Le paradoxe du buveur (Correction)

NDLR :

L'auteur, bien que friand d'arbres de preuves, se permettra par la suite de considérer comme admissibles tout un tas de règles un peu faciles, comme $\overline{\overline{A, \neg A \vdash R}}$. Le lecteur attentif et passionné pourra à sa guise en vérifier l'exactitude ou faire une confiance aveugle audit auteur.

L'énoncé :

Dans toute pièce non vide, il existe une personne ayant la propriété :
Si cette personne boit, tout le monde dans la pièce boit.

1 Préliminaires

1.1 Formalisation

1. *En faisant abstraction de la partie* "dans toute pièce non vide", *comment formalisez-vous le paradoxe du buveur ?*

Solution :

Si l'on traduit mot à mot (la meilleurs façon de traduire, tous vos profs de langues vous l'ont surement déjà dit), on a :

il existe une personne	$\rightarrow$	$\exists y.(\bullet)$
si ... alors ...	$\rightarrow$	$\bullet \Rightarrow \bullet$
cette personne boit	$\rightarrow$	$P(y)$
tout le monde boit	$\rightarrow$	$\forall x.P(x)$

Et donc en faisant l'assemblage :

$$\textit{buveur} \equiv \exists y.(P(y) \Rightarrow \forall x.P(x))$$

1.2 Négation des quantificateurs

Soit $P(x)$ un énoncé quelconque.

2. *Montrer que $\neg(\exists y.P(y)) \vdash \forall x.\neg P(x)$*

Solution :

On s'appuie sur l'existence du fameux x_0 quelconque pour le $\forall -$ intro.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\exists y.P(y)), P(x_0) \vdash P(x_0)}\,\texttt{ax}}{\neg(\exists y.P(y)), P(x_0) \vdash \exists y.P(y)}\,\exists - \text{intro} \qquad \dfrac{}{\neg(\exists y.P(y)), P(x_0) \vdash \exists y.P(y) \Rightarrow \bot}\,\texttt{ax}}{\neg(\exists y.P(y)), P(x_0) \vdash \bot}\,\texttt{Modus Ponens}}{\neg(\exists y.P(y)) \vdash \neg P(x_0)}\,\Rightarrow -\text{intro}}{\neg(\exists y.P(y)) \vdash \forall x.\neg P(x)}\,\forall - \text{intro}$$

On peut alors montrer que $\dfrac{\overline{\overline{\neg(\exists y.P(y)) \vdash \forall x.\neg P(x)}} \qquad \forall x.\neg P(x) \vdash R}{\neg(\exists y.P(y)) \vdash R}\,{\scriptstyle cut}$ *, d'où la règle :* $\dfrac{\forall x.\neg P(x) \vdash R}{\neg(\exists y.P(y)) \vdash R}\,\neg\exists$

3. *En se servant de la double-négation et de la question précédente, montrer que $\neg(\forall x.P(x)) \vdash \exists y.\neg P(y)$*

Solution :

On se double-nie l'existence, pour travailler avec un $\neg\exists$... que l'on sait traiter grâce à la question précédente. Puis on se sert à nouveau du x_0 pour l'introduction et l'élimination du $\forall$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x.\neg\neg P(x) \vdash (\forall x.\neg\neg P(x))}\;\texttt{ax}}{\forall x.\neg\neg P(x) \vdash \neg\neg P(x_0)}\;\forall-\text{intro}}{\overline{\forall x.\neg\neg P(x) \vdash P(x_0)}}}{\forall x.\neg\neg P(x) \vdash (\forall x.P(x))}\;\forall-\text{intro} \qquad \dfrac{}{\neg(\forall x.P(x)) \vdash (\forall x.P(x)) \Rightarrow \bot}\;\texttt{ax}}{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\forall x.P(x)), \forall x.\neg\neg P(x) \vdash \bot}{\overline{\neg(\forall x.P(x)), \neg\exists y.\neg P(y) \vdash \bot}}\;\neg\exists}{\neg(\forall x.P(x)) \vdash \neg\neg\exists y.\neg P(y)}\;\Rightarrow-\text{intro}}{\overline{\neg(\forall x.P(x)) \vdash \exists y.\neg P(y)}}\;\neg\neg}\;\texttt{Modus Ponens}$$

