MPRI 2–2 : Domaines. Feuille de TD n° 2
27 novembre 2009

Exercice 0.1 Si S est un préordre et si $x \in \mathcal{I}(S)$ et $x' \in \mathcal{I}(S^{\mathrm{op}})$, on écrit $x \perp x'$ si $x \cap x' \neq \emptyset$.

Soient S et T des préordres et soit $f : \mathcal{I}(S) \to \mathcal{I}(T)$ une fonction linéaire. Soit $f' : \mathcal{I}(T^{\mathrm{op}}) \to \mathcal{I}(S^{\mathrm{op}})$. Montrer que si la propriété suivante est satisfaite :

$$\forall x \in \mathcal{I}(S)\, \forall y' \in \mathcal{I}(T^{\mathrm{op}}) \quad f(x) \perp y' \Leftrightarrow x \perp f'(y')$$

alors f' est linéaire, et donner sa trace.

Exercice 0.2 Soit N le préordre dont les éléments sont les entiers naturels, avec $n \leq m$ ssi $n = m$. Donner un exemple d'une suite infinie strictement décroissante $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues $f_n : \mathcal{I}(N) \to \mathcal{I}(1)$ qui sont toutes isolées (et même premières) dans le treillis premier-algébrique des fonctions continues $\mathcal{I}(N) \to \mathcal{I}(1)$.

Donner un exemple d'une fonction continue isolée (et même première) $\mathcal{I}(N) \to \mathcal{I}(1)$ qui a un minorant non isolé.

Expliquer pourquoi de telles situations ne peuvent pas se produire dans le modèle des espaces cohérents.

Exercice 0.3 Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels avec l'ordre habituel. Décrire aussi simplement que possible le treillis des fonctions continues $\mathcal{I}(\mathbb{N}) \to \mathcal{I}(1)$. Même question pour $(!\mathbb{N})^{\perp}$.

Exercice 0.4 Montrer que l'opération $\Phi : S \to !(S \multimap S)$ est un objet variable, donner la forme générale des éléments de son plus petit point fixe U et décrire le préordre dont ce plus petit point fixe est équipé. Soit $\Psi : S \mapsto (!S \multimap !S)$. Montrer que Ψ est un objet variable ; soit V son plus petit point fixe, montrer que $U = !V$.

Exercice 0.5 Dans le modèle de Engeler E_∞ vu en cours, calculer l'interprétation $[M] \in U$ des termes suivants :

- $\lambda x\, x$;
- $\lambda x\, \lambda y\, x$
- $\lambda x\, \lambda y\, (x)\, y$
- $\lambda x\, \lambda y\, (x)\, (x)\, y$
- $\Delta_f = \lambda x\, (f)\, (x)\, x$ (attention : ce terme n'est pas clos)
- $Y = \lambda f\, (\Delta_f)\, \Delta_f$
- $(Y)\, \lambda z\, (z)\, z$.

Exercice 0.6 Un lambda-terme M est en forme normale de tête s'il peut s'écrire

$$M = \lambda x_1 \cdots \lambda x_n\, (x)\, M_1 \cdots M_k$$

Montrer que si M est en forme normale de tête et si $y_1, \ldots, y_p$ est une liste de variables sans répétitions et contenant toutes les variables libres de M, alors $[M]^{y_1,\ldots,y_p} \neq \emptyset$.

Exercice 0.7 On dira qu'un élément a de E_∞ est héréditairement non vide s'il appartient à A (c'est un atome), ou s'il est de la forme (u_0, b) avec $b \in \mathsf{E}_\infty$ héréditairement non vide, et u_0 ensemble fini non vide d'éléments héréditairement non vides.

1. Montrer qu'un terme est normalisable si et seulement s'il est beta-équivalent à un terme normal.
2. Montrer que si M est beta-équivalent à un lambda-terme normal, alors $[M]^{y_1,\ldots,y_p}$ contient un élément héréditairement non vide.
3. Montrer que, réciproquement, si $[M]^{y_1,\ldots,y_p}$ contient un élément héréditairement non vide, alors M est normalisable. Il faut adapter la preuve du théorème de sensibilité du modèle de Engeler vue en cours. [*Plus difficile !*]