Técnicas de análisis no estándar en realizabilidad clásica

Étienne Miquey

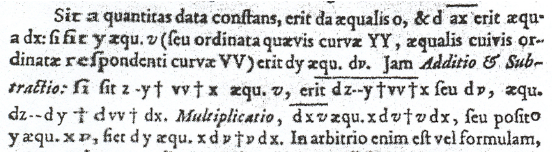
18 de Noviembre de 2013

ENS DE LYON

Las premisas : Leibniz

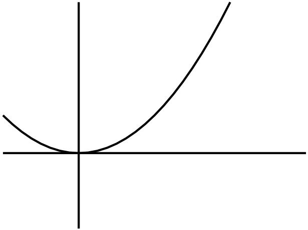
Sit a quantitas data conſtans, erit da æqualis o, & d $\overline{ax}$ erit æqua dx: ſi ſit y æqu. v (ſeu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ reſpondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Subtractio*: ſi ſit z -y † vv † x æqu. v, erit d $\overline{z\text{--}y \dagger vv \dagger x}$ ſeu dv, æqu. dz--dy † dvv † dx. *Multiplicatio*, d $\overline{xv}$ æqu. xdv † vdx, ſeu poſito y æqu. xv, fiet dy æqu. xdv † vdx. In arbitrio enim eſt vel formulam,

Las premisas : Leibniz

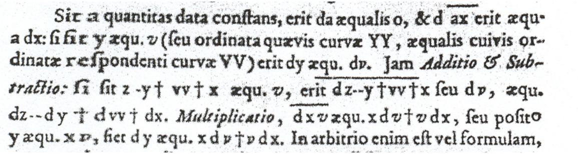


Sit a quantitas data constans, erit da æqualis 0, & d ax erit æqua a dx: si sit y æqu. v (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ respondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Subtractio:* si sit z -y † vv † x æqu. v, erit d z--y † vv † x seu dv, æqu. dz--dy † dvv † dx. *Multiplicatio*, dxv æqu. x dv † v dx, seu posito y æqu. x v, fiet dy æqu. x dv † v dx. In arbitrio enim est vel formulam,

$$y = x^2$$

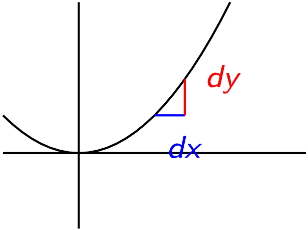


Las premisas : Leibniz


Sit a quantitas data conſtans, erit da æqualis 0, & d ax erit æqua dx: ſi ſit y æqu. v (ſeu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ reſpondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Subtractio*: ſi ſit z -y + vv + x æqu. v, erit d z--y+vv+x ſeu dv, æqu. dz--dy + dvv + dx. *Multiplicatio*, d xv æqu. x dv + v dx, ſeu poſito y æqu. x v, fiet d y æqu. x d v + v dx. In arbitrio enim eſt vel formulam,

$$y = x^2$$

$$y + dy = (x + dx)^2$$



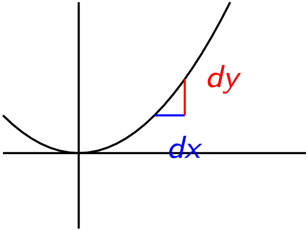
Las premisas : Leibniz

Sit a quantitas data conſtans, erit da æqualis 0, & d $\overline{ax}$ erit æqu. a dx: ſi ſit y æqu. v (ſeu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ reſpondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Subtractio:* ſi ſit z -y † vv † x æqu. v, erit $\overline{\text{d z--y † vv † x}}$ ſeu dv, æqu. dz--dy † dvv † dx. *Multiplicatio*, $\overline{\text{dxv}}$ æqu. xdv † vdx, ſeu poſito y æqu. xv, fiet dy æqu. xdv † vdx. In arbitrio enim eſt vel formulam,

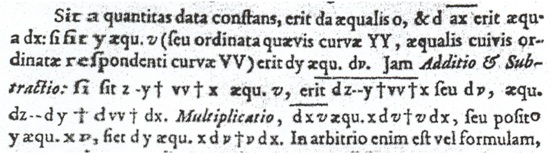
$$y = x^2$$

$$y + dy = (x + dx)^2$$

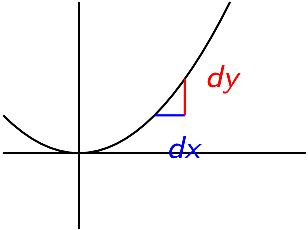
$$y + dy = x^2 + 2x dx + dx^2$$



Las premisas : Leibniz


Sit a quantitas data conſtans, erit da æqualis o, & d ax erit æqu- a dx: ſi ſit y æqu. v (ſeu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis or- dinatæ reſpondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Sub- tractio:* ſi ſit z -y † vv † x æqu. v, erit d z--y † vv † x ſeu dv, æqu. dz--dy † dvv † dx. *Multiplicatio*, dxv æqu. x dv † v dx, ſeu poſito y æqu. x v, fiet d y æqu. x d v † v d x. In arbitrio enim eſt vel formulam,

$$
\begin{aligned}
y &= x^2\\
y + dy &= (x+dx)^2\\
y + dy &= x^2 + 2x\,dx + dx^2\\
\frac{dy}{dx} &= 2x + dx = 2x
\end{aligned}
$$



Una intuición

Contraste entre los objetos teóricos :

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^k$: infinitos
- $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: (muy) infinitos

y los objetos concretamente accesibles

Una intuición

Contraste entre los objetos teóricos :

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^k$: infinitos
- $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: (muy) infinitos

y los objetos concretamente accesibles

Finito...

1
2

Una intuición

Contraste entre los objetos teóricos :

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^k$: infinitos
- $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: (muy) infinitos

y los objetos concretamente accesibles

Finito...

1

2

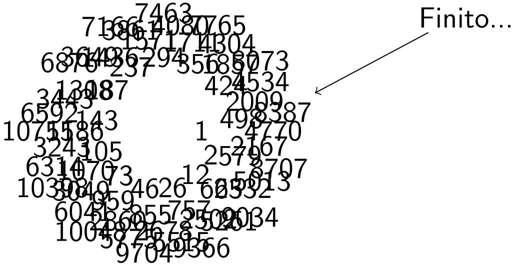
73 4626 12

Una intuición

Contraste entre los objetos teóricos :

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^k$: infinitos
- $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: (muy) infinitos

y los objetos concretamente accesibles

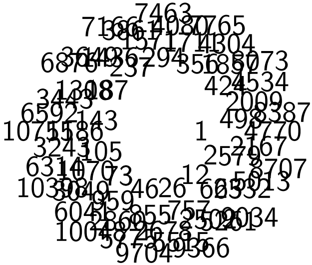


Una intuición

Contraste entre los objetos teóricos :

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^k$: infinitos
- $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: (muy) infinitos

y los objetos concretamente accesibles



Finito...

