

Dynamiques des systèmes simpliciaux

Charles Fougeron

20 novembre 2020



Université de Paris



IRIF
INSTITUT
DE RECHERCHE
EN INFORMATIQUE
FONDAMENTALE

Algorithmes de fraction continue

$$x \in [0, 1]$$

Approximation par des
rationnels

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$$



Algorithmes de fraction continue

$$x \in [0, 1]$$

Approximation par des
rationnels

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$$



Algorithme

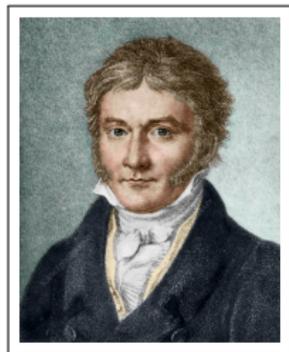
$$G : x \rightarrow \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right]$$

Algorithmes de fraction continue

$$x \in [0, 1]$$

Approximation par des
rationnels

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$$



Développement

$$x = [a_1, a_2, \dots]$$

Algorithme

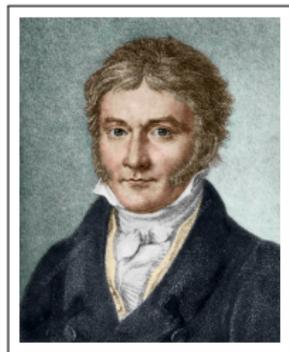
$$G : x \rightarrow \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right]$$

Algorithmes de fraction continue

$$x \in [0, 1]$$

Approximation par des
rationnels

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$$



Développement

$$x = [a_1, a_2, \dots]$$

$$\frac{p_n}{q_n} := \frac{1}{a_1 + \cfrac{\dots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Algorithme

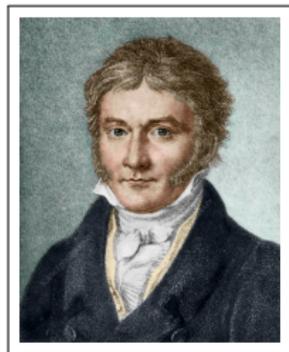
$$G : x \rightarrow \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right]$$

Algorithmes de fraction continue

$$x \in [0, 1]$$

Approximation par des
rationnels

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$$



Développement

$$x = [a_1, a_2, \dots]$$

$$\frac{p_n}{q_n} := \frac{1}{a_1 + \cfrac{\dots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Algorithme

$$T : (1, x) \rightarrow (1, x - [x])$$

Algorithmes de fraction continue

$$x \in [0, 1]$$

Approximation par des
rationnels

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$$



Développement

$$x = [a_1, a_2, \dots]$$

$$\frac{p_n}{q_n} := \frac{1}{a_1 + \cfrac{\dots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Algorithme

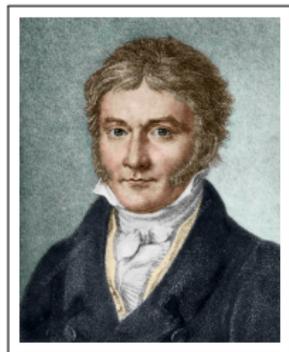
$$T : (1, x) \rightarrow (1, x - 1) \\ \text{pour } 1 < x$$

Algorithmes de fraction continue

$$x \in [0, 1]$$

Approximation par des
rationnels

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$$



Développement

$$x = [a_1, a_2, \dots]$$

$$\frac{p_n}{q_n} := \frac{1}{a_1 + \cfrac{\dots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Algorithme

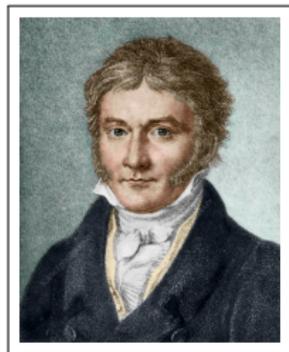
$$T : (x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2 - x_1) \\ \text{pour } x_1 < x_2$$