À ce stade, on a donc montré (en fonctionnant comme précédemment) que la règle suivante était bien admissible pour tout P :

$$\dfrac{\exists y.\neg P(y) \vdash R}{\overline{\neg(\forall x.P(x)) \vdash R}}\;\neg\forall$$

2 Attaque par le tiers-exclus

2.1 En français

4. *Sauriez-vous, en vous appuyant sur le tiers-exclus, expliquer en français pourquoi le paradoxe est vrai ?*

Solution :

Le raisonnement est essentiellement le suivant :
- soit tout le monde boit, et dans ce cas, qui que nous choisissions, ça marche (puisque tout le monde boit)
- soit il existe quelqu'un qui ne boit pas, et alors on le choisit. Il ne vérifie pas le prémisse "si il boit", donc l'implication dans son ensemble est vraie.

2.2 Allons-y

Pour être sur d'avoir le même, on formalise le buveur ainsi : buveur $\equiv \exists y.(P(y) \Rightarrow \forall x.P(x))$

5. *Montrer, dans le cas où tout le monde boit, que l'on a bien le résultat voulu :* $\forall x.P(x) \vdash$ buveur. *On suppose disposer d'un x_0 qui est dans la pièce.*

Solution :

On se sert du fameux x_0 pour l'introduction du $\exists$. Le reste est trivial :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x.P(x) \vdash \exists y.(P(y) \Rightarrow \forall x.P(x))}\;\texttt{ax}}{\forall x.P(x) \vdash P(x_0) \Rightarrow \forall x.P(x)}\;\Rightarrow-\text{intro}}{\forall x.P(x) \vdash \exists y.(P(y) \Rightarrow \forall x.P(x))}\;\exists-\text{intro}$$

6. *Montrer, que si tout le monde ne boit pas, on a aussi ce que l'on veut :* $\neg(\forall x.P(x)) \vdash$ buveur

Solution :

On traduit le $\neg\forall$ en une existence, puis on enlève les $\exists$ dans les hypothèses et dans le résultat, et la fin est facile (un modus-ponens pour montrer $\bot$).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\overline{\neg P(x_0), P(x_0) \vdash \bot}}}{\neg P(x_0), P(x_0) \vdash \forall x.P(x)}\;\bot-\text{elim}}{\neg P(x_0) \vdash P(x_0) \Rightarrow \forall x.P(x)}\;\Rightarrow-\text{intro}}{\neg P(x_0) \vdash \exists y.(P(y) \Rightarrow \forall x.P(x))}\;\exists-\text{intro}}{\exists x_0.\neg P(x_0) \vdash \exists y.(P(y) \Rightarrow \forall x.P(x))}\;\exists-\text{elim}}{\overline{\neg(\forall x.P(x)) \vdash \exists y.(P(y) \Rightarrow \forall x.P(x))}}\;\neg\forall$$

7. *Avec pour ingrédients la coupure, le tiers-exclus, et les questions précédentes, conclure.*

Solution :

On se laisse porter par l'énoncé, et on introduit (grâce à la coupure) $\neg(\forall x.P(x)) \vee \forall x.P(x)$ (vrai, d'après le tiers exclus) :

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg(\forall x.P(x)) \lor \forall x.P(x)}\,\texttt{te} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Question 5}}{\forall x.P(x) \vdash \exists y.(P(y) \Rightarrow \forall x.P(x))} \quad \dfrac{\text{Question 6}}{\neg(\forall x.P(x)) \vdash \exists y.(P(y) \Rightarrow \forall x.P(x))}}{\neg(\forall x.P(x)) \lor \forall x.P(x) \vdash \exists y.(P(y) \Rightarrow \forall x.P(x))}\,\lor-\text{elim}}{\vdash \exists y.(P(y) \Rightarrow \forall x.P(x))}\,\texttt{cut}$$

3 Raisonnons par l'absurde

3.1 Négation de l'implication

8. *Montrer que* $\neg(A \Rightarrow B) \vdash A \land \neg B$

Solution :

On va raisonner par disjonction de cas : soit A, soit non A. Formellement, ça signifie donc se servir d'une coupure et du tiers-exclus.