... ¿pues existe un número mayor que todos los números accesibles ?

Una intuición

Contraste entre los objetos teóricos :

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^k$: infinitos
- $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: (muy) infinitos

y los objetos concretamente accesibles

Intuición :

Elementos accesibles / inaccesibles

Una intuición

Contraste entre los objetos teóricos :

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^k$: infinitos
- $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: (muy) infinitos

y los objetos concretamente accesibles

Robinson (1961):

Elementos estándar / no estándar

Teoría interna de conjuntos (IST)

- $\mathcal{L} + \mathrm{st}(x) \quad \equiv$ "ser estándar"
- Formula interna / externa
- **Transferencia :** $A(x)$ interna :

$$\forall^{\mathrm{st}} x A(x) \Rightarrow \forall x A(x)$$

- **Idealización :** $R(x,y)$ es una relación interna

$$\forall^{\mathrm{st}}(n \in \mathbb{N}) \exists^{\mathrm{st}} x \forall^{\mathrm{st}} y (y \leq n \Rightarrow R(x,y)) \Rightarrow \exists x \forall^{\mathrm{st}} y R(x,y)$$

- **Estandardización :** $C(x)$ cualquiera

$$\forall^{\mathrm{st}} B \exists^{\mathrm{st}} A \forall^{\mathrm{st}} z (z \in A \Leftrightarrow z \in B \wedge C(z))$$

Teoría interna de conjuntos (IST)

- $\mathcal{L} + \mathrm{st}(x) \quad \equiv$ "ser estándar"
- Formula interna / externa
- **Transferencia :** $A(x)$ interna :

$$\forall^{\mathrm{st}} x A(x) \Rightarrow \forall x A(x)$$

- **Idealización :** $R(x, y)$ es una relación interna

$$\forall^{\mathrm{st}}(n \in \mathbb{N}) \exists^{\mathrm{st}} x \forall^{\mathrm{st}} y (y \leq n \Rightarrow R(x, y)) \Rightarrow \exists x \forall^{\mathrm{st}} y R(x, y)$$

- **Estandardización :** $C(x)$ cualquiera

$$\forall^{\mathrm{st}} B \exists^{\mathrm{st}} A \forall^{\mathrm{st}} z (z \in A \Leftrightarrow z \in B \wedge C(z))$$

Teoría interna de conjuntos (IST)

- $\mathcal{L} + \mathrm{st}(x) \quad \equiv$ "ser estándar"
- Formula interna / externa
- **Transferencia :** $A(x)$ interna :

$$\forall^{\mathrm{st}} x A(x) \Rightarrow \forall x A(x)$$

- **Idealización :** $R(x, y)$ es una relación interna

$$\forall^{\mathrm{st}}(n \in \mathbb{N}) \exists^{\mathrm{st}} x \forall^{\mathrm{st}} y (y \leq n \Rightarrow R(x, y)) \Rightarrow \exists x \forall^{\mathrm{st}} y R(x, y)$$

- **Estandardización :** $C(x)$ cualquiera

$$\forall^{\mathrm{st}} B \exists^{\mathrm{st}} A \forall^{\mathrm{st}} z (z \in A \Leftrightarrow z \in B \wedge C(z))$$

Teoría interna de conjuntos (IST)

- $\mathcal{L} + \mathrm{st}(x) \quad \equiv$ "ser estándar"
- Formula interna / externa
- **Transferencia :** $A(x)$ interna :

$$\forall^{\mathrm{st}} x A(x) \Rightarrow \forall x A(x)$$

- **Idealización :** $R(x, y)$ es una relación interna

$$\forall^{\mathrm{st}}(n \in \mathbb{N}) \exists^{\mathrm{st}} x \forall^{\mathrm{st}} y (y \leq n \Rightarrow R(x, y)) \Rightarrow \exists x \forall^{\mathrm{st}} y R(x, y)$$

- **Estandardización :** $C(x)$ cualquiera

$$\forall^{\mathrm{st}} B \exists^{\mathrm{st}} A \forall^{\mathrm{st}} z (z \in A \Leftrightarrow z \in B \wedge C(z))$$

Teoría interna de conjuntos (IST)

- $\mathcal{L} + \mathrm{st}(x) \quad \equiv$ "ser estándar"
- Formula interna / externa
- **Transferencia :** $A(x)$ interna :

$$\forall^{\mathrm{st}} x A(x) \Rightarrow \forall x A(x)$$

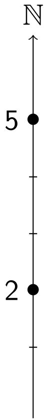
- **Idealización :** $R(x,y)$ es una relación interna

$$\forall^{\mathrm{st}}(n \in \mathbb{N}) \exists^{\mathrm{st}} x \forall^{\mathrm{st}} y (y \leq n \Rightarrow R(x,y)) \Rightarrow \exists x \forall^{\mathrm{st}} y R(x,y)$$

- **Estandardización :** $C(x)$ cualquiera

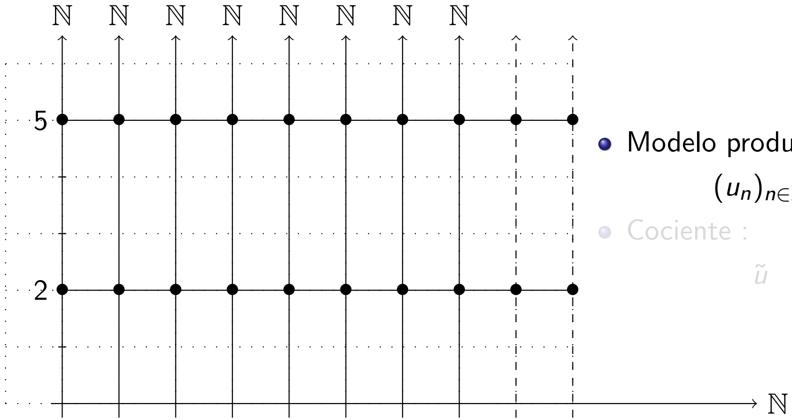
$$\forall^{\mathrm{st}} B \exists^{\mathrm{st}} A \forall^{\mathrm{st}} z (z \in A \Leftrightarrow z \in B \wedge C(z))$$