Algorithmes de fraction continue

$$x \in [0, 1]$$

Approximation par des
rationnels

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$$



Développement

$$x \rightarrow \sigma_1^{a_1} \sigma_2^{a_2} \sigma_1^{a_3} \dots$$

$$\frac{p_n}{q_n} := \frac{1}{a_1 + \cfrac{\dots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Algorithme

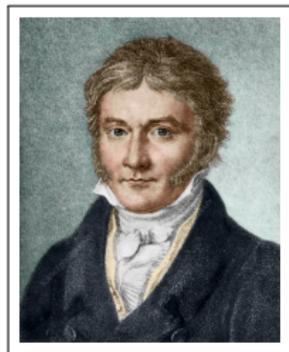
$$T : (x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2 - x_1) \\ \text{pour } x_1 < x_2$$

Algorithmes de fraction continue

$$x \in [0, 1]^2$$

Approximation par des
rationnels

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$$



Développement

$$x \rightarrow \sigma_1^{a_1} \sigma_2^{a_2} \sigma_1^{a_3} \dots$$

$$\frac{p_n}{q_n} := \frac{1}{a_1 + \cfrac{\dots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Algorithme

$$T : (x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2 - x_1) \\ \text{pour } x_1 < x_2$$

Algorithmes de fraction continue

$$x \in [0, 1]^2$$

Approximation par des rationnels

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{1+1/2}}$$



Développement

$$x \rightarrow \sigma_1^{a_1} \sigma_2^{a_2} \sigma_1^{a_3} \dots$$

$$\frac{p_n}{q_n} := \frac{1}{a_1 + \cfrac{\cdot\cdot\cdot}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Algorithme

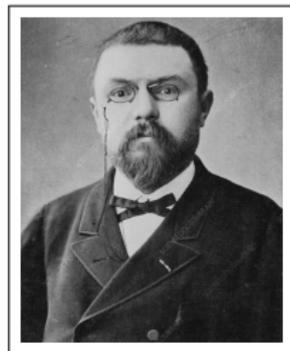
$$T : (x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2 - x_1) \\ \text{pour } x_1 < x_2$$

Algorithmes de fraction continue

$$x \in [0, 1]^2$$

Approximation par des rationnels

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{1+1/2}}$$



Développement

$$x \rightarrow \sigma_1^{a_1} \sigma_2^{a_2} \sigma_1^{a_3} \dots$$

$$\frac{p_n}{q_n} := \frac{1}{a_1 + \cfrac{\cdot\cdot\cdot}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Algorithme

$$T : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2)$$

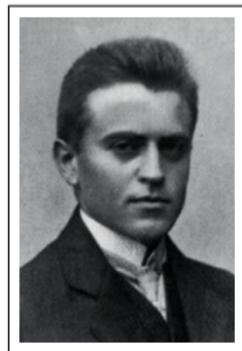
pour $x_1 < x_2 < x_3$

Algorithmes de fraction continue

$$x \in [0, 1]^2$$

Approximation par des rationnels

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{1+1/2}}$$



Développement

$$x \rightarrow \sigma_1^{a_1} \sigma_2^{a_2} \sigma_1^{a_3} \dots$$

$$\frac{p_n}{q_n} := \frac{1}{a_1 + \cfrac{\cdot\cdot\cdot}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Algorithme

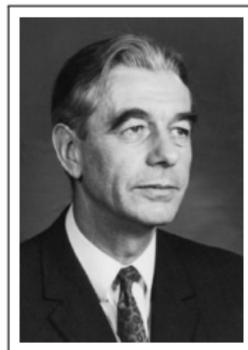
$$T : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2) \\ (x_1, x_2, x_3 - x_2) \\ \text{pour } x_1 < x_2 < x_3$$

