Correction du devoir # 7

MAT 3541

Ex 1

Utilisons Gram-Schmidt pour trouver une base orthonormée de W :

$$u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e_2' = u_2 - \langle e_1 | u_2 \rangle e_1$$

$$= u_2 + \frac{2}{5} e_1$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 44 \\ 33 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{1}{\|e_2\|} e_2 = \frac{1}{\sqrt{3650}}\begin{pmatrix} 44 \\ 33 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt{146}}\begin{pmatrix} 44 \\ 33 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$\{e_1, e_2\}$ est une base orthonormée de W

donc le projeté orthogonal de $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur W est :

$$w = \langle w | e_1 \rangle e_1 + \langle w | e_2 \rangle e_2$$

$$= e_1 + \frac{110}{5\sqrt{146}} e_2$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5 \times 2 \times 11}{25 \times 146}\begin{pmatrix} 44 \\ 33 \\ 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\frac{11}{73}\begin{pmatrix} 44 \\ 33 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\frac{1}{73}\begin{pmatrix} 265 \\ 655 \\ 275 \end{pmatrix}$$

$$w = \frac{1}{73}\begin{pmatrix} 53 \\ 131 \\ 55 \end{pmatrix}$$

Ex 2

(i) $\forall u, v \in V$, $\langle u | (f+g) v \rangle = \langle u | f v \rangle + \langle u | g v \rangle = \langle f^* u | v \rangle + \langle g^* u | v \rangle$

$$= \langle (f^* + g^*) u | v \rangle$$

donc $(f+g)^* = f^* + g^*$ (par définition de l'adjoint)

(ii) $\forall u, v \in V$, $\langle u | (kf) v \rangle = k \langle u | f v \rangle = k \langle f^* u | v \rangle$
$= \langle \bar{k} f^* u | v \rangle$

donc $(kf)^* = \bar{k} f^*$

(iii) $\forall u, v \in V$, $\langle u | (fg) v \rangle = \langle u | f(g v) \rangle = \langle f^* u | g v \rangle$
$= \langle g^* (f^* u) | v \rangle = \langle (g^* f^*)(u) | v \rangle$

donc $(fg)^* = g^* f^*$

(iv) $\forall u, v \in V$, $\langle u | f^* v \rangle = \overline{\langle f^* v | u \rangle} = \overline{\langle v | f u \rangle} = \langle f u | v \rangle$

donc $(f^*)^* = f$

(v) $\forall u, v \in V$, $\langle u | (id) v \rangle = \langle (id) u | v \rangle$

donc $(id)^* = id$

(vi) $\forall u, v \in V$, $\langle u | 0(v) \rangle = 0 = \langle 0(u) | v \rangle$

donc $0^* = 0$

(vii) Si f est inversible, soit $g = (f^{-1})^*$
$\forall u, v \in V$, $\langle f^* g u | v \rangle = \langle g u | f v \rangle = \langle u | f^{-1} f v \rangle = \langle u | v \rangle$
donc $f^* g = (id)^* = id$
et $\langle g f^* u | v \rangle = \langle f^* u | f^{-1} v \rangle = \langle u | f f^{-1} v \rangle = \langle u | v \rangle$
donc $g f^* = (id)^* = id$

donc f^* est inversible et $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$

Ex 3

1) X^k annulle N donc $P_N^{min} | X^k$
or $N^i \neq 0 \ \forall i < k$ d'où $P_N^{min} = X^k$

2) On sait que $P_N^{min} | P_N$ et $\deg P_N = n$
donc $k \leq n$

3) Si N est diagonalisable, alors P_N^{min} n'a que des racines simples donc $P_N^{min} = X$ et $k = 1$.

Dans ce cas, $N = 0$

4) Le théorème de Cayley-Hamilton <u>généralisé</u> nous dit que P_N et P_N^{min} ont les mêmes facteurs irréductibles.

Dans le cas présent, X est le seul facteur irréductible de P_N^{min}, donc de P_N. D'où $P_N = aX^i$ pour $i \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$

Or $\deg P_N = n$ donc $P_N = aX^n$

$$P_N = (-1)^n X^n \text{ si } P_N = \det(A - XI)$$

$$\left(P_N = X^n \text{ si } P_N = \det(XI - A)\right)$$

<u>Remarques</u> :

1) A diagonalisable ssi P_A^{min} n'a que des racines simples, ce qui ne signifie pas que les valeurs propres de A sont toutes simples.

2) Attention au théorème de Cayley-Hamilton <u>généralisé</u> : il nous dit que si

$$P_A^{min} = P_1^{r_1} \dots P_k^{r_k} \text{ avec } P_1 \dots P_k \text{ irréductibles et distincts}$$

alors $P_A = P_1^{d_1} \dots P_k^{d_k}$ avec $d_k \geq r_k$