Modelo non-estándar



- Modelo de partida

Modelo non-estándar



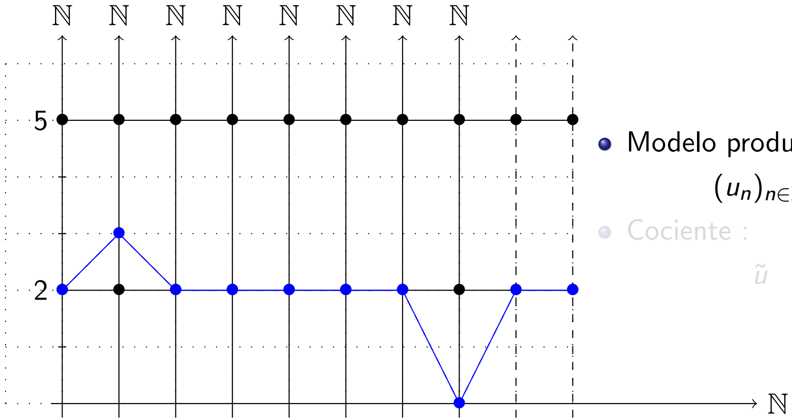
- Modelo producto :

  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Cociente :

  $\tilde{u}$

Modelo non-estándar



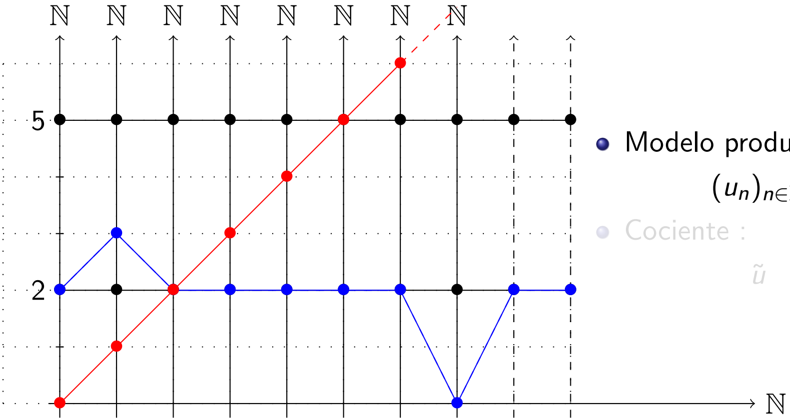
- Modelo producto :

  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Cociente :

  $\tilde{u}$

Modelo non-estándar

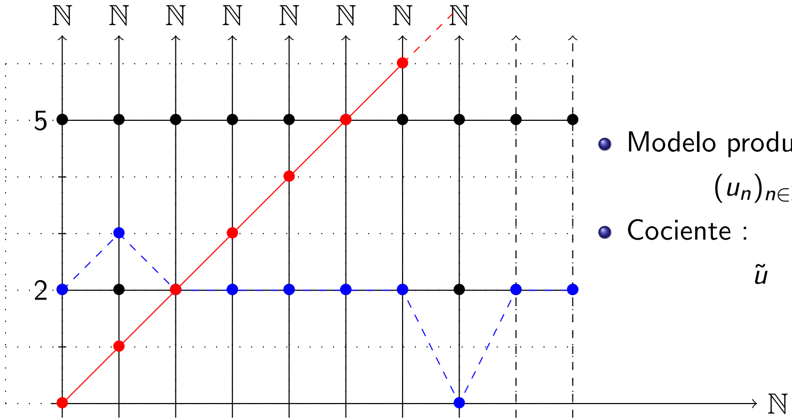


- Modelo producto :

  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Cociente :

  $\tilde{u}$

Modelo non-estándar

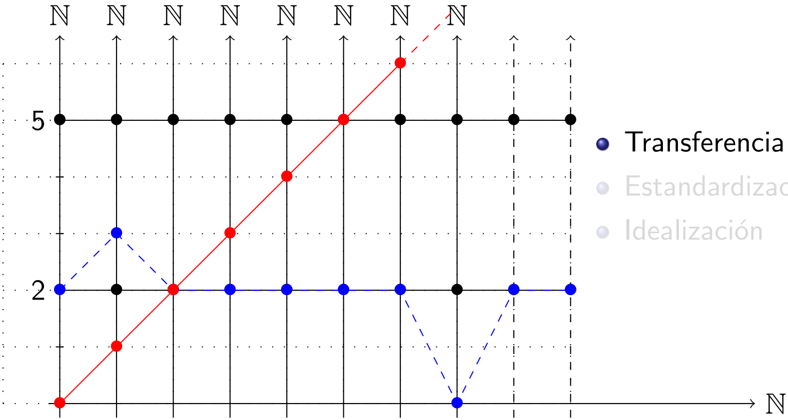


- Modelo producto :

  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Cociente :

