Ex 1 (55 points)

1) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2) $P_T(\lambda) = \det(T - \lambda I)$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left((1-\lambda)(4-\lambda)+2\right)$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

$$= -(\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

Donc les valeurs propres de T ~~sont~~ 2 (de multiplicité 2) et 3 (de multiplicité 1).

Pour savoir si T est diagonalisable, il suffit de trouver le sous-espace propre associé à 2 :

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x + y = 2x \\ y - z = 2y \\ 2y + 4z = 2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

donc le sous-espace propre associé à 2 est $\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

donc T n'est pas diagonalisable.

3) On sait que $P_T^{min} \mid P_T$ et que P_T et P_T^{min} ont les mêmes racines

donc $P_T^{min} \in \{(X-2)^2(X-3), (X-2)(X-3)\}$

Mais si $P_T^{min} = (X-2)(X-3)$ alors T est diagonalisable

d'où $P_T^{min} = (X-2)^2(X-3)$

4) On a trouvé un vecteur propre $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ associé à 2, on cherche un vecteur propre e_2 associé à 3 :

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x + y = 3x \\ y - z = 3y \\ 2y + 4z = 3z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ z = -2y \end{cases}$$

On pose donc $e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

Il nous reste à compléter $\{e_1, e_2\}$ en une base de $\mathbb{R}^3$:

on choisit $e_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et on a $Te_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = 2e_1 + 2e_3 - e_2$

Donc, dans la base $\mathcal{B}' = \{e_1, e_2, e_3\}$, la matrice de T est :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Ex 2</u> (20 points)

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} p(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)) &= p(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_2, 0) \\ &= \lambda p(x_1, x_2) + \mu p(y_1, y_2) \end{aligned}$$

donc p est linéaire

$p^2(x, y) = p(p(x, y)) = p(x, 0) = (x, 0)$

donc $p^2 = p$, d'où p annulle $X^2 - X = X(X-1)$

Or p n'annulle ni X ni $X-1$, donc le polynôme minimal de p est $X^2 - X$

<u>Note</u> : On pouvait aussi utiliser une représentation matricielle.

<u>Ex 3</u> (20 points)

$\varphi : V \to \mathbb{R}$ et $\forall f_1, f_2 \in V$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f_1 + \mu f_2) &= \int_a^b (\lambda f_1(x) + \mu f_2(x))\, dx \\ &= \lambda \int_a^b f_1(x)\, dx + \mu \int_a^b f_2(x)\, dx \\ &= \lambda \varphi(f_1) + \mu \varphi(f_2)\end{aligned}$$

d'où $\varphi \in V^*$

$$\begin{aligned}\forall f \in V,\quad D^*(\varphi)(f) &= (\varphi \circ D)(f) = \int_a^b (Df)(x)\, dx \\ &= \int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a)\end{aligned}$$

donc $D^*(\varphi) : V \longrightarrow \mathbb{R}$
$\qquad f \longmapsto f(b) - f(a)$

<u>Ex 4</u> (40 points)

1) <u>FAUX</u> : $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable mais ses valeurs propres sont toutes égales à 1
(si $n > 1$)

2) <u>FAUX</u> : si $I = \{ P \in \mathbb{K}[X] \ / \ P'(1) = 0 \}$,
$1 \in I$ et $X \in \mathbb{K}[X]$ mais $1 . X = X \notin I$

3) <u>VRAI</u> : $E^2 = E$ avec $\operatorname{Ker} E = W_2$ et $\operatorname{Im} E = W_1$

De plus, $\forall x \in W_1$, $x = E(y) = E^2(y) = E(x)$
donc $W_1 = \{ x \in V \ / \ E(x) = x \}$

$(I - E)^2 = I^2 - IE - EI + E^2 = I - E$ donc $I - E$ projection

$\operatorname{Ker}(I - E) = \{ x \in V \ / \ (I - E)(x) = 0 \} = \{ x \in V \ / \ E(x) = x \} = W_1$

$\mathrm{Im}(I - E) = \{x \in V \,/\, (I-E)(x) = x\} = \{x \in V \,/\, E(x) = 0\} = W_2$

donc $I - E$ est la projection sur W_2 suivant W_1

4) <u>FAUX</u> : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire et diagonalisable car elle a 3 valeurs propres distinctes : 1, 2 et 3

Pourtant, A n'est pas diagonale.

