

ORBITES PÉRIODIQUES POUR L'APPLICATION DE GAUSS ET LA β -TRANSFORMATION

7 décembre 2018

Résumé

Il s'agit, en utilisant des théorèmes d'équidistribution des orbites périodiques de certains flots suspendus, de retrouver les estimées en moyenne pour des coûts pour la transformation de Gauss, et d'avoir le même genre d'estimée pour un β -shift, et d'en déduire que les orbites périodiques, en moyenne, se comportent comme les orbites génériques.

1 Les β -shift, propriétés ergodiques

Pour cette section, on pourra se référer à [Flatto et al. \[1994\]](#).

$$\begin{array}{ccc} T_\beta : & [0, 1] & \rightarrow [0, 1] \\ & x & \mapsto \{\beta x\} \end{array}$$

On note $(d_i)_{i \geq 0}$ le codage de l'orbite de 1.

On se restreint ici au cas où l'orbite de 1 est "finie" (elle atteint 0 en un nombre fini d'itérations), c'est le cas où β est un *nombre de Parry* (appelé par Parry *simple β number* dans [Parry \[1960\]](#)).

Il y a équivalence entre :

- l'orbite de 1 est finie (de codage $d_0, \dots, d_n$),
- $\beta^{n+1} = d_0\beta^n + \dots + d_0$,
- T_β est un sous shift de type fini,
- une puissance de T_β est Markov (au sens des systèmes dynamiques de l'intervalle).

Il existe une unique mesure μ_β invariante absolument continue par rapport à Lebesgue.

(T_β, μ_β) est ergodique [Rényi \[1957\]](#).

L'entropie topologique de T_β vaut $\log \beta$.

μ_β est l'unique mesure d'entropie maximale [Hofbauer \[1978\]](#).

Fonctions zeta dynamiques :

- Artin-Mazur : $\zeta(z, f) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \sum_{x, T_\beta^n x = x} 1 \right)$
- Bowen.. : $\zeta(z, f) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \sum_{x, T_\beta^n x = x} \left| \prod_{i=1}^n T'_\beta(T_\beta^i(x)) \right|^{-s} \right)$

— Ruelle : $\zeta(z, f) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \sum_{x, T_{\beta}^n x = x} e^{f(x) + f(T_{\beta} x) + \dots + f(T_{\beta}^{n-1} x)} \right)$

Pour une β -transformation, $\zeta(z, s) = \zeta(z\beta^{-s}, 0)$.

Théorème 1 (Flatto, Lagarias, Poonen). *Les propriétés de $\zeta(z) = \zeta(z, 0)$ sont les suivantes :*

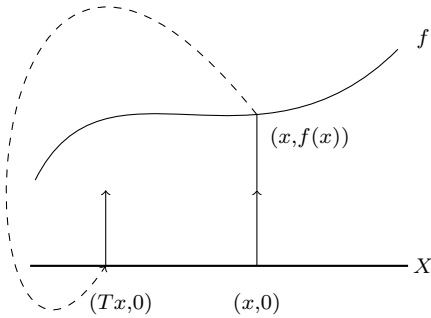
1. Si β est un nombre de Parry et N est le plus petit entier tel que $T_{\beta}^N(1) = 0$,

$$\zeta(z) = \frac{1 - z^N}{(1 - \beta z) \left(\sum_{n=0}^{\infty} T_{\beta}^n(1) z^n \right)}.$$

Sinon, pas de partie en z^N .

2. ζ est méromorphe dans $\{|z| < 1\}$, holomorphe dans $\left\{|z| < \frac{1}{\beta}\right\}$, a un pôle simple en $\frac{1}{\beta}$ et n'a pas d'autre singularité sur le cercle de ce module.
3. Si $T_{\beta}^n(1)$ est ultimement périodique, alors ζ est rationnelle et admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$. Sinon, le cercle unité est frontière naturelle au prolongement analytique.
4. Si $\hat{\zeta}(z)$ est la fonction zeta du codé (shift) alors $\zeta(z) = (1 - z^N)\hat{\zeta}(z)$ si simple β -number, $\zeta = \hat{\zeta}$ sinon.

2 Flot suspendu au dessus d'un sous-shift de type fini



La base : $T : X \rightarrow X$.

La fonction toit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

L'espace où est défini le flot :

$$X_f = \{(x, u) \in X \times \mathbb{R}, 0 \leq u \leq f(x)\} / (x, f(x)) \sim (Tx, 0).$$

Le flot $\sigma^f : \sigma_t^f(x, u) = (x, u + t)$ avec l'identification $(x, f(x)) = (Tx, 0)$.

