MPRI 2–2 : Domaines. Feuille de TD n° 1
7 novembre 2009

On rappelle qu'un espace cohérent E est la donnée d'un ensemble $|E|$ et d'une relation binaire, réflexive et symétrique $\frown_E$. Une clique de E est un sous ensemble x de $|E|$ tel que $\forall a, a' \in x\ a \frown_E a'$. On note $\mathsf{Cl}(E)$ l'ensemble des cliques de E, considéré comme un ordre partiel (avec l'inclusion comme relation d'ordre).

Exercice 1
1. $\mathsf{Cl}(E)$ est un cpo.
2. Un élément de $\mathsf{Cl}(E)$ est isolé (compact) ssi il est fini.
3. Toute partie bornée de $\mathsf{Cl}(E)$ a un sup.
4. Un élément p de $\mathsf{Cl}(E)$ est premier ssi c'est un singleton.

Exercice 2 Soit $f : \mathsf{Cl}(E) \to \mathsf{Cl}(F)$ une fonction croissante. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
1. f est continue.
2. Pour tout $x \in \mathsf{Cl}(E)$ et tout $b \in f(x)$, il existe $x_0 \subseteq x$ tel que x_0 est fini et $b \in f(x_0)$.
3. Pour tout $x \in \mathsf{Cl}(E)$ et tout $y_0 \in \mathsf{Cl}(F)$ fini tel que $y_0 \subseteq f(x)$, il existe $x_0 \subseteq x$ tel que x_0 est fini et $y_0 \subseteq f(x_0)$.

Exercice 3 Soit E l'espace cohérent tel que $|E| = \mathbb{N}^2$, et $(n, m) \frown_E (n', m')$ ssi $n = n' \Rightarrow m = m'$, si bien que toute clique x de E peut être vue comme une fonction partielle f_x de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$. Réciproquement, le graphe $\mathsf{Gr}(f)$ de toute fonction partielle $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une clique de E.
1. Exprimer la condition $\mathsf{Gr}(f) \subseteq \mathsf{Gr}(g)$ en termes de f et g.
2. Soit 1 l'espace cohérent tel que $|1| = \{*\}$. Soit $\varphi : \mathsf{Cl}(E) \to \mathsf{Cl}(1)$ la fonction qui envoie x sur $\{*\}$ s'il existe n tel que $f_x(n)$ soit défini et différent de 0, et sur $\emptyset$ sinon. Montrer que φ est croissante, continue, mais pas stable.
3. Soit $\psi : \mathsf{Cl}(E) \to \mathsf{Cl}(1)$ la fonction qui envoie x sur $\{*\}$ si $f_x(n) = 0$ pour tout n, et sur $\emptyset$ sinon. Montrer que ψ est croissante, mais pas continue.

Exercice 4 Soit X un cpo (ordre partiel dans lequel toute famille filtrante a un sup). Montrer que, si $x_0, y_0 \in X$ sont des éléments de X qui ont un sup z_0, alors z_0 est isolé dans X.

Exercice 5 Soit X un treillis complet et soient p et q des éléments premiers de X. Montrer que si $p \vee q$ est premier, alors p et q sont comparables.

Exercice 6 Soit X un treillis complet (attention, il n'est pas supposé premier-algébrique).
1. Montrer que l'ensemble des fonctions linéaires de X vers $\mathcal{I}(1)$ est un treillis complet qu'on notera Y dans la suite.
2. Trouver un isomorphisme entre Y et X^{op} (indication : si $f \in Y$, considérer $\ker f = \{x \in X \mid f(x) = \emptyset\}$).

Exercice 7 Soient S, T et U des préordres. On dira qu'une fonction $f : \mathcal{I}(S) \times \mathcal{I}(T) \to \mathcal{I}(U)$ est bilinéaire si elle est croissante et vérifie : pour tout $x \in \mathcal{I}(S)$, la fonction $f(x, \_)$ est linéaire, et pour tout $y \in \mathcal{I}(T)$, la fonction $f(\_, y)$ est linéaire.
1. Montrer que la fonction $\tau : \mathcal{I}(S) \times \mathcal{I}(T) \to \mathcal{I}(S \otimes T)$ telle que $\tau(x, y) = x \otimes y$ est bilinéaire.
2. Montrer que, si $f : \mathcal{I}(S) \times \mathcal{I}(T) \to \mathcal{I}(U)$ est bilinéaire, il existe une et une seule fonction linéaire $g : \mathcal{I}(S \otimes T) \to \mathcal{I}(U)$ telle que $f = g \circ \tau$.