Exercices d'entraînement

Exercice 1 :

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$
- $g(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$
- $h(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$
- $i(x) = e^{\sqrt{x+3}}$
- $j(x) = x^2 \cos(x^3 + 2x^2)$
- $k(x) = \ln(\cos(x^2) + 1)$

Exercice 2 :

Calculer les limites suivantes, si elles existent :

- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x + 3}{\cos^2 x}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{x^2}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(\dfrac{1}{x})$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{1}{x} + 10 + e^{-4x^2})$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{\sin(\pi x)}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + \frac{1}{x}}{x^2}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x \cos x$

Exercice 3 :

Calculer les intégrales suivantes :

- $I_1(x) = \displaystyle\int (\sqrt[3]{x} + x^2 - \frac{1}{x^2})\ \mathrm{d}x$
- $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} (e^{2x} + \cos(3x))\ \mathrm{d}x$ *par substitution*
- $I_3(t) = \displaystyle\int [A + B\cos(\frac{2\pi}{T}(t - \phi))]\ \mathrm{d}t$ *par substitution* (A, B, T, ϕ sont des constantes)
- $I_4(x) = \displaystyle\int (\cos x)\sqrt{\sin x}\ \mathrm{d}x$ *par substitution*
- $I_5(x) = \displaystyle\int x\ (\sqrt{x} + e^x)\ \mathrm{d}x$ *par intégration par parties*

Correction des exercices

Correction exercice 1 :

- $f'(x) = \dfrac{\frac{x^2}{x} - 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{1-2\ln x}{x^3}$
- $g'(x) = \dfrac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
- $h'(x) = \dfrac{x-2-(x+3)}{(x-2)^2} \times \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{x+3}{x-2}}} = -\dfrac{5}{2(x-2)^2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$
- $i'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}} e^{\sqrt{x+3}}$
- $j'(x) = 2x\cos(x^3+2x^2) + x^2(3x^2+4x)(-\sin(x^3+2x^2))$

  $= 2x\cos(x^3+2x^2) - (3x^4+4x^3)\sin(x^3+2x^2)$
- $k'(x) = -\dfrac{2x\sin(x^2)}{\cos(x^2)+1}$

Correction exercice 2 :

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x + 3}{\cos^2 x} = \dfrac{3}{\cos^2 1}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x^2} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to +\infty} (-\ln x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} (\dfrac{1}{x} + 10 + e^{-4x^2}) = 10$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\sin(\pi x)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{\pi\cos(\pi x)} = -\dfrac{1}{\pi}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\frac{1}{x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}}{2x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x \cos x$ n'existe pas car $\cos x$ prend des valeurs parfois négatives, parfois positives et parfois nulles lorsque x tend vers l'infini.

Correction exercice 3 :

- $I_1(x) = \dfrac{3}{4}x^{4/3} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{x} + c$
- $I_2 = \displaystyle\int_0^\pi e^{2x}\ \mathrm{d}x + \int_0^\pi \cos(3x)\ \mathrm{d}x$

  En posant $u = 2x$ et $v = 3x$ on obtient :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} e^u \ \mathrm{d}u + \int_0^{3\pi} \frac{1}{3} \cos v \ \mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2}[e^u]_0^{2\pi} + \frac{1}{3}[\sin v]_0^{3\pi} \\ &= \frac{1}{2}e^{2\pi} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Remarque : On pouvait aussi trouver la primitive directement, sans passer par une substitution.

– $I_3(t) = \displaystyle\int A \ \mathrm{d}t + B \int \cos(\frac{2\pi}{T}(t-\phi)) \ \mathrm{d}t$

En posant $u = \frac{2\pi}{T}(t-\phi)$ on obtient :

$$\begin{aligned} I_3(t) &= At + B \int \frac{T}{2\pi} \cos u \ \mathrm{d}u \\ &= At + \frac{BT}{2\pi} \sin u + c \\ &= At + \frac{BT}{2\pi} \sin(\frac{2\pi}{T}(t-\phi)) + c \end{aligned}$$

– $I_4(x) = \displaystyle\int (\cos x)\sqrt{\sin x} \ \mathrm{d}x$

En posant $u = \sin x$ on obtient :

$$\begin{aligned} I_4(x) &= \int \sqrt{u} \ \mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{3}u^{3/2} + c \\ &= \frac{2}{3}(\sin x)^{3/2} + c \end{aligned}$$

– $I_5(x) = \displaystyle\int x \ (\sqrt{x} + e^x) \ \mathrm{d}x$

En posant $f(x) = x$ et $g'(x) = \sqrt{x} + e^x$ on obtient :

$$\begin{aligned} I_5(x) &= x(\frac{2}{3}x^{3/2} + e^x) - \int (\frac{2}{3}x^{3/2} + e^x) \ \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}x^{5/2} + xe^x - \frac{4}{15}x^{5/2} - e^x + c \\ &= \frac{2}{5}x^{5/2} + (x-1)e^x + c \end{aligned}$$