

Le paradoxe du buveur

L'énoncé :

*Dans toute pièce non vide, il existe une personne ayant la propriété :
Si cette personne boit, tout le monde dans la pièce boit.*

On se propose dans cette feuille de prouver de deux façons différentes ce paradoxe de la logique classique.

1 Vos armes de bases

En guise de rappel, voici les règles d'inférences liées aux connecteurs de bases vues lors des séances de preuves formelles.

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\Gamma, A \vdash A} \text{ ax} \quad \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \perp - \text{elim} \quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow - \text{intro} \quad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \text{ Modus Ponens} \\
 \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge - \text{intro} \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge - \text{elim}_g \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge - \text{elim}_d \\
 \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee - \text{intro}_g \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee - \text{intro}_d \quad \frac{\Gamma, A \vdash R \quad \Gamma, B \vdash R}{\Gamma, A \vee B \vdash R} \vee - \text{elim}
 \end{array}$$

On aura également besoin des règles concernant les quantificateurs :

$$\begin{array}{c}
 \exists - \text{intro} : \quad \frac{\Gamma \vdash A\{x := t\}}{\Gamma \vdash \exists x.A} \quad \forall - \text{intro} : \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x.A} \quad x \notin \Gamma \\
 \exists - \text{elim} : \quad \frac{\Gamma, A\{x := t\} \vdash B}{\Gamma, \exists x.A \vdash B} \quad \forall - \text{elim} : \quad \frac{\Gamma, A\{x := t\} \vdash B}{\Gamma, \forall x.A \vdash B}
 \end{array}$$

Comme nous allons travailler en logique classique (le paradoxe du buveur n'est pas vrai en intuitionniste), on pourra se servir à notre guise du tiers-exclus ou de la double-négation :

$$\frac{}{\vdash A \vee \neg A} \text{ te} \quad \frac{}{\vdash \neg \neg A \Rightarrow A} \text{ abs}$$

Enfin, on va rajouter deux règles aux précédentes :

– la coupure, qui permet d'introduire une hypothèse préalablement prouvée :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B} \text{ cut}$$

– les règles dites admissibles, qui permettent de ne pas tout réécrire à chaque fois :

$$\frac{\text{Hyp1} \vdash \text{Res1}}{\text{Hyp2} \vdash \text{Res2}} \equiv \frac{\text{Hyp1} \vdash \text{Res1}}{\vdots} \text{Hyp2} \vdash \text{Res2}$$

On peut en fait tout à fait se passer des deux règles ci-dessus en écrivant différemment les preuves, mais c'est généralement moins évident et moins naturel. Par exemple, on a facilement la règle suivante (et ça tombe bien, il faudra s'en servir) : $\frac{\Gamma \vdash \neg \neg A}{\Gamma \vdash A} \neg \neg$

2 Préliminaires

2.1 Formalisation

1. En faisant abstraction de la partie “dans toute pièce non vide”¹, comment formalisez-vous le paradoxe du buveur ?

¹. Nous supposons tout à fait légitimement que nous disposons toujours d'un x_0 quelconque, ce qui sera utile notamment pour les $\forall - \text{elim}$ ou les $\exists - \text{intro}$.

2.2 Négation des quantificateurs

Soit $P(x)$ un énoncé quelconque.

2. Montrer que $\neg(\exists y.P(y)) \vdash \forall x.\neg P(x)$.

On peut alors montrer que $\frac{\frac{\neg(\exists y.P(y)) \vdash \forall x.\neg P(x)}{\neg(\exists y.P(y)) \vdash R} \quad \forall x.\neg P(x) \vdash R}{\neg(\exists y.P(y)) \vdash R} \text{ cut}$, d'où la règle : $\frac{\forall x.\neg P(x) \vdash R}{\neg(\exists y.P(y)) \vdash R} \neg\exists$

3. En se servant de la double-négation et de la question précédente, montrer que $\neg(\forall x.P(x)) \vdash \exists y.\neg P(y)$