Algorithmes de fraction continue

$$x \in [0, 1]^2$$

Approximation par des rationnels

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{1+1/2}}$$



Développement

$$x \rightarrow \sigma_1^{a_1} \sigma_2^{a_2} \sigma_1^{a_3} \dots$$

$$\frac{p_n}{q_n} := \frac{1}{a_1 + \cfrac{\dots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Algorithme

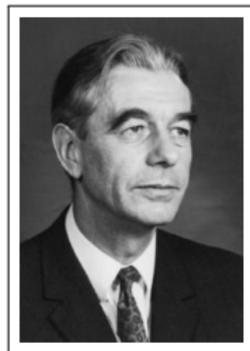
$$\begin{aligned} T : (x_1, x_2, x_3) &\rightarrow (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2) \\ &\quad (x_1, x_2, x_3 - x_2) \\ &\quad (x_1, x_2, x_3 - x_1) \\ &\text{pour } x_1 < x_2 < x_3 \end{aligned}$$

Algorithmes de fraction continue

$$x \in [0, 1]^2$$

Approximation par des rationnels

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{1+1/2}}$$



Développement

$$x \rightarrow \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots$$

$$\frac{p_n}{q_n} := \frac{1}{a_1 + \frac{\dots}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}$$

Algorithme

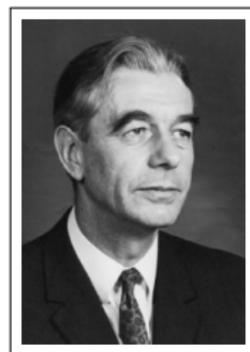
$$\begin{aligned} T : (x_1, x_2, x_3) &\rightarrow (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2) \\ &\quad (x_1, x_2, x_3 - x_2) \\ &\quad (x_1, x_2, x_3 - x_1) \\ &\text{pour } x_1 < x_2 < x_3 \end{aligned}$$

Algorithmes de fraction continue

$$x \in [0, 1]^2$$

Approximation par des rationnels

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{1+1/2}}$$



Développement

$$x \rightarrow \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots$$

$$\blacktriangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} \stackrel{?}{=} x$$

Algorithme

$$T : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2)$$

$$(x_1, x_2, x_3 - x_2)$$

$$(x_1, x_2, x_3 - x_1)$$

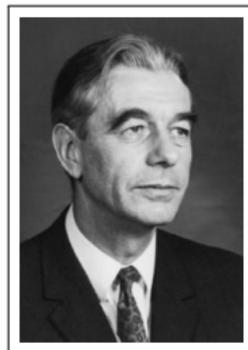
pour $x_1 < x_2 < x_3$

Algorithmes de fraction continue

$$x \in [0, 1]^2$$

Approximation par des rationnels

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{1+1/2}}$$



Développement

$$x \rightarrow \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots$$

- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} \stackrel{?}{=} x$
- ▶ Ergodicité de T

Algorithme

$$\begin{aligned} T : (x_1, x_2, x_3) &\rightarrow (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2) \\ &\quad (x_1, x_2, x_3 - x_2) \\ &\quad (x_1, x_2, x_3 - x_1) \\ &\text{pour } x_1 < x_2 < x_3 \end{aligned}$$

Algorithmes de fraction continue

Poincaré

$$T(x) = (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2)$$

pour $x_1 < x_2 < x_3$

Brun

$$T(x) = (x_1, x_2, x_3 - x_2)$$

pour $x_1 < x_2 < x_3$

Selmer

$$T(x) = (x_1, x_2, x_3 - x_1)$$

pour $x_1 < x_2 < x_3$

Algorithmes de fraction continue

Poincaré

Théorème (Nogueira 1995)

Pour presque tout x , les approximations ne convergent pas vers x .

Brun

$$T(x) = (x_1, x_2, x_3 - x_2)$$

pour $x_1 < x_2 < x_3$

Selmer

$$T(x) = (x_1, x_2, x_3 - x_1)$$

pour $x_1 < x_2 < x_3$

Algorithmes de fraction continue

Poincaré

Théorème (Nogueira 1995)

Pour presque tout x , les approximations ne convergent pas vers x .

