Contrôle de TD du 17/11/2005

Le barême est indiqué à titre indicatif et est sujet à modification !

Exercice 1 : Le décompte des points au tennis - 3 points

Au tennis, au cours d'un jeu, le score d'un joueur vaut successivement 0, 15, 30 puis 40 au fur et à mesure qu'il marque des points. Si un seul joueur est à 40, il lui suffit de remporter encore un point pour remporter le jeu. En revanche, si les deux sont à 40 (cas dit d'*égalité*), le joueur qui remporte le point suivant ne gagne qu'un *avantage*. Il peut alors remporter le jeu s'il gagne également le point suivant ; s'il le perd, les joueurs reviennent à égalité. Construire un automate représentant l'évolution des scores au cours d'un jeu. Les lettres a et b représenteront un point gagné par le joueur A ou par le joueur B.

Exercice 2 : Propriétés de base - 4 points

L'automate suivant est-il déterministe ? Complet ? Émondé ? Standardisé ?

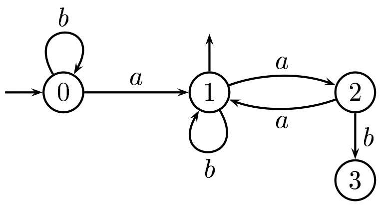

FIG. 1 – Automate $\mathcal{A}_1$

Dans chaque cas, lorsque la réponse est négative, on donnera un automate déterministe / complet / émondé / standardisé (suivant le cas) équivalent.

Exercice 3 : Déterminisation - 4 points

Déterminisez les automates suivants :

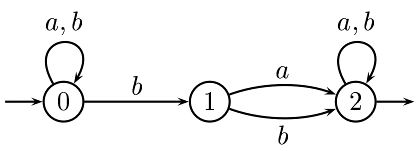

FIG. 2 – Automate $\mathcal{A}_2$

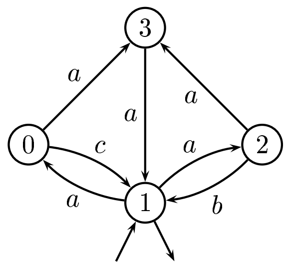

FIG. 3 – Automate $\mathcal{A}_3$

Exercice 4 : Reconnaissance de langages - 6 points

On considère l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b\}$. Les langages suivants sont-ils reconnaissables ? Justifiez votre réponse.

- $\mathcal{L}_1 = \{b^p a^n b^q \mid n = p + q\}$
- $\mathcal{L}_2 = \{uwu \mid u, w \in A^* \text{ et } |u| \geq |w|\}$
- $\mathcal{L}_3 = \{u \in A^* \mid |u|_a \geq 2\}$
- $\mathcal{L}_4 = \{a^n \mid n \text{ est un nombre premier}\}$

Exercice 5 : Représentation binaire - 4 points

Soit $\Sigma = \{0,1\}$. On désigne par $\overline{u}$ le nombre représenté par une séquence binaire $u \in \Sigma^*$, c'est-à-dire $\overline{a_n \dots a_1 a_0} = a_0 + 2.a_1 + \cdots + 2^n.a_n$. Donnez un automate qui reconnaisse le langage $\mathcal{L}_1 = \{u \in \Sigma^* \ : \ \overline{u} \equiv 2 \mod 7\}$.

Exercice 6 : Un peu plus dur... - 5 points

On travaille sur l'alphabet $\mathbf{X} = \{a, b\}$.

Construire un automate fini (non déterministe) à $n+1$ états reconnaissant le langage $\mathcal{L}_5 = (a+b)^* a (a+b)^{n-1}$.

On se propose de montrer que tout automate fini complet déterministe reconnaissant $\mathcal{L}_5$ possède au moins 2^n états.

Soit donc $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$ un tel automate fini complet déterministe. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbf{X}^n & \to & Q \\ & u & \mapsto & \delta^*(i, u) \end{array}$$

est injective, et conclure.

Rappel : Dans la notation $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$, Q est l'ensemble des états, δ la fonction de transition, i l'état initial et F l'ensemble des états finaux, et on note δ^* l'extension de δ aux mots construits sur l'alphabet $\mathbf{X}$.