MAT 3541 : DEVOIR DE MI-SESSION

Exercice 1 :

Soit l'endomorphisme $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par :

$$T(x,y,z) = (\ 2x+y\ ,\ y-z\ ,\ 2y+4z\ )$$

1. Donner la matrice représentant T dans la base canonique.
2. Quelles sont les valeurs propres de T ? T est-elle diagonalisable ?
3. En déduire le polynôme minimal de T.
4. Donner une matrice triangulaire supérieure représentant T dans une base que l'on indiquera.

Exercice 2 :

Soit $P ; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par $P(x,y) = (x,0)$. Montrer que P est linéaire. Quel est le polynôme minimal de P ?

Exercice 3 :

Soit V l'espace vectoriel des fonctions réelles indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, soit $D : V \to V$ l'opérateur de dérivation sur cet espace et soit $a, b \in \mathbb{R}$.

On définit

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & V & \to & \mathbb{R} \\ & & f & \mapsto & \int_a^b f(x)dx \end{array}$$

Montrer que $\phi \in V^*$ et expliciter $D^*(\phi)$.

Exercice 4 :

Vrai ou faux ? Quand la réponse est VRAI, on donnera une justification. Quand la réponse est FAUX, on donnera un contre-exemple.

1. Si f est diagonalisable, alors f a n valeurs propres distinctes.
2. $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P'(1) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
3. Si E est la projection sur W_1 suivant W_2 et I l'opérateur identité, alors $I - E$ est la projection sur W_2 suivant W_1.
4. Si une matrice triangulaire A est diagonalisable, alors A est déjà une matrice diagonale.

Exercice 5 :

Soit l'endomorphisme $\Gamma : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\Gamma(X) = -X + (\mathrm{tr}\ X)I$$

pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où I est la matrice identité de taille n.

Note : Γ est un endomorphisme sur un espace vectoriel de *matrices*.

1. Trouver les valeurs propres de Γ, et les sous-espaces propres associés (attention à bien traiter tous les cas possibles).
2. Quels sont les ordres de multiplicité des valeurs propres de Γ ?
3. L'endomorphisme Γ est-il diagonalisable ? En déduire le polynôme minimal de Γ.
4. En déduire que Γ est inversible, et donner la valeur explicite de $\Gamma^{-1}(X)$.