Oral Informatique Fondamentale

Étienne Miquey
etienne.miquey@ens-lyon.fr

Préparation : 20-30 min
Passage : 40 min

Éboulement de tas de sables

Soit $\mathcal{G}$ un graphe de sommets $1,\dots,n$, dont n sera appelé le *puits*. On appelle *configuration* un élément $u \in \mathbb{Z}^n$, et on dit que u est *positive* si $\forall i \in [\![1, n-1]\!], u_i \geq 0$. Intuitivement, u_i représente le nombre de grains de sable sur le sommet i.

On note d_i le degré d'un sommet, et on pose $\Delta_i = (\delta_{1,i},\dots,\delta_{n,i})$ avec $\delta_{i,i} = d_i$ et $\delta_i, k = \begin{cases} -1 & \textit{si k voisin de i} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$.

L'*éboulement* d'un sommet consiste à lui retirer un grain par arête incidente à distribuer ces grains aux voisins. Formellement, étant données deux configurations positives u et v, on écrite $u \to v$ s'il existe $i \leq n-1$ tel que $v = u - \Delta_1$. On dit alors que v est obtenue à partir de u par éboulement du sommet i. On notera $\overset{*}{\to}$ la clôture transitive de $\to$.

Question 1. Montrer que si $u \overset{*}{\to} v$ alors $u - v \in \langle \Delta_1,\dots,\Delta_n \rangle$.

On note $\mathcal{S}_k$ l'ensemble des sommets à distance k du sommet n dans $\mathcal{G}$. On pose $l = \max\{i | \mathcal{S}_i \neq \emptyset\}$, et pour $k \leq l, \mu_k(u) = \sum_{i\in\mathcal{S}_k} u_i$. Le vecteur $\mu(u) = (\mu_1(u),\dots,\mu_l(u))$ est appelé *potentiel* de la configuration u. Une configuration positive u est dite stable si aucun sommet ne peut s'ébouler.

Question 2. Montrer que :

(a) pour toute configuration positive u il existe une configuration stable v telle que $u \overset{*}{\to} v$

(b) cette configuration est unique

On appelle *avalanche* une suite d'éboulements qui se termine par une configuration stable. Une configuration u est dite *récurrente* si elle est stable et s'il existe une configuration positive $v \neq 0$ telle que $u + v \overset{*}{\to} u$. Soit δ la configuration avec $\delta_i = d_i$ pour tous les sommets.

Question 3. Montrer les points suivants :

(a) Si u est stable, alors $\delta - u$ est positive

(b) Si $u \overset{*}{\to} u'$ et $v \overset{*}{\to} v'$ alors $u + v \overset{*}{\to} u' + v'$

(c) Pour toute configuration positive $v \neq 0$, il existe un entier k et une configuration w (non nécessairement stable) telle que $kv \overset{*}{\to} w$ et $w_i > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$

(d) Une configuration stable u est récurrente ssi il existe une configuration positive u' telle que $u' + \delta \overset{*}{\to} u$

Pour toute paire (u, v) de configurations positives on note $u \oplus v$ l'unique configuration stable telle que $u + v \overset{*}{\to} u \oplus v$. Enfin, pour toute paire de configurations (non nécessairement positives), on écrit $u \Rightarrow v$ s'il exite un sommet $i \leq n-1$ tel que $v = u - \Delta_i$, et $\overset{*}{\Rightarrow}$ sa clôture transitive.

Question 4. Montrer que si u et v sont deux configurations telles que $u - v \in \langle \Delta_1,\dots,\Delta_n \rangle$, alors il existe une configuration w telle que $w \overset{*}{\Rightarrow} u$ et $w \overset{*}{\Rightarrow} v$.

On pose $\epsilon = 2\delta - \delta \oplus \delta$.

Question 5. Montrer que la configuration ϵ est positive et que $\delta + \epsilon \overset{*}{\to} \delta$.

Question 6. Montrer qu'une configuration stable u est récurrente ssi $u + \epsilon \overset{*}{\to} u$.

Question 7. Montrer que pour toute configuration u il existe une unique configuration récurrente v telle que $u - v \in \langle \Delta_1,\dots,\Delta_n \rangle$.

Question 8. Montrer que l'opération $\oplus$ munit l'ensemble $R(\mathcal{G})$ des configurations récurrentes de $\mathcal{G}$ d'une structure de groupe.