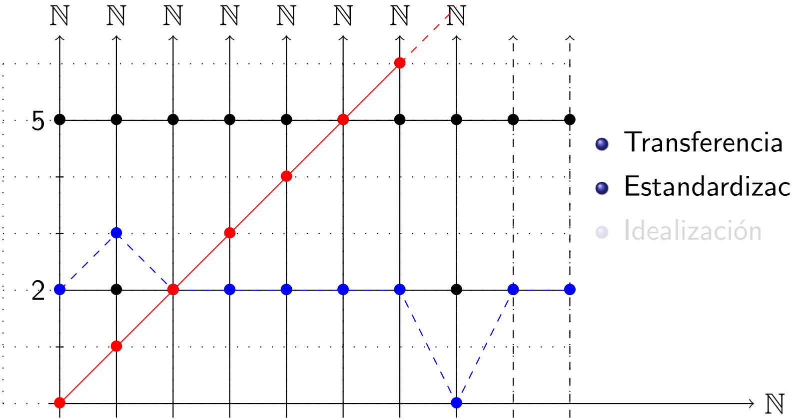
  $\tilde{u}$

Modelo non-estándar



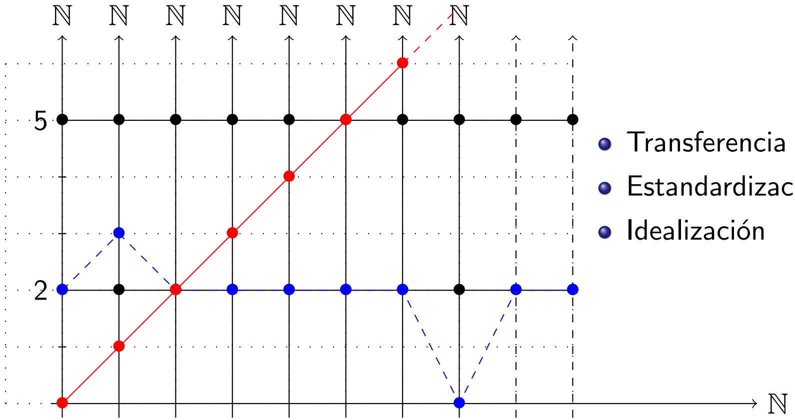
- Transferencia
- Estandardización
- Idealización

Modelo non-estándar



- Transferencia
- Estandardización
- Idealización

Modelo non-estándar



- Transferencia
- Estandardización
- Idealización

Identificación de pruebas y programas

- Modelo subyacente : Tarski (a.k.a. $\{0,1\}$)
- Provabilidad : formulas sin sus pruebas

Identificación de pruebas y programas

Teoría de la demostración	Prog. funcional
Proposición	Tipo
Regla de deducción	Regla de tipaje
$A \Rightarrow B$	$A \rightarrow B$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash t : A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash (t)u : B}$

Identificación de pruebas y programas

- Modelo subyacente : Tarski (a.k.a. $\{0,1\}$)
- Provabilidad : formulas sin sus pruebas

Identificación de pruebas y programas

Teoría de la demostración	Prog. funcional
Proposición	Tipo
Regla de deducción	Regla de tipaje
$A \Rightarrow B$	$A \rightarrow B$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash t : A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash (t)u : B}$

Identificación de pruebas y programas

- Modelo subyacente : Tarski (a.k.a. $\{0, 1\}$)
- Provabilidad : formulas sin sus pruebas

Identificación de pruebas y programas

Teoría de la demostración	**Prog. funcional**
Proposición	Tipo
Regla de deducción	Regla de tipaje
$A \Rightarrow B$	$A \to B$
$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$	$$\frac{\Gamma \vdash t : A \to B \qquad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash (t)u : B}$$

Identificación de pruebas y programas

- Modelo subyacente : Tarski (a.k.a. $\{0,1\}$)
- Provabilidad : formulas sin sus pruebas

Identificación de pruebas y programas

Teoría de la demostración	**Prog. funcional**
Proposición	Tipo
Regla de deducción	Regla de tipaje
$A \Rightarrow B$	$A \rightarrow B$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash t : A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash (t)u : B}$

Identificación de pruebas y programas

- Modelo subyacente : Tarski (a.k.a. $\{0,1\}$)
- Provabilidad : formulas sin sus pruebas

Identificación de pruebas y programas

Teoría de la demostración	**Prog. funcional**
Proposición	Tipo
Regla de deducción	Regla de tipaje
$A \Rightarrow B$	$A \rightarrow B$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash t : A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash (t)u : B}$

Identificación de pruebas y programas

- Modelo subyacente : Tarski (a.k.a. $\{0,1\}$)
- Provabilidad : formulas sin sus pruebas

Identificación de pruebas y programas

Teoría de la demostración	**Prog. funcional**
Proposición	Tipo
Regla de deducción	Regla de tipaje
$A \Rightarrow B$	$A \rightarrow B$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash t : A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash (t)u : B}$

Identificación de pruebas y programas

- Modelo subyacente : Tarski (a.k.a. $\{0, 1\}$)
- Provabilidad : formulas sin sus pruebas

Identificación de pruebas y programas

Teoría de la demostración	**Prog. funcional**
Proposición	Tipo
Regla de deducción	Regla de tipaje
$A \Rightarrow B$	$A \to B$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash t : A \to B \qquad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash (t)u : B}$

Realizabilidad de Krivine

- Relajación :

```
let stupid n =
           if n=n+1 then 27 else true
```

- ¿Y la lógica clásica ?

Griffin, 1990

$$\text{cc} : ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

- Krivine :

  Valor de falsedad $\|A\|$

  Valor de verdad $|A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp}$

Realizabilidad de Krivine

- Relajación :

```
let stupid n =
           if n=n+1 then 27 else true
```

- ¿Y la lógica clásica ?

Griffin, 1990

$$\text{cc} : ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

- Krivine :

  Valor de falsedad $\|A\|$

  Valor de verdad $|A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp}$

Realizabilidad de Krivine

- Relajación :

```
let stupid n =
           if n=n+1 then 27 else true
```

- ¿Y la lógica clásica ?

Griffin, 1990

$$\mathtt{cc} : ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

- Krivine :

  Valor de falsedad $\|A\|$

  Valor de verdad $|A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp}$

Realizabilidad de Krivine

- Relajación :

```
let stupid n =
          if n=n+1 then 27 else true
```

- ¿Y la lógica clásica ?

Griffin, 1990

$$\text{cc} : ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

- Krivine :

  Valor de falsedad $\|A\|$

  Valor de verdad $|A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp}$

Realizabilidad de Krivine

- Relajación :

```
let stupid n =
           if n=n+1 then 27 else true
```

- ¿Y la lógica clásica ?

