Correction du devoir # 4

Ex 1 (5 pts)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

1) $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 12\lambda + 16$

$P_A(\lambda) = -(\lambda+2)^2(\lambda-4)$

donc les valeurs propres sont $\underline{-2}$, de multiplicité 2, et $\underline{4}$, de multiplicité 1.

2) On sait que :

$$A \text{ diagonalisable} \iff \begin{cases} P_A \text{ est scindé} \\ \text{pour chaque valeur propre } \lambda, \text{ de sev propre associé } W_\lambda, \text{ la multiplicité de } \lambda \text{ est égale à } \dim W_\lambda \end{cases}$$

4 est de multiplicité 1 donc $\dim W_4 = 1$

-2 est de multiplicité 2 donc $1 \leq \dim W_{-2} \leq 2$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $AX = -2X \iff \begin{cases} x - 3y + 3z = -2x \\ 3x - 5y + 3z = -2y \\ 6x - 6y + 4z = -2z \end{cases}$

$\iff x - y + z = 0$

donc $W_{-2} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim W_{-2} = 2$ donc A diagonalisable

Ex 2 (5 pts)

1) Si $n=1$: $M = \begin{pmatrix} a & b_1 \; \cdots \; b_r \\ 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{pmatrix}$ donc $\det M = a \det C = (\det A)(\det C)$

Si $n > 1$: soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

$$\det M = a_{11} \det M_1 - a_{21} \det M_2 + \dots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det M_n$$

où $M_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec A_i matrice obtenue à partir de A en supprimant la $1^{ère}$ colonne et la $i^{ème}$ ligne

et B_i matrice obtenue à partir de B en supprimant la $i^{ème}$ ligne

Par hypothèse de récurrence : $\det M_i = (\det A_i)(\det C)$

donc $\det M = \sum_{k=1}^{n} a_{k1} (-1)^{k+1} (\det A_k)(\det C)$

$$= (\det C) \sum_{k=1}^{n} a_{k1} (-1)^{k+1} (\det A_k)$$

$$= (\det C)(\det A)$$

2) $M - \lambda I = \begin{pmatrix} A - \lambda I & B \\ 0 & C - \lambda I \end{pmatrix}$

donc $\det(M - \lambda I) = \det(A - \lambda I) \det(C - \lambda I)$

$$P_M(\lambda) = P_A(\lambda) \, P_C(\lambda)$$

donc toute valeur propre de M est valeur propre de A ou C, et sa multiplicité pour M est la <u>somme des multiplicités</u> pour A et pour C (avec la convention que la multiplicité de λ pour D est nulle si λ n'est pas valeur propre de D)

Ex 3 (3 pts)

Soit λ une valeur propre de AB :

$$\exists \underline{x \neq 0} \qquad AB\,x = \lambda x$$

$$\text{donc} \quad BABx = \lambda Bx$$

Mais il faut encore vérifier que $\underline{Bx \neq 0}$ avant de dire que c'est un vecteur propre !

Si $Bx = 0$ alors $ABx = 0 = \lambda x$

donc $\lambda = 0$ (car $x \neq 0$)

Donc : si $\underline{\lambda \neq 0}$ alors λ valeur propre de BA

(de vecteur propre Bx)

si $\underline{\lambda = 0}$ alors AB non injective

donc $\det(AB) = \det(BA) = 0$

donc BA non injective

d'où 0 valeur propre de BA

$\forall \lambda$ valeur propre de AB, λ est valeur propre de BA.

Comme on peut faire le même raisonnement dans l'autre sens, on a que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

Ex 4 (7 pts)

1) $P_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - X)$ $\qquad P_B(X) = \prod_{i=1}^{n} (\mu_i - X)$

donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et celles de B sont $\mu_1, \dots, \mu_n$

2) $$AB = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2\mu_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$ où les $*$ indiquent des valeurs qui ne nous intéressent pas

donc AB triangulaire supérieure, avec les $\lambda_i\mu_i$ $(1 \leq i \leq n)$ sur la diagonale.

3) D'après ce qui précède, A^k est aussi triangulaire supérieure, avec les λ_i^k $(1 \leq i \leq n)$ sur la diagonale.

Donc, si $R = \alpha_N X^N + \ldots + \alpha_0$, $R(A) = \alpha_N A^N + \ldots + \alpha_0 I$ est aussi triangulaire supérieure, avec les $\alpha_N \lambda_i^N + \ldots + \alpha_0 = R(\lambda_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ sur la diagonale.

4) Les valeurs propres de $R(A)$ sont les éléments de la diagonale, donc les $R(\lambda_i)$ pour $1 \leq i \leq n$.

La multiplicité de $R(\lambda_i)$ est le nombre d'occurrences de $R(\lambda_i)$ sur la diagonale, soit :

$$\boxed{\mathrm{mult}_{R(A)}(R(\lambda_i)) = \mathrm{Card}\,\{k \in [1, n] \,/\, R(\lambda_k) = R(\lambda_i)\}}$$ pour $1 \leq i \leq n$

où $\mathrm{mult}_M(\lambda)$ est la multiplicité d'une valeur propre λ de M et $\mathrm{Card}\, E$ est le nombre d'éléments d'un ensemble fini E.