Mesures invariante μ_f par le flot σ^f : en correspondance avec les mesures invariantes μ pour $T : X \rightarrow X$. Soit $F : X_f \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\int F d\mu_f = \frac{\int \left(\int_0^{f(x)} F(x, u) du \right) d\mu}{\int f d\mu} \quad \text{en abrégé} \quad \mu_f = \frac{\mu \times \text{leb}}{\int f d\mu}$$

L'entropie du flot : $h(\sigma^f, \mu_f) = h(\sigma_1^f, \mu_f)$ (entropie du "temps 1" du flot).

Formule d'Abramov : μ mesure invariante pour T associée à la mesure invariante μ_f .

$$h(\sigma^f, \mu_f) = \frac{h(T, \mu)}{\int f d\mu}.$$

Entropie topologique du flot : $h(\sigma^f) = \sup_{\mu_f \text{ inv}} h(\sigma^f, \mu_f)$.

Mesure d'entropie maximale : ν_f telle que $h(\sigma^f, \nu_f) = h(\sigma^f)$.

Si ν est la mesure d'entropie maximale pour T , lorsque f est Hölder, $h_f = \frac{h}{\int f d\nu}$ et $\nu_f = \frac{\nu \times \text{leb}}{\int f d\nu}$.

Les orbites périodiques du flot Elles sont en bijection avec les orbites périodiques de l'application T . A toute orbite σ^f -périodique τ est associée une orbite T -périodique γ . On note $\lambda(\tau)$ la longueur de l'orbite σ^f -périodique τ et $P(\gamma)$ la période de l'orbite T -périodique γ (on peut aussi noter $P(x) = P(\gamma)$ la période de tout point $x \in \gamma$). Si $(x, 0) \in \tau$ avec $x \in \gamma$, alors $\lambda(\tau) = f(x) + f(Tx) + \dots + f(T^{P(\gamma)-1}x)$. Si $K : X_f \rightarrow \mathbb{R}$, on note $\lambda_K(\tau)$ l'intégrale de K autour de l'orbite périodique τ . En notant $k(x) = \int_0^{f(x)} K(x, u) du$, il vient $\lambda_K(\tau) = k(x) + k(Tx) + \dots + k(T^{P(\gamma)-1}x)$.

Théorème 2 (prime orbit theorem, Parry [1984]). *Si (σ^f, μ_f) est faiblement mélangeant, alors*

$$\#\{\tau, \lambda(\tau) \leq N\} \sim \frac{e^{h(\sigma_f)N}}{h(\sigma_f)N}.$$

Théorème 3 (Dirichlet density theorem, Parry [1984]). *Si (σ^f, μ_f) est faiblement mélangeant, alors*

$$\sum_{\tau, \lambda(\tau) \leq N} \lambda_K(\tau) \sim \frac{e^{h(\sigma_f)N}}{h(\sigma_f)N} \int K d\nu_f.$$

Si le flot (σ^f, μ_f) n'est pas faiblement mélangeant, alors il existe $g : X_f \rightarrow \mathbb{C}$ non constante (et s'il en existe une, il en existe une continue) et $a > 0$ tels que $g(\sigma_t^f) = e^{iat}g$. Notons a la plus petite valeur positive qui vérifie ce qui précède (l'ensemble de ces valeurs est discret, $a > 0$).

Théorème 4 (prime orbit theorem, Parry [1984]). *Si (σ^f, μ_f) n'est pas faiblement mélangeant, alors*

$$\#\{\tau, \lambda(\tau) \leq N\} \sim \frac{2\pi}{aN} \sum_{\frac{2\pi n}{a} \leq N} e^{\frac{2\pi n}{a} h(\sigma^f)}.$$

Théorème 5 (Dirichlet density theorem, Parry [1984]). *Si (σ^f, μ_f) n'est pas faiblement mélangeant, alors*

$$\sum_{\tau, \lambda(\tau) \leq N} \lambda_K(\tau) \sim \left(\frac{2\pi}{a} \sum_{\frac{2\pi n}{a} \leq N} e^{\frac{2\pi n}{a} h(\sigma^f)} \right) \int K d\nu_f.$$

3 Pour l'application de Gauss

Les $x \in [0, 1]$ dont l'orbite γ est périodique sont les irrationnels quadratiques. Une notion naturelle de taille $\epsilon(x)$ existe pour un irrationnel quadratique x de période $P(x)$. Par simplification (en cachant sous le tapis le problème des périodes paires ou impaires), nous choisissons de définir

$$\epsilon(x) = |T'(x)T'(Tx) \dots T'(T^{P(x)-1}x)|^{\frac{1}{2}}.$$

La taille ne dépend que de l'orbite périodique γ pour T et pas de $x \in \gamma$. Il est commode, si on veut utiliser les résultats de la section 2, de relier la taille $\epsilon(x)$ d'un x périodique de période $P(x)$ et la longueur d'une orbite périodique τ pour le flot, qui passe par $(x, 0)$.