Griffin, 1990

$$\text{cc} : ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

- Krivine :

  Valor de falsedad $\|A\|$: oponentes
  Valor de verdad $|A| = \|A\|^{\perp\!\!\!\perp}$: defensores

λ_c-cálculo

Términos, pilas, procesos

$\mathcal{B}$: constantes de pilas

$\mathcal{C}$: instrucciones (cuyas cc), numerable

Términos	t, u	$::=$	$x \mid \lambda x.t \mid tu \mid \mathbf{k}_\pi \mid \kappa$	$\kappa \in \mathcal{C}$
Pilas	π	$::=$	$\alpha \mid t \cdot \pi$	$(\alpha \in \mathcal{B}, t$ cerrado$)$
Procesos	p, q	$::=$	$t \star \pi$	$(t$ cerrado$)$

KAM

$$\begin{array}{lcrcl}
\textsc{Push} & : & tu \star \pi & \succ & t \star u \cdot \pi \\
\textsc{Grab} & : & \lambda x.t \star u \cdot \pi & \succ & t\{x := u\} \star \pi \\
\textsc{Save} & : & \text{cc} \star t \cdot \pi & \succ & t \star \mathbf{k}_\pi \cdot \pi \\
\textsc{Restore} & : & \mathbf{k}_\pi \star t \cdot \rho & \succ & t \star \pi
\end{array}$$

λ_c-cálculo

Términos, pilas, procesos

$\mathcal{B}$: constantes de pilas

$\mathcal{C}$: instrucciones (cuyas cc), numerable

Términos	t, u	$::=$	$x \mid \lambda x.t \mid tu \mid \mathbf{k}_\pi \mid \kappa$	$\kappa \in \mathcal{C}$
Pilas	π	$::=$	$\alpha \mid t \cdot \pi$	$(\alpha \in \mathcal{B}, t$ cerrado$)$
Procesos	p, q	$::=$	$t \star \pi$	$(t$ cerrado$)$

KAM

$$\begin{array}{rcrcl}
\textsc{Push} & : & tu \star \pi & \succ & t \star u \cdot \pi \\
\textsc{Grab} & : & \lambda x.t \star u \cdot \pi & \succ & t\{x := u\} \star \pi \\
\textsc{Save} & : & \text{cc} \star t \cdot \pi & \succ & t \star \mathbf{k}_\pi \cdot \pi \\
\textsc{Restore} & : & \mathbf{k}_\pi \star t \cdot \rho & \succ & t \star \pi
\end{array}$$

λ_c-cálculo

Términos, pilas, procesos

$\mathcal{B}$: constantes de pilas

$\mathcal{C}$: instrucciones (cuyas cc), numerable

$$
\begin{array}{llcll}
\textbf{Términos} & t,u & ::= & x \mid \lambda x.t \mid tu \mid \mathbf{k}_\pi \mid \kappa & \kappa \in \mathcal{C} \\
\textbf{Pilas} & \pi & ::= & \alpha \mid t\cdot\pi & (\alpha \in \mathcal{B}, t \text{ cerrado}) \\
\textbf{Procesos} & p,q & ::= & t \star \pi & (t \text{ cerrado})
\end{array}
$$

KAM

$$
\begin{array}{rcrcl}
\textsc{Push} & : & tu \star \pi & \succ & t \star u \cdot \pi \\
\textsc{Grab} & : & \lambda x.t \star u \cdot \pi & \succ & t\{x := u\} \star \pi \\
\textsc{Save} & : & \text{cc} \star t \cdot \pi & \succ & t \star \mathbf{k}_\pi \cdot \pi \\
\textsc{Restore} & : & \mathbf{k}_\pi \star t \cdot \rho & \succ & t \star \pi
\end{array}
$$

Aritmética de secundo orden

Lenguaje

Expresiones	e	$::=$	$x \mid f(e_1,\ldots,e_k)$
Formulas	A, B	$::=$	$X(e_1,\ldots,e_k) \mid A \Rightarrow B \mid \forall x A \mid \forall X A$

Abreviaciones :

$$
\begin{array}{rcl}
\bot & \equiv & \forall Z.Z \\
\neg A & \equiv & A \Rightarrow \bot \\
A \wedge B & \equiv & \forall Z((A \Rightarrow B \Rightarrow Z) \Rightarrow Z) \\
A \vee B & \equiv & \forall Z((A \Rightarrow Z) \Rightarrow (B \Rightarrow Z) \Rightarrow Z) \\
A \Leftrightarrow B & \equiv & (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \\
\exists x A(x) & \equiv & \forall Z(\forall x(A(x) \Rightarrow Z) \Rightarrow Z) \\
\exists X A(X) & \equiv & \forall Z(\forall X(A(X) \Rightarrow Z) \Rightarrow Z) \\
e_1 = e_2 & \equiv & \forall Z(Z(e_1) \Rightarrow Z(e_2))
\end{array}
$$

Aritmética de secundo orden

Lenguaje

$$
\begin{array}{llll}
\textbf{Expresiones} & e & ::= & x \mid f(e_1, \ldots, e_k) \\
\textbf{Formulas} & A, B & ::= & X(e_1, \ldots, e_k) \mid A \Rightarrow B \mid \forall x A \mid \forall X A
\end{array}
$$

Abreviaciones :

$$
\begin{array}{rcl}
\bot & \equiv & \forall Z.Z \\
\neg A & \equiv & A \Rightarrow \bot \\
A \wedge B & \equiv & \forall Z((A \Rightarrow B \Rightarrow Z) \Rightarrow Z) \\
A \vee B & \equiv & \forall Z((A \Rightarrow Z) \Rightarrow (B \Rightarrow Z) \Rightarrow Z) \\
A \Leftrightarrow B & \equiv & (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \\
\exists x A(x) & \equiv & \forall Z(\forall x(A(x) \Rightarrow Z) \Rightarrow Z) \\
\exists X A(X) & \equiv & \forall Z(\forall X(A(X) \Rightarrow Z) \Rightarrow Z) \\
e_1 = e_2 & \equiv & \forall Z(Z(e_1) \Rightarrow Z(e_2))
\end{array}
$$

Reglas de tipaje

$$\frac{}{\Gamma \vdash x : A}\ (x : A) \in \Gamma \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t : \top}\ FV(t) \subset \mathrm{dom}(\Gamma)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash t : A}{\Gamma \vdash tu : B} \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x.t : A \Rightarrow B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A}{\Gamma \vdash t : \forall x.A}\ x \notin FV(\Gamma) \qquad \frac{\Gamma \vdash t : \forall x.A}{\Gamma \vdash t : A\{x := e\}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A}{\Gamma \vdash t : \forall X.A}\ X \notin FV(\Gamma) \qquad \frac{\Gamma \vdash t : \forall X.A}{\Gamma \vdash t : A\{X(x_1, \ldots, x_k) := B\}}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{cc} : ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}$$

Semántica

Polo

$\perp\!\!\!\perp \subset \Lambda_c \star \Pi$ cerrado por anti-reducción :

$$\forall p, p' \in \Lambda_c \star \Pi : \quad (p \succ p') \wedge (p' \in \perp\!\!\!\perp) \Rightarrow p \in \perp\!\!\!\perp$$

