Oral Informatique Fondamentale

Étienne Miquey
etienne.miquey@ens-lyon.fr

Préparation : 20 min
Passage : 40 min

Mariages stables

Il y a $2n$ internes et on doit mettre deux internes par chambre. Chaque interne a une liste de préférences qui ordonne totalement l'ensemble des $2n_1$ autres oternes. On dit que l'internat est instable s'il existe deux internes a et b (appelés *éléments perturbateurs*) tels que a préfère b à son camarade de chambre, et b préfère a à son camarade de chambre.

Question 1. Montrer que dans le cas suivant, il n'y a pas d'internat stable :

$$\begin{array}{c} a : b > c > d \\ b : c > a > d \\ c : a > b > d \\ d : a > b > c \end{array}$$

Dans la suite, on cherche à marier n hommes à n femmes. un mariage est donc une bijection de l'ensemble des hommes dans l'ensemble des femmes, et réciproquement. On dit qu'une mariage est stable s'il n'existe pas une femme f et une homme h tels que f préfère h à son conjoint et réciproquement (autrement dit, on veut éviter tout risque d'adultère).

Question 2. On considère l'algorithme de mariage suivant :
Répeter :
Chaque homme demande en mariage la femme la plus haute sur sa liste qui ne l'a pas déjà rejeté.
Toute femme qui reçoit $k \geq 2$ demandes en mariage rejette les demandes émanant des $k-1$ hommes les plus bas sur sa liste.
Jusqu'à ce que chaque femme reçoive exactement une demande.
On marie alors chaque femme à l'homme qui l'a demandée.

Quel est le mariage produit par cet algorithme sur l'exemple suivant :

$$\begin{array}{cc} Hommes : \{x, y, z, w\} & Femmes : \{a, b, c, d\} \\ x : a > b > c > d & a : z > x > y > w \\ y : a > c > b > d & b : y > w > x > z \\ z : c > d > a > b & c : w > x > y > z \\ w : c > b > a > d & d : x > y > z > w \end{array}$$

Question 3. Montrez que cet algorithme termine toujours et produit un mariage stable.

Question 4. Montrez que cet algorithme produit toujours un mariage M qui est optimal du point de vue des hommes. C'est-à-dire que si M' est une autre mariage stable, aucun homme n'est marié dans M' à une femme qu'il préfère à son épouse dans M. Réciproquement, montrez que ce mariage stable est le plus mauvais du point de vue des femmes.

Question 5. On ne suppose plus qu'il y a autant d'hommes que de femmes. Définir une notion de stabilité (on supposera que tout le monde préfère être marié plutôt que célibataire). Proposez un algorithme de mariage. Propriétés de votre algorithme ?

Question 6. Avec les hypothèses de la question précédente, montrez que l'ensemble des personnes qui restent célibataires est le même dans tous les mariages stables.

Question 7. Si une personne reste célibataire dans un mariage stable, aurait-il pu en aller autrement si elle avait une liste de préférences différente ?