

Oral Informatique Fondamentale

Étienne MIQUEY
etienne.miquey@ens-lyon.fr

Préparation : 20 min

Passage : 40 min

Théorème de Spira

On considère des termes sur n variables booléennes x_1, \dots, x_n : x_1, \dots, x_n et les constantes 0 et 1 sont les termes de tailles 1 ; si T_1 et T_2 sont des termes de tailles respectives t_1, t_2 , $T_1 \vee T_2$ et $T_1 \wedge T_2$ sont des termes de taille $1 + t_1 + t_2$; $\neg T_1$ est de taille $1 + t_1$

Question 1. Exhibez un terme $S(x, y, z)$ (appelé sélecteur) vérifiant $S(0, y, z) = y$ et $S(1, y, z) = z$.

Question 2. On souhaite définir une notion de profondeur de terme. On décide que les variables et les constantes sont de profondeur nulle. Comment définir la profondeur pour les autres termes ?

Question 3. Montrez que toute fonction de $\{0, 1\}^n$ dans $\{0, 1\}$ peut se représenter par un terme.

Question 4. Pour cette question uniquement, on remplace les connecteurs \vee, \wedge et \neg par un unique constructeur binaire $\otimes(x, y) = \neg(x \vee y)$. Montrez que les termes construits avec ce constructeur permettent encore d'exprimer toutes les fonctions booléennes.

Question 5. On munit $\{0, 1\}$ de l'ordre $0 < 1$ et $\{0, 1\}^n$ de l'ordre induit composante par composante. Une fonction $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ est dite monotone si $f(x) \leq f(y)$ chaque fois que $x \leq y$. On dit qu'un terme est monotone s'il ne comprend pas de négations. Montrez qu'une fonction est monotone si et seulement si elle peut être représentée par un terme monotone.

Question 6. Soit T un terme de taille t sur les variables x_1, \dots, x_n . On suppose que x_n est un sous-terme strict de T et n'apparaît qu'une seule fois dans T . Montrez que $T(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ et $T(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$ sont équivalents à des termes de taille $\leq t - 1$.

Question 7. Montrez que tout terme Θ de taille t est équivalent à un terme de profondeur $\leq 4 \log t$. (Indication : on pourra considérer un sous-terme T de Θ minimal de taille strictement supérieure à $t/2$.)