

Décidabilité de la factorisation des sous-shifts minimaux substitutifs

Fabien Durand

LAMFA UMR 7352 CNRS-UPJV, IRIF UMR 8243 CNRS-UPD

4 juin 2019

La question de cet exposé

(Joint work with Julien LEROY)

Données : (X, T) et (Y, S) deux systèmes dynamiques topologiques

La question de cet exposé

(Joint work with Julien LEROY)

Données : (X, T) et (Y, S) deux systèmes dynamiques topologiques

Question : Existe-t-il $f : X \rightarrow Y$ (surjective) telle que $f \circ T = S \circ f$?

La question de cet exposé

(Joint work with Julien LEROY)

Données : (X, T) et (Y, S) deux systèmes dynamiques topologiques

Question : Existe-t-il $f : X \rightarrow Y$ (surjective) telle que $f \circ T = S \circ f$?

Existe-t-il un algorithme permettant de le décider ?

Sous-shifts substitutifs

Substitution : $\tau : A^* \rightarrow A^*$

Sous-shifts substitutifs

Substitution : $\tau : A^* \rightarrow A^*$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{a \in A} |\tau^n(a)| = +\infty$$

Sous-shifts substitutifs

Substitution : $\tau : A^* \rightarrow A^*$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{a \in A} |\tau^n(a)| = +\infty$$

Point fixe de substitution : $\tau(x) = x = \tau^\infty(b.a) = \tau^\infty(b).\tau^\infty(a)$

Sous-shifts substitutifs

Substitution : $\tau : A^* \rightarrow A^*$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{a \in A} |\tau^n(a)| = +\infty$$

Point fixe de substitution : $\tau(x) = x = \tau^\infty(b.a) = \tau^\infty(b).\tau^\infty(a)$

Suites substitutives : $y = \phi(x)$, $\phi : A^* \rightarrow B^*$

Sous-shifts substitutifs

Substitution : $\tau : A^* \rightarrow A^*$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{a \in A} |\tau^n(a)| = +\infty$$

Point fixe de substitution : $\tau(x) = x = \tau^\infty(b.a) = \tau^\infty(b).\tau^\infty(a)$

Suites substitutives : $y = \phi(x)$, $\phi : A^* \rightarrow B^*$

Suites automatiques : suites substitutives où τ est de longueur constante et $\phi(A) = B$

Sous-shifts substitutifs

$$\text{Shift} : S : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}, S((x_n)_n) = (x_{n+1})_n$$

Sous-shifts substitutifs

Shift : $S : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$, $S((x_n)_n) = (x_{n+1})_n$

Sous-shift substitutif : (X, S) , $X = \overline{\{S^n x \mid n \in \mathbb{Z}\}}$, x substitutive

Factorisation

$\phi : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ continue surjective,

Factorisation

$\phi : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ continue surjective,

$$\phi \circ T = S \circ \phi$$

Factorisation

$\phi : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ continue surjective,

$$\phi \circ T = S \circ \phi$$

Lorsque (X, T) et (Y, S) sont des sous-shifts : il existe $f : A^{2r+1} \rightarrow B$ telle que

Factorisation

$\phi : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ continue surjective,

$$\phi \circ T = S \circ \phi$$

Lorsque (X, T) et (Y, S) sont des sous-shifts : il existe $f : A^{2r+1} \rightarrow B$ telle que

$$\phi(x)_n = f(x_{n-r} \cdots x_n \cdots x_{n+r})$$

rayon de $f : r$

Factorisation

$\phi : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ continue surjective,

$$\phi \circ T = S \circ \phi$$

Lorsque (X, T) et (Y, S) sont des sous-shifts : il existe $f : A^{2r+1} \rightarrow B$ telle que

$$\phi(x)_n = f(x_{n-r} \cdots x_n \cdots x_{n+r})$$

rayon de $f : r$

Les sous-shifts seront toujours supposés minimaux : toutes les orbites sont denses

Des intuitions pour les isomorphismes

Theorem

(Cyr&Kra2015,Donoso&Durand&Maass&Petite2016)

Soit (X, S) un sous-shift minimal tel que $\liminf \frac{p_X(n)}{n} < +\infty$. Alors $\text{Aut}(X, S)/\langle S \rangle$ est fini.

