Master 1 Informatique Année 2010/2011

**Logique pour l'Informatique Avancée**
**MI067 STL**
**Novembre 2010**

# Devoir sur table n° 1

---

Vous traiterez les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. La durée de cet examen est de 2 heures. Vous pouvez utiliser vos notes de cours et celles mises en ligne par vos enseignants.

**Exercice I :** *Mise en jambe*

**Question (I.1)** Démontrez

1. $(F \wedge \neg G) \to H; \neg H; F \models G$
2. $(F \wedge \neg G) \to H; \neg H; F \vdash G$

**Exercice II :** *Équivalences logiques*

On peut définir l'équivalence entre deux formules $F$ et $G$ — que l'on note $F \sim G$ — de trois façons différentes, mais équivalentes :

D1 en utilisant la fonction d'interprétation, $F \sim G$ si et seulement si :

$$\text{pour tout modèle } \mathcal{M} \text{ et tout environnement } \rho,\ \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho = \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(G)_\rho$$

D2 en utilisant la relation de satisfaction d'une formule dans une modèle, $F \sim G$ si et seulement si :

$$\text{pour tout modèle } \mathcal{M} \text{ et tout environnement } \rho,\ \mathcal{M}, \rho \models F \text{ si et seulement si } \mathcal{M}, \rho \models G$$

D3 en utilisant la déduction naturelle, $F \sim G$ si et seulement si :

$$\text{les séquents } \vdash F \to G \text{ et } \vdash G \to F \text{ sont dérivables}$$

**Question (II.1)** On va montrer les lois de De Morgan en utilisant la définition D1 de l'équivalence.
Comme ici $\mathcal{M}$ et $\rho$ n'interviennent pas, on notera simplement $\mathcal{I}$ la fonction d'interprétation.

1. Montrez que $\mathcal{I}(\neg F \vee \neg G) = \bot$ si et seulement si $\mathcal{I}(\neg(F \wedge G)) = \bot$.
2. En déduire, *en utilisant la remarque ci-dessous*, que $\mathcal{I}(\neg F \vee \neg G) = \mathcal{I}(\neg(F \wedge G))$.
3. Montrez que $\mathcal{I}(\neg F \wedge \neg G) = \top$ si et seulement si $\mathcal{I}(\neg(F \vee G)) = \top$.
4. En déduire, *en utilisant la même remarque*, que $\mathcal{I}(\neg F \wedge \neg G) = \mathcal{I}(\neg(F \vee G))$.

Remarque : On a $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho = \top$ si et seulement si $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho \neq \bot$, et par contraposition, $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho = \bot$ si et seulement si $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(F)_\rho \neq \top$.

**Question (II.2)** On va montrer les équivalences $\neg(\forall x.F) \sim \exists x.(\neg F)$ et $\neg(\exists x.F) \sim \forall x.(\neg F)$ en utilisant la définition D2.

On a déjà vu en cours que $\forall x.(\neg F)$ implique $\neg(\exists x.F)$ et que $\exists x.(\neg F)$ implique $\neg(\forall x.F)$. Reste à dériver les deux autres implications.

Montrez que pour tout modèle $\mathcal{M}$ et environnement $\rho$ :

1. Si $\mathcal{M}, \rho \models \neg(\exists x.F)$ alors $\mathcal{M}, \rho \models \forall x.(\neg F)$.
2. Si $\mathcal{M}, \rho \models \neg(\forall x.F)$ alors $\mathcal{M}, \rho \models \exists x.(\neg F)$.

Vous pouvez utiliser les résultats du fait (5) vu en cours.

**Question (II.3)** En utilisant la définition D3, on va montrer que $F \rightarrow G \sim \neg F \vee G$. C'est à dire que $\vdash (F \rightarrow G) \rightarrow (\neg F \vee G)$ et $\vdash (\neg F \vee G) \rightarrow (F \rightarrow G)$ sont dérivables en déduction naturelle.

1. Pour montrer que $\vdash (F \rightarrow G) \rightarrow (\neg F \vee G)$, il suffit de montrer $F \rightarrow G \vdash \neg F \vee G$ (règle $\rightarrow_i$). On peut alors raisonner informellement de la manière suivante :
   – si $F$ est vraie alors, de $F \rightarrow G$ on déduit $G$ et donc $\neg F \vee G$ ;
   – sinon, on a $\neg F$ vraie et alors on a directement $\neg F \vee G$.
   En utilisant (sans le redémontrer) que $\vdash F \vee \neg F$, formalisez le raisonnement utilisé ci-dessus par une dérivation en déduction naturelle du séquent $F \rightarrow G \vdash \neg F \vee G$.
2. Donnez une dérivation en déduction naturelle de $\vdash (\neg F \vee G) \rightarrow (F \rightarrow G)$.

**Exercice III :** *Ensemble suffisant de connecteurs*

On peut n'utiliser que les connecteurs $\neg$ et $\wedge$ et le quantificateur $\forall$ pour exprimer, par équivalence, toutes les formules. On dira qu'*une formule est une* $\mathcal{CNT}$ lorsqu'elle n'est écrite qu'avec ces trois symboles logiques.

> THÉORÈME : Pour toute formule $F$ du calcul des prédicats du premier ordre, il existe une formule $F'$ sous forme $\mathcal{CNT}$ telle que $F \sim F'$.

**Question (III.1)** Démontrez ce théorème, par induction sur la formule $F$.

Indications :

– Vous utiliserez les équivalences de l'exercice précédent ainsi que l'équivalence $F \sim \neg\neg F$ (sans la démontrer).
– Vous pourrez également utiliser (sans le démontrer) le résultat suivant : soient $F$, $G$, $F'$ et $G'$ quatre formules telles que $F \sim F'$ et $G \sim G'$. Alors $\neg F \sim \neg F'$, $F \wedge G \sim F' \wedge G'$, $F \vee G \sim F' \vee G'$, $F \rightarrow G \sim F' \rightarrow G'$, $\forall x.F \sim \forall x.F'$ et $\exists x.F \sim \exists x.F'$.