Selmer

Théorème (Schweiger 2000)

L'algorithme converge et l'application T est ergodique.

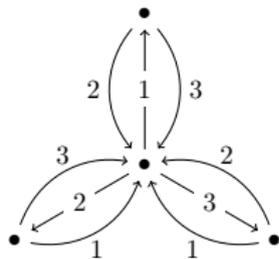
Brun

Théorème (Broise 1994)

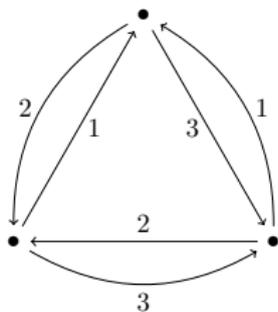
L'algorithme converge et l'application T est ergodique.

Algorithmes de fraction continue

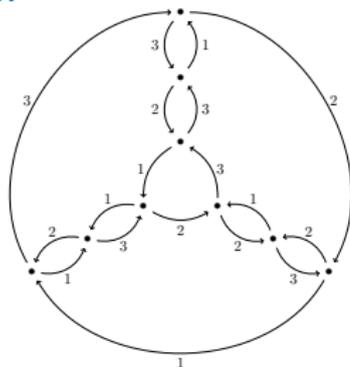
Poincaré



Selmer

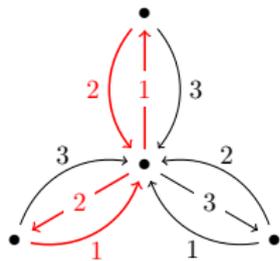


Brun

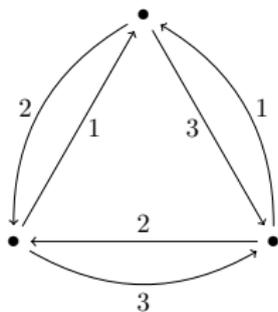


Algorithmes de fraction continue

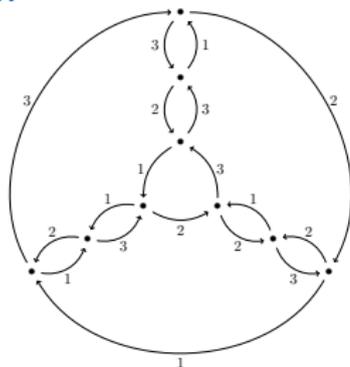
Poincaré



Selmer



Brun



Critère d'ergodicité

Théorème (F.)

Si un algorithme n'a pas de sous-graphe stable, il est ergodique et sa suspension canonique admet une unique mesure invariante d'entropie maximale.

Critère d'ergodicité

Théorème (F.)

Si un algorithme n'a pas de sous-graphe stable, il est ergodique et sa suspension canonique admet une unique mesure invariante d'entropie maximale.

Applications

- ▶ Dimensions fractales



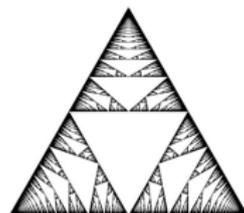
Critère d'ergodicité

Théorème (F.)

Si un algorithme n'a pas de sous-graphe stable, il est ergodique et sa suspension canonique admet une unique mesure invariante d'entropie maximale.