Valor de verdad:

$$S^{\perp\!\!\!\perp} = \{t \in \Lambda_c : \forall \pi \in S, t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\}$$

Valor de falsedad :

- $\|\dot{F}(e_1, ..., e_k)\| = F([\![e_1]\!], \ldots, [\![e_k]\!])$
- $\|A \Rightarrow B\| = \{t \cdot \pi : t \in |A| \text{ et } \pi \in \|B\|\}$
- $\|\forall x A\| = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \|A\{x := n\}\|$
- $\|\forall X A\| = \bigcup_{\dot{F}:\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Pi)} \|A\{X := \dot{F}\}\|$

Semántica

Polo

$\perp\!\!\!\perp \subset \Lambda_c \star \Pi$ cerrado por anti-reducción :

$$\forall p, p' \in \Lambda_c \star \Pi : \quad (p \succ p') \wedge (p' \in \perp\!\!\!\perp) \Rightarrow p \in \perp\!\!\!\perp$$

Valor de verdad:

$$S^{\perp\!\!\!\perp} = \{t \in \Lambda_c : \forall \pi \in S, t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\}$$

Valor de falsedad :

- $\|\dot{F}(e_1, ..., e_k)\| = F(\llbracket e_1 \rrbracket, \ldots, \llbracket e_k \rrbracket)$
- $\|A \Rightarrow B\| = \{t \cdot \pi : t \in |A| \text{ et } \pi \in \|B\|\}$
- $\|\forall x A\| = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \|A\{x := n\}\|$
- $\|\forall X A\| = \bigcup_{\dot{F}:\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Pi)} \|A\{X := \dot{F}\}\|$

Semántica

Polo

$\perp\!\!\!\perp \subset \Lambda_c \star \Pi$ cerrado por anti-reducción :

$$\forall p, p' \in \Lambda_c \star \Pi : \quad (p \succ p') \wedge (p' \in \perp\!\!\!\perp) \Rightarrow p \in \perp\!\!\!\perp$$

Valor de verdad:

$$S^{\perp\!\!\!\perp} = \{t \in \Lambda_c : \forall \pi \in S, t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp\}$$

Valor de falsedad :

- $\|\dot{F}(e_1, ..., e_k)\| = F([\![e_1]\!], \ldots, [\![e_k]\!])$
- $\|A \Rightarrow B\| = \{t \cdot \pi : t \in |A| \text{ et } \pi \in \|B\|\}$
- $\|\forall x A\| = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \|A\{x := n\}\|$
- $\|\forall X A\| = \bigcup_{\dot{F}:\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Pi)} \|A\{X := \dot{F}\}\|$

Polo

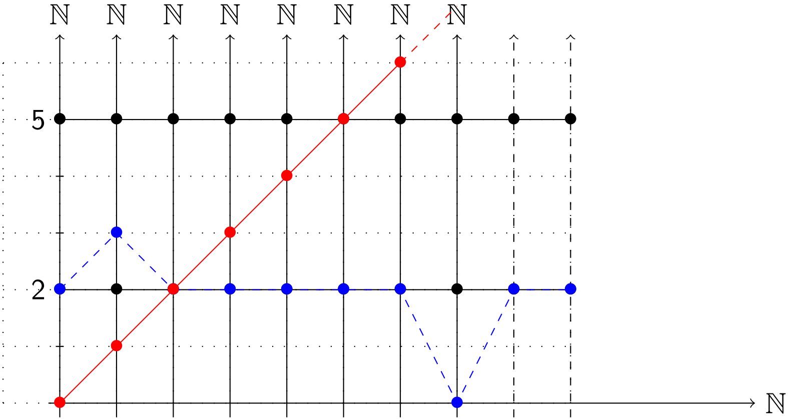
$\perp\!\!\!\perp \subset \Lambda_c \star \Pi$ cerrado par anti-reducción:

$$\forall p, p' \in \Lambda_c \star \Pi : \quad (p \succ p') \wedge (p' \in \perp\!\!\!\perp) \Rightarrow p \in \perp\!\!\!\perp$$

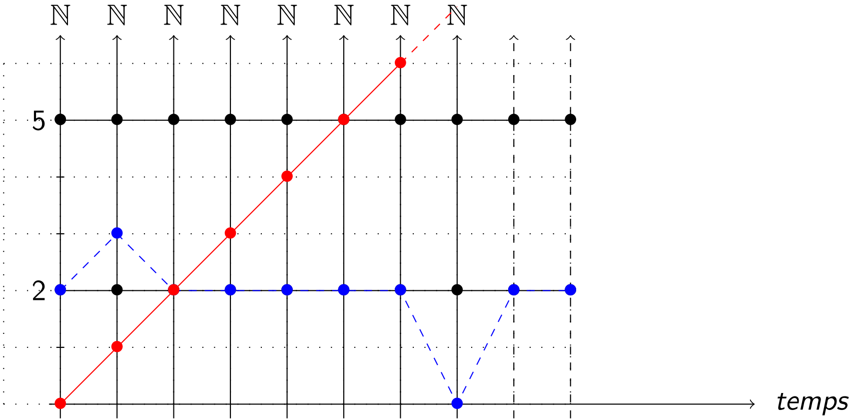
Lema de adecuación

Si $x_1 : A_1, \ldots, x_k : A_k \vdash t : A$ y $t_i \Vdash A_i$ para todo $1 \leq i \leq k$ entonces $t[t_1/x_1, \ldots, t_k/x_k] \Vdash A$