Des intuitions pour les isomorphismes

Theorem

(Cyr&Kra2015,Donoso&Durand&Maass&Petite2016)

Soit (X, S) un sous-shift minimal tel que $\liminf \frac{p_X(n)}{n} < +\infty$. Alors $\text{Aut}(X, S)/\langle S \rangle$ est fini.

Theorem (Durand2000)

Soit (X, S) un sous-shift linéairement récurrent. Si l'on a deux applications facteurs $f : (X, S) \rightarrow (Y, S)$ et $g : (Y, S) \rightarrow (X, S)$ alors f et g sont des isomorphismes.

Des intuitions pour les facteurs

Theorem (Durand2000)

Soit (X, S) un sous-shift linéairement récurrent. Alors, (X, S) a un nombre fini de facteurs sous-shifts à isomorphismes près.

Des intuitions pour les facteurs

Theorem (Durand2000)

Soit (X, S) un sous-shift linéairement récurrent. Alors, (X, S) a un nombre fini de facteurs sous-shifts à isomorphismes près.

Theorem (Host&Parreau1988,Coven et al.2008,2014,Salo&Torma2015)

Soient σ, τ deux substitutions primitives de longueurs constantes. Il existe une constante R telle que pour tout facteur $f : (X_\sigma, S) \rightarrow (X_\tau, S)$, il existe une autre application facteur g de rayon inférieur à R tel que $f = g \circ S^n$ pour un certain n .

Autres problèmes de décidabilité : la périodicité

Donnée : Une substitution

Autres problèmes de décidabilité : la périodicité

Donnée : Une substitution

Question : peut-on décider de la périodicité de ses points fixes ?

Autres problèmes de décidabilité : la périodicité

Donnée : Une substitution

Question : peut-on décider de la périodicité de ses points fixes ?

Réponses :

Autres problèmes de décidabilité : la périodicité

Donnée : Une substitution

Question : peut-on décider de la périodicité de ses points fixes ?

Réponses :

Suites automatiques : Presburger1929, Honkala2008

Autres problèmes de décidabilité : la périodicité

Donnée : Une substitution

Question : peut-on décider de la périodicité de ses points fixes ?

Réponses :

Suites automatiques : Presburger1929, Honkala2008

Longueurs non-constantes : Harja&Linna1986 et Pansiot1986

Autres problèmes de décidabilité : la périodicité

Donnée : Une substitution

Question : peut-on décider de la périodicité de ses points fixes ?

Réponses :

Suites automatiques : Presburger1929, Honkala2008

Longueurs non-constantes : Harja&Linna1986 et Pansiot1986

Suites substitutives : Durand2013

Un autre problème de décidabilité : la minimalité (uniforme récurrence)

Donnée : Une substitution

Un autre problème de décidabilité : la minimalité (uniforme récurrence)

Donnée : Une substitution

Question : peut-on décider de l'uniforme récurrence de ses points fixes ?

Un autre problème de décidabilité : la minimalité (uniforme récurrence)

Donnée : Une substitution

Question : peut-on décider de l'uniforme récurrence de ses points fixes ?

Réponses positives : Martin1971 pour les points fixes

Un autre problème de décidabilité : la minimalité (uniforme récurrence)

Donnée : Une substitution

Question : peut-on décider de l'uniforme récurrence de ses points fixes ?

Réponses positives : Martin1971 pour les points fixes

Suites substitutives : Durand2013

Le problème de la décidabilité de la factorisation

Données : Deux substitutions (primitives) σ et τ .

Le problème de la décidabilité de la factorisation

Données : Deux substitutions (primitives) σ et τ .

Question : Existe-t-il un algorithme permettant de décider s'il existe $f : (X_\sigma, S) \rightarrow (X_\tau, S)$?

Retour à la décidabilité de la factorisation : le cas de la longueur constante

Pour les points fixes : Coven&Dekking&Keane2017 et
Coven&Quas&Yassawi2016

Retour à la décidabilité de la factorisation : le cas de la longueur constante

Pour les points fixes : Coven&Dekking&Keane2017 et Coven&Quas&Yassawi2016

Pour les suites automatiques : Presburger1929, Bruyère1997, Fagnot1997, Mullner&Yassawi2019

Retour à la décidabilité de la factorisation : le cas de la longueur constante

Pour les points fixes : Coven&Dekking&Keane2017 et Coven&Quas&Yassawi2016

Pour les suites automatiques : Presburger1929, Bruyère1997, Fagnot1997, Mullner&Yassawi2019

La théorie $\langle \mathbb{Z}, +, \leq, V_p \rangle$ est décidable.

