

## Examen de mi-session #2

**Professeur :** Joachim de Lataillade

*Ce test comporte 6 pages et est noté sur 100 points. C'est un examen à livre fermé, pour lequel l'usage d'une calculatrice (non programmable) est autorisé.*

*Écrivez des réponses claires et complètes.*

*Durée de l'examen : 80 minutes.*

### Exercice 1 : 17 points

- (5 points)** Calculer la dérivée de  $f(x) = 8x^2e^{x^3+2x+1}$  (il n'est pas nécessaire de simplifier l'expression obtenue).
  
- (5 points)** Calculer la dérivée de  $g(x) = \ln(x^4 + 1) + \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ .
  
- (7 points)** Calculer la fonction réciproque (aussi appelée fonction inverse)  $h^{-1}(x)$  de  $h(x) = e^{2x} - 4$ . En déduire la valeur de sa dérivée  $(h^{-1})'(x)$ .

**Exercice 2 : 17 points**

Soit  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ .

1. (4 points) Calculer  $f'(x)$  et  $f''(x)$ .
  
2. (4 points) Trouver les points critiques et les points d'inflexion de  $f$ , s'ils existent.
  
3. (4 points) Donner les intervalles où  $f$  est croissante, décroissante, concave ou convexe.
  
4. (5 points) On donne les valeurs suivantes :
$$f(-2) = 20 \quad f(-1/2) = 13/2 \quad f(0) = 0 \quad f(1) = -7$$
Étant donnés ces valeurs et les résultats des questions précédentes, tracer l'allure de la fonction  $f$  (il n'est pas nécessaire de donner un graphe très précis).

**Exercice 3 : 16 points**

1. **(5 points)** Laquelle de ces fonctions est négligeable par rapport à l'autre quand  $x$  tend vers  $+\infty$  :  $f_1(x) = 0.1x^{10}$  ou  $f_2(x) = 20 \ln(x)$  ? Justifiez votre réponse en calculant la limite du quotient  $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ .

2. **(5 points)** Laquelle de ces fonctions est négligeable par rapport à l'autre quand  $x$  tend vers  $+\infty$  :  $g_1(x) = 15e^{-x}$  ou  $g_2(x) = 0.1e^{-18x}$  ? Justifiez votre réponse en calculant la limite du quotient  $\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ .

3. **(6 points)** Trouver le comportement dominant en 0 et en  $+\infty$  de la fonction

$$f(x) = \frac{5}{x^2} + 20x^7 + 4e^{0.3x} + 2 \ln(4x).$$



**Exercice 5 : 20 points**

Considérons la fonction suivante :

$$f(x) = x^2 - 6x + 12 \ln(x + 2) \quad \text{avec } -1 \leq x \leq 3/2$$

1. **(4 points)** Calculer la dérivée  $f'(x)$ , et l'écrire sous forme d'un quotient  $f'(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ .

2. **(8 points)** Trouver les points critiques de  $f$ , et pour chacun d'entre eux indiquer s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local.

3. **(8 points)** Trouver le maximum global et le minimum global de  $f(x)$  pour  $-1 \leq x \leq 3/2$ .

**Exercice 6 : 14 points**

Calculer le polynôme de Taylor de degré  $n$  de  $f$  autour de  $x_0$  dans chacun des cas suivants (on rappelle que le polynôme de Taylor de degré 2 est aussi appelé approximation quadratique) :

1. **(7 points)**  $f(x) = e^{x^2}$      $n = 3$      $x_0 = 0$

2. **(7 points)**  $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$      $n = 2$      $x_0 = 0$