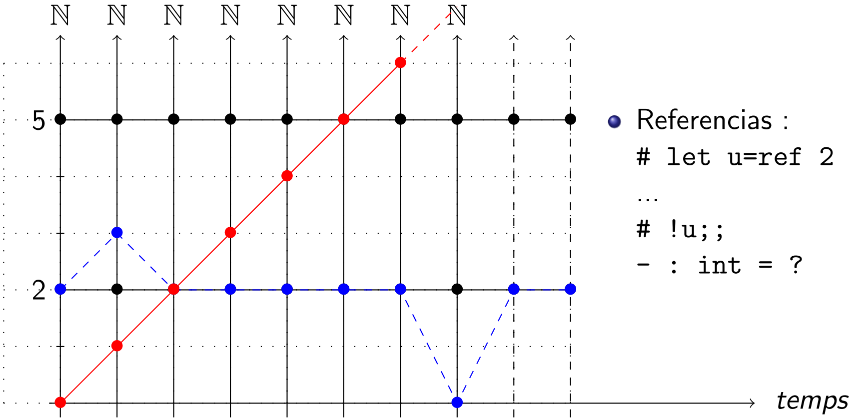
Intuición



Intuición



Intuición



- Referencias :

```
# let u=ref 2 ;;
...
# !u;;
- : int = ?
```

λ_c-cálculo con estados

$\mathcal{S}$: conjunto de estados, infinito, numerable, ordenado

$$
\begin{array}{rcrcl}
\textsc{Push} & : & tu \star \pi \star s & \succ & t \star u \cdot \pi \star s \\
\textsc{Grab} & : & \lambda x.t \star u \cdot \pi \star s & \succ & t\{x := u\} \star \pi \star s \\
\textsc{Save} & : & \text{cc} \star t \cdot \pi \star s & \succ & t \star \mathbf{k}_\pi \cdot \pi \star s \\
\textsc{Restore} & : & \mathbf{k}_\pi \star t \cdot \rho \star s & \succ & t \star \pi \star s \\
\textsc{Get} & : & \mathbf{get} \star u \cdot \pi \star s & \succ & u \star \bar{s} \cdot \pi \star s \\
\textsc{Set} & : & \mathbf{set} \star \bar{s} \cdot u \cdot \pi \star s' & \succ & u \star \pi \star \text{máx}(s, s')
\end{array}
$$

Semántica

Valor de falsedad: $\mathcal{P}(\Pi)^{\mathcal{S}}$
Valor de verdad : $\mathcal{P}(\Lambda)^{\mathcal{S}}$
Polos : colaje $(\perp\!\!\!\perp_s)_{s\in\mathcal{S}}$?

$\rightarrow \quad \{t\star\pi\star s : t\star\pi \in \perp\!\!\!\perp_s\} \subset \perp\!\!\!\perp$ cerrado por anti-reducción

Términos : $\mathbf{\Lambda} := \Lambda \times \mathcal{S}$
Pilas: $\mathbf{\Pi} := \Pi \times \mathcal{S}$
Ortogonalidad :

$$(t,s)\perp\!\!\!\perp(\pi,s') := (s = s' \Rightarrow t\star\pi\star s \in \perp\!\!\!\perp)$$

Semántica

Valor de falsedad: $\mathcal{P}(\Pi)^{\mathcal{S}} \equiv \mathcal{P}(\Pi \times \mathcal{S})$
Valor de verdad : $\mathcal{P}(\Lambda)^{\mathcal{S}} \equiv \mathcal{P}(\Lambda \times \mathcal{S})$
Polos : colaje $(\perp\!\!\!\perp_s)_{s\in\mathcal{S}}$?

$\rightarrow \quad \{t \star \pi \star s : t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp_s\} \subset \perp\!\!\!\perp$ cerrado por anti-reducción

Términos : $\mathbf{\Lambda} := \Lambda \times \mathcal{S}$
Pilas: $\mathbf{\Pi} := \Pi \times \mathcal{S}$
Ortogonalidad :

$$(t, s) \perp\!\!\!\perp (\pi, s') := (s = s' \Rightarrow t \star \pi \star s \in \perp\!\!\!\perp)$$

Semántica

Valor de falsedad: $\mathcal{P}(\Pi)^{\mathcal{S}} \quad \equiv \quad \mathcal{P}(\Pi \times \mathcal{S})$
Valor de verdad : $\mathcal{P}(\Lambda)^{\mathcal{S}} \quad \equiv \quad \mathcal{P}(\Lambda \times \mathcal{S})$
Polos : colaje $(\perp\!\!\!\perp_s)_{s\in\mathcal{S}}$?

$\rightarrow \quad \{t \star \pi \star s : t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp_s\} \subset \perp\!\!\!\perp$ cerrado por anti-reducción

Términos : $\boldsymbol{\Lambda} := \Lambda \times \mathcal{S}$
Pilas: $\boldsymbol{\Pi} := \Pi \times \mathcal{S}$
Ortogonalidad :

$$(t,s)\perp\!\!\!\perp(\pi,s') := (s = s' \Rightarrow t \star \pi \star s \in \perp\!\!\!\perp)$$

Semántica

Valor de falsedad: $\mathcal{P}(\Pi)^{\mathcal{S}} \quad \equiv \quad \mathcal{P}(\Pi \times \mathcal{S})$
Valor de verdad : $\mathcal{P}(\Lambda)^{\mathcal{S}} \quad \equiv \quad \mathcal{P}(\Lambda \times \mathcal{S})$
Polos : colaje $(\perp\!\!\!\perp_s)_{s\in\mathcal{S}}$?

$\rightarrow \quad \{t \star \pi \star s : t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp_s\} \subset \perp\!\!\!\perp$ cerrado por anti-reducción

Términos : $\boldsymbol{\Lambda} := \Lambda \times \mathcal{S}$
Pilas: $\boldsymbol{\Pi} := \Pi \times \mathcal{S}$
Ortogonalidad :

$$(t, s) \perp\!\!\!\perp (\pi, s') := (s = s' \Rightarrow t \star \pi \star s \in \perp\!\!\!\perp)$$

Semántica

$$\textbf{Individuos :}\ (x_s)_{s\in\mathcal{S}} \quad \equiv \quad x : \mathcal{S} \to \mathbb{N}$$
$$\textbf{Predicados :}\ (X_s)_{s\in\mathcal{S}} \quad \equiv \quad X : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbf{\Pi})$$

Aplicación

$$F@(x_1,\dots,x_k) = \{(\pi,s) : \pi \in F^s(x_1(s),\dots,x_k(s))\}$$

$$\|\dot{F}(e_1,...,e_k)\| = F@([\![e_1]\!],\dots,[\![e_k]\!])$$
$$\|A \Rightarrow B\| = \{(t\cdot\pi,s) : (t,s)\in|A| \mathrm{et} (\pi,s)\in\|B\|\}$$
$$\|\{x\}\Rightarrow A\| = \{(\bar{n}\cdot\pi,s) : x(s) = n \text{ et } (\pi,s)\in\|A\|\}$$
$$\|\forall x A\| = \bigcup_{f\in\mathbb{N}^{\mathcal{S}}} \|A\{x := f\}\|$$
$$\|\forall X A\| = \bigcup_{\dot{F}:\mathbb{N}^k\to\mathcal{P}(\mathbf{\Pi})} \|A\{X := \dot{F}\}\|$$