Proposition

Soient σ et τ deux substitutions primitives de longueur constante et $f : (X_\sigma, S) \rightarrow (X_\tau, S)$ une application facteur de rayon $r(f)$. Supposons X_τ infini. Alors,

Proposition

Soient σ et τ deux substitutions primitives de longueur constante et $f : (X_\sigma, S) \rightarrow (X_\tau, S)$ une application facteur de rayon $r(f)$. Supposons X_τ infini. Alors,

1. Il existe $k, l \geq 1$ tel que $|\sigma^k| = |\tau^l|$ (Fagnot1997);

Proposition

Soient σ et τ deux substitutions primitives de longueur constante et $f : (X_\sigma, S) \rightarrow (X_\tau, S)$ une application facteur de rayon $r(f)$. Supposons X_τ infini. Alors,

1. Il existe $k, l \geq 1$ tel que $|\sigma^k| = |\tau^l|$ (Fagnot1997) ;
2. Il existe n et une application facteur $F : (X_\sigma, S) \rightarrow (X_\tau, S)$ de rayon $r(F)$ définie par (Salo&Torma2015)

$$\tau^l \circ F = S^n \circ f \circ \sigma^k, \quad 0 \leq n < |\tau|^l. \quad (1)$$

Proposition

Soient σ et τ deux substitutions primitives de longueur constante et $f : (X_\sigma, S) \rightarrow (X_\tau, S)$ une application facteur de rayon $r(f)$. Supposons X_τ infini. Alors,

1. Il existe $k, l \geq 1$ tel que $|\sigma^k| = |\tau^l|$ (Fagnot1997) ;
2. Il existe n et une application facteur $F : (X_\sigma, S) \rightarrow (X_\tau, S)$ de rayon $r(F)$ définie par (Salo&Torma2015)

$$\tau^l \circ F = S^n \circ f \circ \sigma^k, \quad 0 \leq n < |\tau|^l. \quad (1)$$

3. $r(F) \leq 1 + r(f)/|\tau|^l$;

Proposition

Soient σ et τ deux substitutions primitives de longueur constante et $f : (X_\sigma, S) \rightarrow (X_\tau, S)$ une application facteur de rayon $r(f)$. Supposons X_τ infini. Alors,

1. Il existe $k, l \geq 1$ tel que $|\sigma^k| = |\tau^l|$ (Fagnot1997) ;
2. Il existe n et une application facteur $F : (X_\sigma, S) \rightarrow (X_\tau, S)$ de rayon $r(F)$ définie par (Salo&Torma2015)

$$\tau^l \circ F = S^n \circ f \circ \sigma^k, \quad 0 \leq n < |\tau|^l. \quad (1)$$

3. $r(F) \leq 1 + r(f)/|\tau|^l$;
4. Il existe une application facteur $g : (X_\sigma, S) \rightarrow (X_\tau, S)$ telle que $r(g) \leq 1$ et $g = f \circ S^m$ pour un certain m .

Points clés

La reconnaissabilité (forte) : τ est injective sur X_τ .

$$|\tau^l| = |\sigma^k|$$

le temps de retour r_{X_τ} dans $f(\sigma(X))$ est constant et égale à n
(for $k = l = 1$)

$$\tau \circ F = S^n \circ f \circ \sigma, \quad 0 \leq n < |\tau|. \quad (2)$$

F définit une application facteur

Proposition (Fagnot1997)

Soient σ et τ deux substitutions primitives de longueur constante et f une fonction de blocs glissante. Il existe un algorithme permettant de décider si f est une application facteur de (X_σ, S) vers (X_τ, S) .

Corollary

(Coven&Dekking&Keane2017, Coven&Quas&Yassawi2016)

Pour les substitutions primitives de longueur constante, le problème de la factorisation est décidable.

Le cas des longueurs non-constantes : Retour vers les points clés

Données : deux substitutions primitives τ et σ

Hypothèses : $f : (X_\sigma, S) \rightarrow (X_\tau, S)$

Il existe $k, l > 0$ tels que τ^l et σ^k aient la même valeur propre dominante (Durand1998)

La reconnaissabilité : τ est injective sur X_τ (Mossé1992).

