichy 1997

$(x_n)_{n\geq 1}$ $x_n \in [0,1)^k$

$$A_N(I) = \#\{1 \leq n \leq N : x_n \in I\} = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_I(x_n)$$

Notation : $[0,y) = [0,y_1) \times [0,y_2) \times \dots \times [0,y_k)$ avec $y = (y_1, \dots, y_k)$

$$D_N(I) = \left| \frac{A_N(I)}{N} - \lambda(I) \right|$$

Discrépance $D_N = \sup_{I \subseteq [0,1)^k} D_N(I)$

$$D_N^* = \sup_{y \in [0,1]^k} D_N([0,y))$$

$$J_N = \sup_{M \text{ convex}} D_N(M)$$

Bien sûr, $\frac{1}{2^k} D_N \leq D_N^* \leq D_N \leq J_N \leq C_k D_N^{1/k}$.

Aussi, $D_N^{(p)} = \left(\int_{[0,1]^k} |D_N([0,y))|^p d\mu \right)^{1/p}$, $p \geq 1$

et alors

$$D_N^{(p)} \leq D_N^* \leq C_{k,p} D_N^{(p)\, \frac{p}{p+k}}$$

DEF (x_n) uniformly distributed : $D_N(I) \to 0$ $\forall I \subset [0,1)^k \Leftrightarrow D_N \to 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \to \int f \, d\lambda \quad \forall f \in C([0,1]^k)$$

$$\Leftrightarrow D_N(M) \to 0 \quad \forall \text{ ensemble } M \ \lambda\text{-continue} : \lambda(\partial M) = 0$$

(X,μ)

Système de discrépance $\mathcal{D} \subseteq \{$ensembles μ-continues$\}$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) \to \int f\,d\mu \quad \forall f \in C(X) \iff D_N(M) \to 0 \quad \forall M \in \mathcal{D}$$

$$D_N = \sup_{[w]} D_N([w])$$

$$\boxed{\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int f\,d\lambda\right| \leq V(f)\, D_N^*}$$

$k=1$ $\quad D_N \geq \frac{1}{N}$, $\quad D_N \geq c\,\frac{\log N}{N}$, i.e. W Schmidt 72

$$\exists (x_n) \quad D_N = \frac{1}{N}, \quad D_N = O\left(\frac{\log N}{N}\right)$$

$$x_n = \{n\alpha\} \quad D_N = O\left(\frac{\log N}{N}\right) \iff \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = O(n)$$

$$\text{avec} \quad \alpha = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 \dots}}}$$

Van der Corput

$$x_n = \varphi_b(n) \qquad n = \sum_{i=0}^{\infty} d_i b^i \qquad \varphi_b(n) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i b^{-i-1}$$

$$d_i \in \{0,1,\dots,b-1\}$$

$b=2$ n	$\varphi_b(n)$
0	.0
1	.1
10	.01
11	.11
100	.001
101	.101
110	.011
111	.111

$$\left|A_N\left(\left[\frac{s}{2^k}, \frac{(s+1)}{2^k}\right)\right) - \frac{N}{2^k}\right| \leq 1$$

Ensemble à reste borné $\quad |A_N(M) - \lambda(M)| \leq 1, \ \forall N$

$x_n = \varphi_\beta(n) \quad D_N = O\left(\frac{\log N}{N}\right)$ si β Pisot et

Ninnigа 1999 $\quad \#\{T_\beta^n(1^-) : n \geq 0\} = \deg(\beta)$

$x_n = \{n\alpha\} \quad$ IBRS $\iff \lambda(I) \in \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}$

Ostrowski 1927
Kesten 1966, 1967