Applications

- ▶ Dimensions fractales
- ▶ Dynamique de Teichmüller

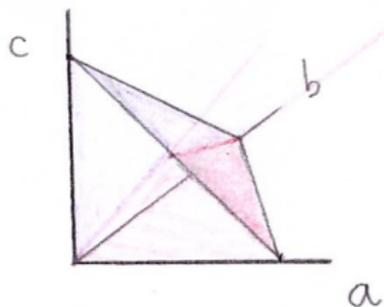


Algorithme de Farey

Du simplexe au système simplicial

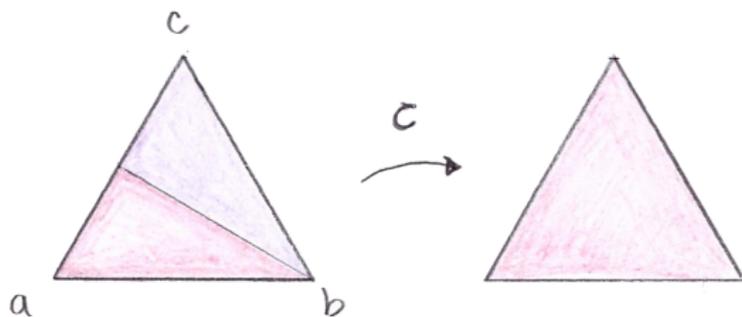
Opérations élémentaires

$$T : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^3 \text{ et } T(x_a, x_b, x_c) = \begin{cases} (x_a - x_c, x_b, x_c) & \text{si } x_a > x_c \\ (x_a, x_b, x_c - x_a) & \text{si } x_c > x_a \end{cases}$$



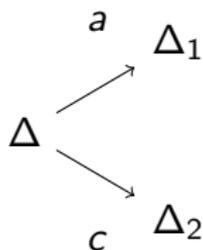
Opérations élémentaires

$$T : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^3 \text{ et } T(x_a, x_b, x_c) = \begin{cases} (x_a - x_c, x_b, x_c) & \text{si } x_a > x_c \\ (x_a, x_b, x_c - x_a) & \text{si } x_c > x_a \end{cases}$$



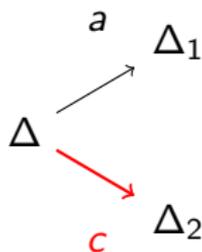
Opérations élémentaires

$$T : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^3 \text{ et } T(x_a, x_b, x_c) = \begin{cases} (x_a - x_c, x_b, x_c) & \text{si } x_a > x_c \\ (x_a, x_b, x_c - x_a) & \text{si } x_c > x_a \end{cases}$$



Opérations élémentaires

$$T : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^3 \text{ et } T(x_a, x_b, x_c) = \begin{cases} (x_a - x_c, x_b, x_c) & \text{si } x_a > x_c \\ (x_a, x_b, x_c - x_a) & \text{si } x_c > x_a \end{cases}$$

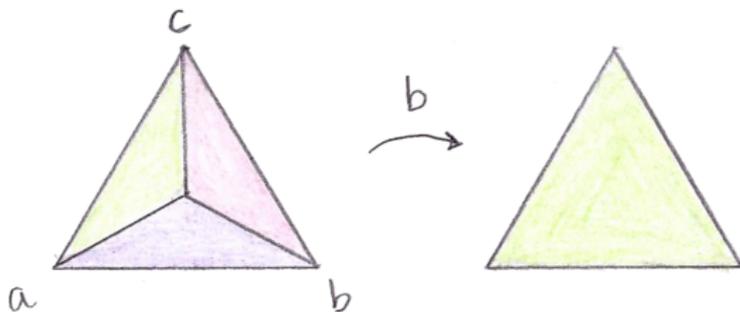


$$x_c < x_a$$

On dit que c **perd** et a **gagne**

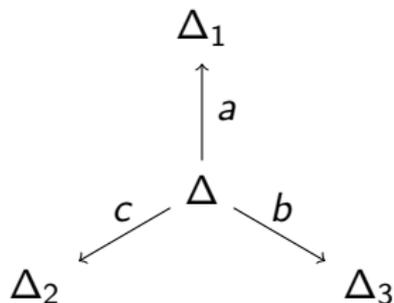
Opérations élémentaires

$$T(x_a, x_b, x_c) = \begin{cases} (x_a - x_c, x_b - x_c, x_c) & \text{si } \min(x_a, x_b) > x_c \\ (x_a - x_b, x_b, x_c - x_b) & \text{si } \min(x_a, x_c) > x_b \\ (x_a, x_b - x_a, x_c - x_a) & \text{si } \min(x_b, x_c) > x_a \end{cases}$$