$r_f(X_\sigma)$ n'est pas constant

$$\tau \circ F = S^{r_{X_\tau} \circ f \circ \sigma} \circ f \circ \sigma. \quad (3)$$

F n'est pas une application facteur

Le cas des longueurs non-constantes : Retour vers les points clés

$$\tau \circ F = S^{rof \circ \sigma} \circ f \circ \sigma,$$

$F : X_\tau \rightarrow X_\sigma$ est une dill map :

$$F(\mathcal{O}_{S,\tau}(x)) \subset \mathcal{O}_{S,\sigma}(F(x))$$

$$F(S(x)) = S^{c(x)}(F(x)), \quad (4)$$

c continue $c \geq 0$

Dill maps

$$\phi(x) = f(x)_{[0, c(x)-1]} \text{ for all } x \in X.$$

$\phi : X \rightarrow A^*$ continue

$$f(x) = \cdots \phi(S^{-1}(x)).\phi(x)\phi(S(x))\phi(S^2(x))\cdots \quad (5)$$

vecteur rayon (r_1, r_2) :

$$r_1 = \min\{R \in \mathbb{N} \mid x_{[-R, R]} = y_{[-R, R]} \implies \phi(x) = \phi(y)\} \text{ and}$$

$$r_2 = \max \phi = \max c.$$

Le cas des longueurs non-constantes : Retour vers les points clés

$$\tau^n \circ F_n = S^{r_n \circ f \circ \sigma^n} \circ f \circ \sigma^n,$$

Proposition

Soit r le rayon de f . Il existe une constante calculable telle que

$$\#\{F_n \mid r/|\tau^n| \leq 1\} \leq K.$$

Difficulté : calcul des constantes de reconnaissabilité de τ et τ^n .

Quelques détails

$$r_1 \leq \frac{(|\tau^n| + |\sigma^n|)}{\langle \tau^n \rangle}.$$

$$r_2 \leq \frac{\langle \sigma^n \rangle + L_{\tau^n}}{|\tau^n|}$$

Theorem

Soient $\sigma : A^ \rightarrow A^*$ et $\tau : B^* \rightarrow B^*$ deux substitutions apériodiques, propres et primitives. Il existe une constante calculable K telle que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

Theorem

Soient $\sigma : A^ \rightarrow A^*$ et $\tau : B^* \rightarrow B^*$ deux substitutions apériodiques, propres et primitives. Il existe une constante calculable K telle que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1. Il existe une application facteur $f : (X_\sigma, S) \rightarrow (X_\tau, S)$.*

Theorem

Soient $\sigma : A^ \rightarrow A^*$ et $\tau : B^* \rightarrow B^*$ deux substitutions apériodiques, propres et primitives. Il existe une constante calculable K telle que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1. Il existe une application facteur $f : (X_\sigma, S) \rightarrow (X_\tau, S)$.*
- 2. Il existe une application dill $F : (X_\sigma, S) \rightarrow (X_\tau, S)$ satisfaisant :*

Theorem

Soient $\sigma : A^ \rightarrow A^*$ et $\tau : B^* \rightarrow B^*$ deux substitutions apériodiques, propres et primitives. Il existe une constante calculable K telle que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1. Il existe une application facteur $f : (X_\sigma, S) \rightarrow (X_\tau, S)$.*
- 2. Il existe une application dill $F : (X_\sigma, S) \rightarrow (X_\tau, S)$ satisfaisant :*
 - ▶ (s_1, s_2) est borné par K ;*

Theorem

Soient $\sigma : A^* \rightarrow A^*$ et $\tau : B^* \rightarrow B^*$ deux substitutions apériodiques, propres et primitives. Il existe une constante calculable K telle que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une application facteur $f : (X_\sigma, S) \rightarrow (X_\tau, S)$.
2. Il existe une application dill $F : (X_\sigma, S) \rightarrow (X_\tau, S)$ satisfaisant :
 - ▶ (s_1, s_2) est borné par K ;
 - ▶ Pour tout $x \in X_\tau$, $F \circ S(x) = S^{c(x)} \circ F(x)$ où $c : X \rightarrow \mathbb{Z}$ est continue et telle que $(\sum_{k=0}^{n-1} c \circ S^k - 1)_n$ est borné et $|c(x)| \leq K$.