Le choix de $f(x) = \frac{1}{2} \log |T'(x)|$ entraîne $\log \epsilon(x) = \lambda(\tau)$.

La mesure de Gauss est l'unique mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, qui est aussi la mesure d'entropie maximale $\mu = \nu$ et, d'après la formule de Rokhlin (voir par exemple Coudène [2012] page 132), $\int f d\mu = \int f d\nu = \frac{h}{2}$ et donc $h_f = 2$.

Mélange faible : Le flot suspendu σ^f est faiblement mélangeant. Pour montrer qu'il n'existe pas de valeur propre non nulle, trouver deux orbites périodiques pour le flot, dont les périodes sont rationnellement indépendantes, devrait suffire en faisant un raisonnement voisin de celui qui est fait plus bas pour la β -transformation.

Compter les irrationnels quadratiques : Le but est de compter les irrationnels quadratiques (on note leur ensemble $\mathcal{P}$) dont la taille est inférieure à N , ou de sommer un coût sur des irrationnels quadratiques de taille inférieure à N .

Attention, les résultats de la section 2 permettent de compter les orbites τ périodiques pour le flot ou encore les orbites γ périodiques pour T . Si γ passe par un irrationnel quadratique $x \in [0, 1]$, elle contient aussi les irrationnels quadratiques $Tx, \dots, T^{P(\gamma)-1}x$. Compter tous les irrationnels quadratiques qui appartiennent à γ revient donc à compter $P(\gamma)$ fois l'orbite périodique τ du flot.

A chaque orbite périodique τ pour le flot σ^f est associée une orbite périodique γ pour T . on note $\lambda(\tau)$ la taille de τ , $\epsilon(\gamma)$ la taille de γ (qui ne dépend pas de $x \in \gamma$) et $P(\gamma)$ la période de γ (qui ne dépend pas de $x \in \gamma$). Alors $\lambda(\tau) = \log \epsilon(\gamma)$ et si on choisit K telle que $k \equiv 1$, alors $\lambda_K(\tau) = P(\gamma)$ et

$$\mathcal{X}_N = \{x \in \mathcal{P}, \epsilon(x) \leq N\} = \bigcup_{\gamma, \epsilon(\gamma) \leq N} \{x \in \gamma\}.$$

$$\#\mathcal{X}_N = \sum_{\gamma, \epsilon(\gamma) \leq N} P(\gamma) = \sum_{\tau, \lambda(\tau) \leq \log N} \lambda_K(\tau).$$

L'intégrale de K contre la mesure d'entropie maximale de flot vaut

$$\int K d\nu_f = \frac{\int k d\nu}{\int f d\nu} = \frac{2}{h}.$$

En utilisant le théorème 3, on obtient :

$$\#\mathcal{X}_N \sim \frac{N^2}{h}$$

Sommer les coûts des irrationnels quadratiques : On a maintenant un coût $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$. Pour un irrationnel quadratique x , associé à une orbite périodique γ , on appelle $C(x) = c(x) + c(Tx) + \dots + c(T^{P(\gamma)-1}x)$ la somme des coûts le long de l'orbite périodique issue de x . On pourrait le noter $C(\gamma)$ puisqu'il ne dépend pas de $x \in \gamma$. Le but est d'avoir une estimation de

$$\sum_{x \in \mathcal{X}_N} C(x) \text{ et } \mathbb{E}_N(C) = \frac{1}{\#\mathcal{X}_N} \sum_{x \in \mathcal{X}_N} C(x)$$

et

$$\sum_{x \in \mathcal{X}_N} P(x) \text{ et } \mathbb{E}_N(P) = \frac{1}{\#\mathcal{X}_N} \sum_{x \in \mathcal{X}_N} P(x).$$

Mais

$$\sum_{x \in \mathcal{X}_N} C(x) = \sum_{\gamma, \epsilon(\gamma) \leq N} C(\gamma) \# \{x \in \gamma\} = \sum_{\gamma, \epsilon(\gamma) \leq N} C(\gamma) P(\gamma)$$

et de même

$$\sum_{x \in \mathcal{X}_N} P(x) = \sum_{\gamma, \epsilon(\gamma) \leq N} P(\gamma)^2.$$

... et pour l'instant, je ne vois pas comment obtenir des estimations en utilisant directement le théorème 3...