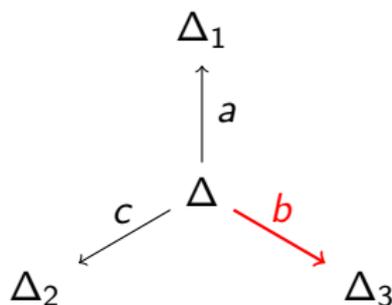
Opérations élémentaires

$$T(x_a, x_b, x_c) = \begin{cases} (x_a - x_c, x_b - x_c, x_c) & \text{si } \min(x_a, x_b) > x_c \\ (x_a - x_b, x_b, x_c - x_b) & \text{si } \min(x_a, x_c) > x_b \\ (x_a, x_b - x_a, x_c - x_a) & \text{si } \min(x_b, x_c) > x_a \end{cases}$$



Opérations élémentaires

$$T(x_a, x_b, x_c) = \begin{cases} (x_a - x_c, x_b - x_c, x_c) & \text{si } \min(x_a, x_b) > x_c \\ (x_a - x_b, x_b, x_c - x_b) & \text{si } \min(x_a, x_c) > x_b \\ (x_a, x_b - x_a, x_c - x_a) & \text{si } \min(x_b, x_c) > x_a \end{cases}$$



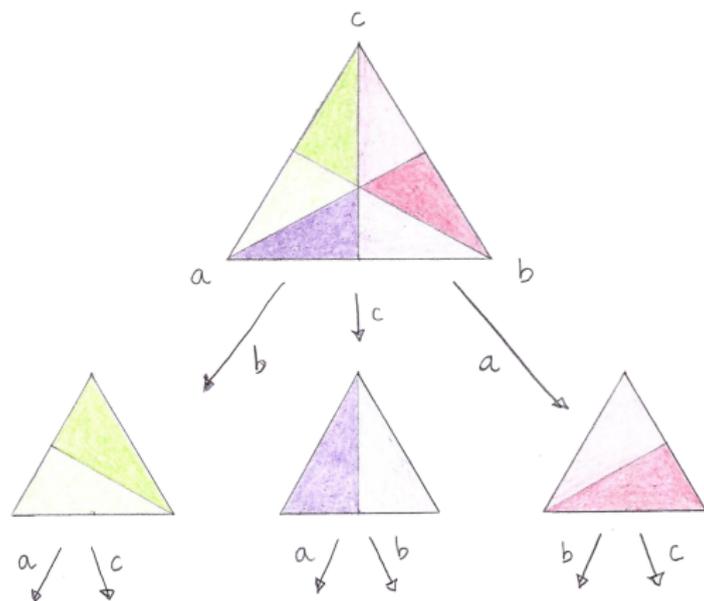
$$x_b < x_a, x_c$$

On dit que b **perd** et a, c **gagnent**

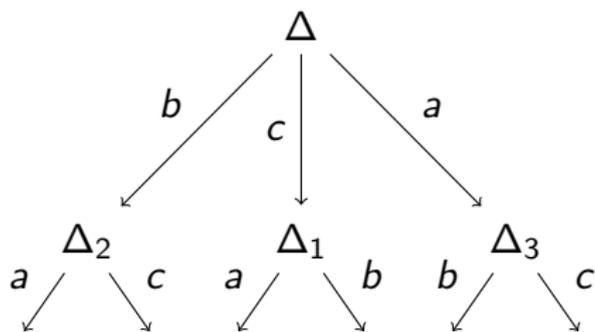
Algorithme de Poincaré

$$T(x_a, x_b, x_c) = \begin{cases} (x_a, x_b - x_a, x_c - x_b) & \text{si } x_a < x_b < x_c \\ (x_a, x_b - x_c, x_c - x_a) & \text{si } x_a < x_c < x_b \\ (x_a - x_c, x_b, x_c - x_b) & \text{si } x_b < x_c < x_a \\ \dots & \dots \end{cases}$$