Principal :

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash A \lor \neg A}\,\texttt{te} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{①}}{A, \neg(A \Rightarrow B) \vdash A \land \neg B} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(A \Rightarrow B) \vdash \neg(A \Rightarrow B)} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\hline\hline \neg A, A \vdash B\end{array}}{\neg A \vdash A \Rightarrow B}\,\Rightarrow-\text{intro}}{\neg A, \neg(A \Rightarrow B) \vdash \bot}}{\neg A, \neg(A \Rightarrow B) \vdash A \land \neg B}}{A \lor \neg A, \neg(A \Rightarrow B) \vdash A \land \neg B}\,\lor-\text{elim}}{\neg(A \Rightarrow B) \vdash A \land \neg B}\,\texttt{cut}$$

① :

$$\dfrac{\dfrac{}{A, \neg(A \Rightarrow B) \vdash A}\,\texttt{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, B \vdash B}\,\texttt{ax}}{A, B \vdash A \Rightarrow B}\,\Rightarrow-\text{intro} \quad \dfrac{}{\neg(A \Rightarrow B) \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow \bot}\,\texttt{ax}}{A, \neg(A \Rightarrow B), B \vdash \bot}}{A, \neg(A \Rightarrow B) \vdash \neg B}\,\Rightarrow-\text{intro}}{A, \neg(A \Rightarrow B) \vdash A \land \neg B}\,\land-\text{intro}$$

De même on a $\dfrac{\begin{array}{c}\hline\hline \neg(A \Rightarrow B) \vdash A \land \neg B\end{array} \quad A \land \neg B \vdash R}{\neg(A \Rightarrow B) \vdash R}\,\texttt{cut}$ *, et donc* $\begin{array}{c} A \lor \neg B \vdash R \\ \hline\hline \neg(A \Rightarrow B) \vdash R \end{array}\,\neg\Rightarrow$.

3.2 La preuve

9. *En commençant par une double-négation la règle précédente, et en vous servant de toutes les règles admissibles dont vous pourriez avoir besoin, démontrez le paradoxe du buveur.*

Solution :

On double-nie, comme prévu. Puis on traduit le $\neg\exists$ en un $\forall$. Puis on coupe le $\forall(\_ \land \_)$ en deux. Après, c'est facile.

$$\begin{array}{cl}
\hline\hline
\forall y.P(y), \neg(\forall x.P(x)) \vdash \bot & \\
\hline
\forall y.P(y), \forall y.(\neg(\forall x.P(x))) \vdash \bot & \forall-\text{elim} \\
\hline\hline
\forall y.(P(y) \land \neg(\forall x.P(x))) \vdash \bot & \forall\texttt{-split} \\
\hline\hline
\forall y.(\neg(P(y) \Rightarrow \forall x.P(x))) \vdash \bot & \neg\Rightarrow \\
\hline\hline
\neg\exists y.(P(y) \Rightarrow \forall x.P(x)) \vdash \bot & \neg\exists \\
\hline
\vdash \neg\neg\exists y.(P(y) \Rightarrow \forall x.P(x)) & \Rightarrow-\text{intro} \\
\hline\hline
\vdash \exists y.(P(y) \Rightarrow \forall x.P(x)) & \neg\neg
\end{array}$$

10. *Sauriez-vous transcrire dans un français plus litérraire la preuve suivante ?*

Solution :

Dans cette démonstration, on s'appuie sur le fait que la négation de “si il boit, alors tout le monde boit” est “il boit et tout le monde ne boit pas”. Rien de surprenant jusque là. Mais quand on rajoute les quantificateurs, cela donne que la négation de “il existe une personne qui, si elle boit, alors tout le monde boit” est “quelque soit la personne que l'on considère, elle boit et tout le monde ne boit pas”. Ce qui semble plutôt contradictoire.

“Ce ne sont pas les êtres qui existent réellement, mais les idées.”
[Marcel Proust, *Le Temps retrouvé*]