4 Pour le β -shift

Les $x \in [0, 1]$ dont le développement en base β est périodique sont les éléments de $\mathbb{Q}(\beta)$ si β est un nombre de Pisot (c'est prouvé) et peut-être si β est un nombre de Salem (c'est conjecturé), voir [Dajani and Kraaikamp \[2002\]](#) page 55. Une notion naturelle de taille pour un tel x de période $P(x)$ semble être $\beta^{P(x)}$, ce qui pousse à choisir $f(x) = \log \beta$.

Mélange faible : Le flot suspendu correspondant (σ_f, μ_f) n'est pas faiblement mélangeant. La fonction $g(x, t) = \exp(\frac{2i\pi}{\log \beta} t)$ est une fonction propre associée à la valeur propre $a = \frac{2\pi}{\log \beta}$. En fait, les

seules valeurs propres sont les $\left\{ \frac{2k\pi}{\log \beta}, k \in \mathbb{Z} \right\}$. En effet, si $g : X_f \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction propre associée

à la valeur propre a , alors pour $t \leq \log \beta : g(x, t) = e^{iat} g(x, 0)$, donc $|g(x, t)| = |g(x, 0)|$. Le module de g est donc constant sur les verticales. De plus, $|g(x, \log \beta)| = |g(x, 0)| = |g(T_\beta x, 0)| = |g(T_\beta^n x, 0)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En choisissant une orbite dense pour T_β (ça existe), comme on peut choisir g continue, on obtient que $|g(x, 0)|$ est constant en x , bref, que $|g|$ est constant, par exemple égal à 1.

Si on note maintenant θ l'argument de g , on a $\theta(x, t) = \theta(x, 0) + at \ [2\pi]$ pour $t \leq \log \beta$. Pour $t = \log \beta$, l'égalité devient $\theta(x, \log \beta) = \theta(x, 0) + a \log \beta = \theta(T_\beta x, 0) \ [2\pi]$. En choisissant x point fixe de T_β , on obtient $a = \frac{2k\pi}{\log \beta}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

La plus petite valeur propre positive est donc $a = \frac{2\pi}{\log \beta}$.

Compter les points périodiques : Comme pour Gauss, on choisit K tel que $k \equiv 1$ et

$$\#\mathcal{X}_N = \sum_{\tau, \lambda(\tau) \leq \log N} \lambda_K(\tau).$$

Bien sûr, $\int f \mu = \int f d\nu = \log \beta = h$ et donc $h_f = 1$, de plus, $\int K d\nu_f = \frac{1}{\log \beta}$. En utilisant le théorème 5, on a donc :

$$\#\mathcal{X}_N \sim \sum_{n \leq \frac{\log N}{\log \beta}} e^{n \log \beta} \sim \frac{N}{1 - \frac{1}{\beta}}.$$

Sommer les coûts : Comme pour Gauss, il faut trouver une autre idée..

Références

- Y. Coudène. *Théorie ergodique et systèmes dynamiques*. Savoirs Actuels (Les Ulis). [Current Scholarship (Les Ulis)]. EDP Sciences, Les Ulis; CNRS Éditions, Paris, 2012. ISBN 978-2-7598-0760-4; 978-2-271-07603-8. [3](#)
- K. Dajani and C. Kraaikamp. *Ergodic theory of numbers*, volume 29 of *Carus Mathematical Monographs*. Mathematical Association of America, Washington, DC, 2002. [4](#)
- L. Flatto, J.C. Lagarias, and B. Poonen. The zeta function of the beta transformation. *Ergod. Th. Dynam. Syst.*, 14 :237–266, 1994. [1](#)
- F. Hofbauer. β -shifts have unique maximal measure. *Monatsh. Math.*, 85(3) :189–198, 1978. [1](#)
- W. Parry. On the β -expansions of real numbers. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 11 :401–416, 1960. [1](#)
- W. Parry. Bowen’s equidistribution theory and the dirichlet density theorem. *Ergod. Th. Dynam. Syst.*, 4 :117–134, 1984. [2](#), [3](#), [4](#), [5](#)
- A. Rényi. Representations for real numbers and their ergodic properties. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 8 :477–493, 1957. [1](#)