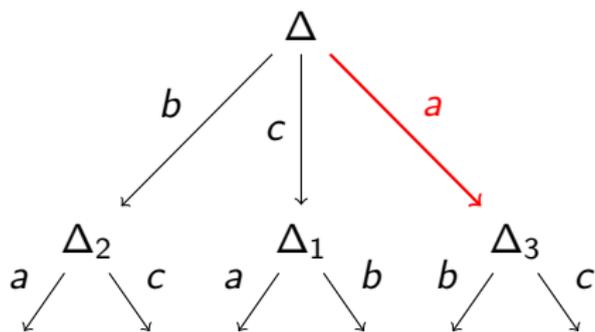
Algorithme de Poincaré



Algorithme de Poincaré

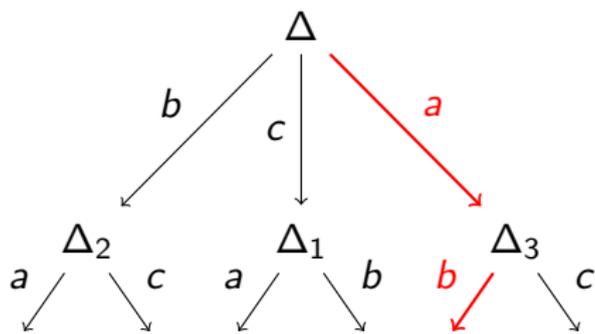


Algorithme de Poincaré



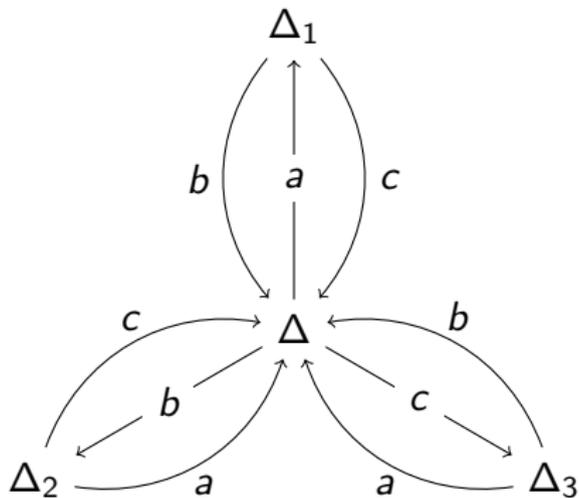
$$x_a < x_b, x_c$$

Algorithme de Poincaré



$$x_a < x_b < x_c$$

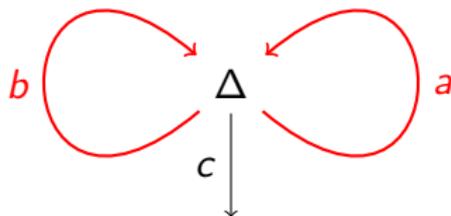
Algorithme de Poincaré



Comportement des marches aléatoires

Stabilité des sous graphes

Supposons $q_a, q_b \gg q_c$



Considérons le temps d'arrêt \mathcal{L}_c correspondant à la longueur du chemin avant que c ne soit empruntée, on dit que c *perd*.

Lemme

Pour tout $q \in \mathbb{R}_+^3$

$$\mathbb{P}_q(\mathcal{L}_c < \infty) \leq \frac{Kq_c}{\min(q_a, q_b)}.$$

Critère d'ergodicité

Théorème

*Une système simplicial sans sous-graphes stables admet une unique mesure **ergodique** absolument continue par rapport à Lebesgue et cette mesure induit l'**unique mesure d'entropie maximale** sur la suspension canonique.*

Merci de votre attention !