À ce stade, on a donc montré (en fonctionnant comme précédemment) que la règle suivante était bien admissible pour tout P :

$$\frac{\frac{\exists y.\neg P(y) \vdash R}{\neg(\forall x.P(x)) \vdash R} \neg\forall$$

3 Attaque par le tiers-exclus

3.1 En français

4. Sauriez-vous, en vous appuyant sur le tiers-exclus, expliquer en français pourquoi le paradoxe est vrai ?

3.2 Allons-y

Pour être sur d'avoir le même, on formalise le buveur ainsi : $\text{buveur} \equiv \exists y.(P(y) \Rightarrow \forall x.P(x))$

5. Montrer, dans le cas où tout le monde boit, que l'on a bien le résultat voulu : $\forall x.P(x) \vdash \text{buveur}$. On suppose disposer d'un x_0 qui est dans la pièce.

6. Montrer, que si tout le monde ne boit pas, on a aussi ce que l'on veut : $\neg(\forall x.P(x)) \vdash \text{buveur}$

7. Avec pour ingrédients la coupure, le tiers-exclus, et les questions précédentes, conclure.

4 Raisonnons par l'absurde

4.1 Négation de l'implication

8. Montrer que $\neg(A \Rightarrow B) \vdash A \wedge \neg B$

De même on a $\frac{\frac{\neg(A \Rightarrow B) \vdash A \wedge \neg B}{\neg(A \Rightarrow B) \vdash R} \quad A \wedge \neg B \vdash R}{\neg(A \Rightarrow B) \vdash R} \text{ cut}$, et donc $\frac{A \vee \neg B \vdash R}{\neg(A \Rightarrow B) \vdash R} \neg\Rightarrow$. On admettra² pour la preuve qui suit que la règle reste valable sous des $\forall$:

$$\frac{\frac{\forall x.(A \vee \neg B) \vdash R}{\forall x.(\neg(A \Rightarrow B)) \vdash R} \neg\Rightarrow$$

4.2 La preuve

9. En commençant avec une double-négation, et en vous servant de toutes les règles admissibles dont vous pourriez avoir besoin, démontrez le paradoxe du buveur.

10. Sauriez-vous transcrire dans un français plus littéraire la preuve suivante ?

Quod erat demonstrandum.

2. ce n'est pas très dur à montrer, mais ça n'est pas ici d'un intérêt fou, on s'en passera donc

Indices

1. Il pourra être bon de s'appuyer sur un prédicat $P(x)$ signifiant *x vérifie la propriété P*, en choisissant bien P...
2. Si vous coincez, n'hésitez pas à essayer de le faire avec des phrases, comme vous le feriez usuellement.
3. L'intérêt du raisonnement par l'absurde en maths est typiquement celui-ci : on a besoin de montrer l'existence d'un certain objet, mais on n'a pas la moindre idée de comment le construire. Alors on suppose qu'il n'existe pas, et on montre que c'est stupide ($\perp$ en plus propre).
4. Le tiers-exclus, ça sert à faire des raisonnements sous la forme *soit blabla, soit pas blabla*. Il ne reste qu'à bien choisir le blabla...
5. Ça c'est facile, il n'y a pas besoin d'indice, il suffit d'appliquer les règles mécaniquement.
6. On pourra introduire un certain x_0 qui ne boit pas en se servant d'une des règles admissibles.
7. Il ne reste plus qu'à tout mélanger
8. Ceci n'est vrai qu'en logique classique, il sera donc judicieux de s'appuyer sur le tiers-exclus ou la double-négation (mais dans ce cas, vous aurez besoin des lois de Morgan).
9. Toutes les choses un petit peu difficiles ont été faites en construisant les règles admissibles. Il ne reste plus qu'à vous en servir, notamment dès que vous voulez changer des choses dans les hypothèses. Une petite astuce peut vous être utile : on pourra se servir de la règle
$$\frac{\forall y.A, \forall y.B \vdash R}{\forall y.(A \wedge B) \vdash R} \text{ } \forall\text{-split}$$
, qui repose sur le fait que $\forall y.(A \wedge B) \vdash \forall y.A \wedge \forall y.B$
10. Vous n'êtes pas non plus obligés de faire du Proust...