Theorem

Soient $\sigma : A^* \rightarrow A^*$ et $\tau : B^* \rightarrow B^*$ deux substitutions apériodiques, propres et primitives. Il existe une constante calculable K telle que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une application facteur $f : (X_\sigma, S) \rightarrow (X_\tau, S)$.
2. Il existe une application dill $F : (X_\sigma, S) \rightarrow (X_\tau, S)$ satisfaisant :
 - ▶ (s_1, s_2) est borné par K ;
 - ▶ Pour tout $x \in X_\tau$, $F \circ S(x) = S^{c(x)} \circ F(x)$ où $c : X \rightarrow \mathbb{Z}$ est continue et telle que $(\sum_{k=0}^{n-1} c \circ S^k - 1)_n$ est borné et $|c(x)| \leq K$.
3. Il existe une application facteur $g : (X_\sigma, S) \rightarrow (X_\tau, S)$ de rayon borné par K .

Il existe $m < n$ tels que $F_n = F_m$.

.

Il existe $m < n$ tels que $F_n = F_m$.

$F_{n-1} \equiv F_{m-1}$: il existe $c, d : X_1 \rightarrow \mathbb{Z}$ continues telles que

$$T_2^{c(\cdot)} \circ f \circ T_1^{d(\cdot)} = g$$

.

Il existe $m < n$ tels que $F_n = F_m$.

$F_{n-1} \equiv F_{m-1}$: il existe $c, d : X_1 \rightarrow \mathbb{Z}$ continues telles que

$$T_2^{c(\cdot)} \circ f \circ T_1^{d(\cdot)} = g$$

.

$$f = F_0 \equiv F_{k(n-m)} = F$$

Il existe $m < n$ tels que $F_n = F_m$.

$F_{n-1} \equiv F_{m-1}$: il existe $c, d : X_1 \rightarrow \mathbb{Z}$ continues telles que

$$T_2^{c(\cdot)} \circ f \circ T_1^{d(\cdot)} = g$$

.

$$f = F_0 \equiv F_{k(n-m)} = F$$

$$F \circ S = S^{e(\cdot)} \circ F, e - 1 = d \circ S - d \text{ et } F = S^{h(\cdot)} \circ f$$

Il existe $m < n$ tels que $F_n = F_m$.

$F_{n-1} \equiv F_{m-1}$: il existe $c, d : X_1 \rightarrow \mathbb{Z}$ continues telles que

$$T_2^{c(\cdot)} \circ f \circ T_1^{d(\cdot)} = g$$

.

$$f = F_0 \equiv F_{k(n-m)} = F$$

$$F \circ S = S^{e(\cdot)} \circ F, e - 1 = d \circ S - d \text{ et } F = S^{h(\cdot)} \circ f$$

$G = S^{-d(\cdot)} \circ F$ est une application facteur

Il existe $m < n$ tels que $F_n = F_m$.

$F_{n-1} \equiv F_{m-1}$: il existe $c, d : X_1 \rightarrow \mathbb{Z}$ continues telles que

$$T_2^{c(\cdot)} \circ f \circ T_1^{d(\cdot)} = g$$

.

$$f = F_0 \equiv F_{k(n-m)} = F$$

$$F \circ S = S^{e(\cdot)} \circ F, e - 1 = d \circ S - d \text{ et } F = S^{h(\cdot)} \circ f$$

$G = S^{-d(\cdot)} \circ F$ est une application facteur

Il existe (t_n) croissante telle que $\sum_{i=t_n}^{t_{n+1}} e(i) - 1 = 0$

L'algorithme

En résumé : S'il existe un facteur entre (X_σ, S) et (X_τ, S) alors il en existe un de rayon "petit", R , et calculable.

L'algorithme

En résumé : S'il existe un facteur entre (X_σ, S) et (X_τ, S) alors il en existe un de rayon "petit", R , et calculable.

Donc, il "suffit" de tester tous les facteurs f de rayons plus petits que R : trouver un tel f tel que $f(X_\sigma) = X_\tau$.

La question suivante

Donnée : substitution primitive σ

La question suivante

Donnée : substitution primitive σ

Question : Lister tous les facteurs sous-shifts de (X_σ, S)