Oral Informatique Fondamentale

Étienne Miquey
etienne.miquey@ens-lyon.fr

Préparation : 30 min
Passage : 1h

Coloration de graphe

Nous allons nous intéresser à quelques algorithmes simples pour colorier les sommets d'un graphe. La règle du jeu reste toujours la même : deux sommets adjacents ne doivent pas recevoir la même couleur.

2-coloriage. Les graphes 2-coloriables sont les graphes bipartis : $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est biparti s'il existe une partition de $\mathcal{V}$ en deux sous-ensembles B (bleu) et R (rouge) tels que toute are de $\mathcal{E}$ relie un sommet bleu et un sommet rouge.

Question 1. Proposer un algorithme pour vérifier si un graphe est 2-coloriable.

Question 2. Montrer qu'un graphe est 2-coloriable si et seulement si il n'admet pas de cycle de longueur impair.

Heuristiques gloutonnes. Le cas général est malheureusement plus compliqué. On remplace désormais les couleurs par des entiers $1, 2, \dots, K$. On note $\delta(v)$ le degré d'un sommet v, et $\Delta(\mathcal{G}) = \max\limits_{v \in \mathcal{V}} \delta(v)$.

Question 3. Étant donné un ordre aribtraire $v_1, v_2, \dots, v_n$ des sommets de $\mathcal{G}$, l'algorithme glouton colorie les sommets dans cet ordre en attribuant à chaque sommet la plus petite couleur disponible. Montrer que le nombre de couleuts utilisées $gl(\mathcal{G})$ vérifie $gl(\mathcal{G}) \leq \Delta(\mathcal{G}) + 1$.

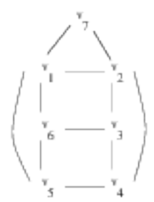
Question 4. On pose $d_i = \delta(v_i)$. Montrer qu'on a $gl(\mathcal{G}) \leq \max\limits_{i=1\dots n} \min(d_i + 1, i)$. Quelle manière d'énumérer préablablemet les sommets cette borne affinée suggère-t-elle ?

Nous allons voir que l'algorithme glouton est optimal pour les graphes d'intervalles. Étant donnée une famille d'intervalles, on définit un graphe dont les sommets sont les intervalles et dont les arêtes relient les sommets représentant les intervalles qui s'intersectent.

Question 5. Montrer que l'algorithme glouton colorie le graphe de manière optimale si l'on énumère les sommets d'un graphe d'intervalles selon un certain orde.

Voici une dernière variante du glouton. On définit le degré-couleur d'un sommet comme le nombre de couleurs déjà utilisée pour colorier ses voisins. Initialement, le degré-couleur de chaque sommet est nul, puis celui-ci évolue jusqu'à être finalement colorié. Plus précisement, voici l'algorithme de Brelaz :
Initialisation. Trier les sommetspar degré décroissants. Choisir un sommet de degré maximal et lui attribuer la couleur 1.
Boucle. Tant qu'il reste des sommets non coloriés, choisir un sommet non-colorié de degré-couleur maximal, et le colorier avec la plus petite couleur admissible.

Question 6. Faire tourner l'algorithme sur cet exemple :



Question 7. Montrer que l'algorithme n'utilise que deux couleurs pour colorier les graphes bipartis.