Sujet de devoir # 6

Devoir à rendre le mercredi 24 octobre
Les exercices 3 et 4 sont plus difficiles que les autres.

Exercice 1 :

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

A est-elle triangularisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire sur le corps des nombres *réels* ? Si oui, trouver une matrice triangulaire similaire à A.

Exercice 2 :

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$A^3 = 2A^2 + A - 2I$$

1. Montrer que A est diagonalisable. Quelles sont les valeurs possibles de ses valeurs propres ?
2. Montrer que A est inversible, et exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A et I.

Exercice 3 :

Soit A une matrice 3×3 à coefficients réels.

En utilisant uniquement le polynôme minimal de A, montrer que si A n'est pas triangularisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire sur le corps des nombres *réels*) alors elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ (c'est-à-dire sur le corps des nombres *complexes*).

Exercice 4 :

Soit une matrice diagonale

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$ (c'est-à-dire que A a n valeurs propres distinctes).

1. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Décrire la matrice AB, puis la matrice BA, en fonction de la matrice B. En déduire que si $AB = BA$ alors B est diagonale.
2. Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices diagonales. Quelle est la dimension de W ?
3. Montrer que $\{I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\}$ est un système libre de W.
4. En déduire que si B commute avec A, alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = P(A)$.