<u>Ex 4</u> (40 points)

1) $\Gamma(X) = \lambda X \iff -X + (\mathrm{tr}\, X) I = \lambda X$

$\iff (\lambda + 1) X = (\mathrm{tr}\, X) I$

Si <u>$\lambda = -1$</u> : $\Gamma(X) = \lambda X \iff (\mathrm{tr}\, X) I = 0$

$\iff \mathrm{tr}\, X = 0$

donc -1 est valeur propre de Γ, de sous-espace propre associé $W_1 = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$

Une base de W_1 est donné par les matrices $\{E_{ij}\}_{\substack{1 \le i,j \le n \\ (i,j) \neq (n,n)}}$ avec :

- si $i \neq j$, $E_{ij} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le l \le n}} = \begin{array}{c} \quad j \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} i \end{array}$

- si $i = j$, $E_{ii} = (\delta_{ik}\delta_{il} + (\delta_{nk}\delta_{nl}) \times (-1)) = \begin{array}{c} \quad i \\ \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} i \end{array}$

D'où $\dim W_1 = n^2 - 1$

<u>Note</u> : Intuitivement, l'idée est que l'on peut fixer tous les paramètres sauf un élément de la diagonale, qui doit assurer que la trace est bien nulle.

Si $\underline{\lambda \neq -1}$: $\Gamma(X) = \lambda X \iff X = \frac{\operatorname{tr} X}{\lambda+1} I$

$$\iff X = 0 \ \underline{\text{ou}} \ \begin{cases} X = \frac{\operatorname{tr} X}{\lambda+1} I \\ \operatorname{tr} X \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff X = 0 \ \underline{\text{ou}} \ \begin{cases} X = \frac{\operatorname{tr} X}{\lambda+1} I \\ \operatorname{tr} X \neq 0 \\ \operatorname{tr} X = \frac{\operatorname{tr} X}{\lambda+1} n \ (\text{car } \operatorname{tr} I = n) \end{cases}$$

$$\iff X = 0 \ \underline{\text{ou}} \ \begin{cases} X = \frac{\operatorname{tr} X}{\lambda+1} I \\ n = \lambda + 1 \\ \operatorname{tr} X \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff X = 0 \ \underline{\text{ou}} \ \begin{cases} X = \alpha I \\ \lambda = n - 1 \\ \alpha \neq 0 \end{cases}$$

donc $n-1$ est valeur propre de Γ, de sous-espace propre associé $W_2 = \operatorname{Vect}\{I\}$

D'où $\dim W_2 = 1$

2) Soit α_1 la multiplicité de la valeur propre -1

et α_2 la multiplicité de la valeur propre $n-1$

On sait que :
- $\alpha_1 + \alpha_2 = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $\alpha_1 \geq \dim W_1 = n^2 - 1$
- $\alpha_2 \geq \dim W_2 = 1$

D'où $\alpha_1 = \dim W_1 = n^2 - 1$ et $\alpha_2 = \dim W_2 = 1$

3) Les ordres de multiplicité sont égaux aux dimensions des sous-espace propres, donc Γ est diagonalisable.

Son polynôme minimal est donc $(X+1)(X-(n-1)) = P_\Gamma^{\min}$

4) $P_\Gamma^{min}(\Gamma) = (\Gamma + Id)(\Gamma - (n-1) Id) = 0$

donc $\Gamma^2 - (n-2)\Gamma - (n-1) Id = 0$ (avec $Id : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X \mapsto X$)

$$\begin{cases} \Gamma(\Gamma - (n-2) Id) \times \frac{1}{n-1} = Id \\ (\Gamma - (n-2) Id) \times \frac{1}{n-1} \Gamma = Id \end{cases}$$

d'où Γ est inversible et $\Gamma^{-1} = \frac{1}{n-1}\Gamma - \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) Id$

$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\Gamma^{-1}(X) = -\frac{1}{n-1} X + \frac{\operatorname{tr} X}{n-1} I - \cancel{X} + \frac{1}{n-1} X$

$$\Gamma^{-1}(X) = -X + \frac{\operatorname{tr} X}{n-1} I$$

<u>Notes</u> : - On avait directement que Γ est inversible car 0 n'est pas valeur propre de Γ.

- Attention à ne pas confondre, dans cet exercice, l'opérateur Id sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la matrice I.