

Feuille de TD n° 5

Exercice 1 — Donner une démonstration sémantique puis une démonstration en déduction naturelle des tautologies suivantes :

1. $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$
2. $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
3. $(\exists x, A(x) \wedge B(x)) \rightarrow (\exists x, A(x) \wedge \exists x, B(x))$
4. $((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow \neg A$
5. Soit c une constante, P un prédicat unaire et Q un prédicat binaire. En admettant que la règle $\wedge ig$ de l'exercice suivant est correcte, prouver la tautologie

$$((\forall x, P(x) \rightarrow Q(x, c)) \wedge (\exists y, P(y))) \rightarrow (\exists z, Q(z, c))$$

Exercice 2 — Montrer que les règles suivantes sont correctes :

1. Règle $\wedge eg$:

$$\frac{\Gamma; A \wedge B \vdash F}{\Gamma; A; B \vdash F} \wedge eg$$

2. Règle $\wedge ig$:

$$\frac{\Gamma; A; B \vdash F}{\Gamma; A \wedge B \vdash F} \wedge ig$$

3. Règle $\rightarrow ig$:

$$\frac{\Gamma; A; A \rightarrow B; B \vdash F}{\Gamma; A; A \rightarrow B \vdash F} \rightarrow ig$$

4. Règle $\vee m$:

$$\frac{\Gamma; \neg A; \neg B \vdash C}{\Gamma; \neg(A \vee B) \vdash C} \vee m$$

Exercice 3 — Retrouver les erreurs :

- 1.

$$\frac{\frac{A \vee B \vdash A \vee B \quad \dots}{A \vee B \vdash A} \quad \dots}{\frac{A \vee B \vdash A \vee B \quad \dots}{A \vee B \vdash B} \quad \dots} \frac{A \vee B \vdash A \vee B \quad \dots}{\vdash A \vee B \rightarrow A \wedge B} \quad \dots$$

2.

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\exists x, A \vdash \exists x, A} \dots}{\exists x, A \vdash A} \dots}{\exists x, A \vdash \forall x, A} \dots}{\vdash \exists x, A \rightarrow \forall x, A} \dots$$