Semántica

Individuos : $(x_s)_{s\in\mathcal{S}} \quad \equiv \quad x : \mathcal{S} \to \mathbb{N}$
Predicados : $(X_s)_{s\in\mathcal{S}} \quad \equiv \quad X : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\Pi)$

Aplicación

Si $F : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\Pi \times \mathcal{S})$, $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}}$:

$$F@(x_1, \ldots, x_k) = \{(\pi, s) : \pi \in F^s(x_1(s), \ldots, x_k(s))\}$$

$$\|\dot{F}(e_1, ..., e_k)\| = F@([\![e_1]\!], \ldots, [\![e_k]\!])$$

$$\|A \Rightarrow B\| = \{(t \cdot \pi, s) : (t, s) \in |A| \mathrm{et} (\pi, s) \in \|B\|\}$$

$$\|\{x\} \Rightarrow A\| = \{(\bar{n} \cdot \pi, s) : x(s) = n \text{ et } (\pi, s) \in \|A\|\}$$

$$\|\forall x A\| = \bigcup_{f \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}}} \|A\{x := f\}\|$$

$$\|\forall X A\| = \bigcup \|A\{X := \dot{F}\}\|$$

Semántica

$$\textbf{Individuos :}\ (x_s)_{s\in\mathcal{S}} \quad\equiv\quad x:\mathcal{S}\to\mathbb{N}$$
$$\textbf{Predicados :}\ (X_s)_{s\in\mathcal{S}} \quad\equiv\quad X:\mathbb{N}^k\to\mathcal{P}(\mathbf{\Pi})$$

Aplicación

$$F@(x_1,\dots,x_k) = \{(\pi,s) : \pi\in F^s(x_1(s),\dots,x_k(s))\}$$

$$\begin{aligned}
\|\dot{F}(e_1,...,e_k)\| &= F@([\![e_1]\!],\dots,[\![e_k]\!])\\
\|A\Rightarrow B\| &= \{(t\cdot\pi,s) : (t,s)\in|A|\mathrm{et}(\pi,s)\in\|B\|\}\\
\|\{x\}\Rightarrow A\| &= \{(\bar{n}\cdot\pi,s) : x(s)=n\ \mathrm{et}\ (\pi,s)\in\|A\|\}\\
\|\forall xA\| &= \bigcup_{f\in\mathbb{N}^{\mathcal{S}}}\|A\{x:=f\}\|\\
\|\forall XA\| &= \bigcup_{\dot{F}:\mathbb{N}^k\to\mathcal{P}(\mathbf{\Pi})}\|A\{X:=\dot{F}\}\|
\end{aligned}$$

Predicado estándar

Lema de colaje

A **interna**:

1. $(\pi, s) \in \|A\| \Leftrightarrow \pi \in \|A^s\|_s$
2. $(t, s) \in \|A\| \Leftrightarrow t \in |A^s|_s$

$$\|\mathrm{st}(x) \mapsto A\| = \begin{cases} \|A\| & \text{si } x \text{ estándar} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

Predicado estándar

Lema de colaje

A **interna**:

1. $(\pi, s) \in \|A\| \Leftrightarrow \pi \in \|A^s\|_s$
2. $(t, s) \in \|A\| \Leftrightarrow t \in |A^s|_s$

Definición

Un individuo f es *estándar* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall s \in \mathcal{S}, f(s) = n$.

Añadimos un predidado :

$$\|\mathrm{st}(x) \mapsto A\| = \begin{cases} \|A\| & \text{si } x \text{ estándar} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

Predicado estándar

Lema de colaje

A **interna**:

1. $(\pi, s) \in \|A\| \Leftrightarrow \pi \in \|A^s\|_s$
2. $(t, s) \in \|A\| \Leftrightarrow t \in |A^s|_s$

Añadimos un predidado :

$$\|\mathrm{st}(x) \mapsto A\| = \begin{cases} \|A\| & \text{si } x \text{ estándar} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

Obs: colaje falso para $A(x) := (\mathrm{st}(x) \mapsto \bot) \Rightarrow \bot$ (externa)

Predicado estándar

Lema de colaje

A **interna**:

1. $(\pi, s) \in \|A\| \Leftrightarrow \pi \in \|A^s\|_s$
2. $(t, s) \in \|A\| \Leftrightarrow t \in |A^s|_s$

$$\|\mathrm{st}(x) \mapsto A\| = \begin{cases} \|A\| & \text{si } x \text{ estándar} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

Lema de transferencia

A interne, $s \in \mathcal{S}$:

1. $(\lambda x.x, s) \Vdash \forall x A(x) \Rightarrow \forall^{\mathrm{st}} x A(x)$
2. $(\lambda x.x, s) \Vdash \forall^{\mathrm{st}} x A(x) \Rightarrow \forall x A(x)$

Adecuación

Lema de adecuación

Las reglas de tipaje son validas, salvo la eliminación de secundo orden.

Demostración

Colaje

Explicación:

$$\frac{\Gamma \vdash t : \forall X.A}{\Gamma \vdash t : A\{X(x_1, \ldots, x_k) := B\}}$$

$$X : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\Pi) \text{ aunque } B : (\mathbb{N}^{\mathcal{S}})^k \to \mathcal{P}(\Pi)$$

Valido si:

- B interna (colaje)
- B proposición ($k = 0$)

Adecuación

Lema de adecuación

Las reglas de tipaje son validas, salvo la eliminación de secundo orden.

Explicación:

$$\frac{\Gamma \vdash t : \forall X.A}{\Gamma \vdash t : A\{X(x_1,\dots,x_k) := B\}}$$

$$X : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbf{\Pi}) \text{ aunque } B : (\mathbb{N}^{\mathcal{S}})^k \to \mathcal{P}(\mathbf{\Pi})$$

Valido si:

- B interna (colaje)
- B proposición ($k = 0$)

Adecuación

Lema de adecuación

Las reglas de tipaje son validas, salvo la eliminación de secundo orden.

Explicación:

$$\frac{\Gamma \vdash t : \forall X.A}{\Gamma \vdash t : A\{X(x_1,\dots,x_k) := B\}}$$

$$X : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbf{\Pi}) \text{ aunque } B : (\mathbb{N}^{\mathcal{S}})^k \to \mathcal{P}(\mathbf{\Pi})$$

Valido si:

- B interna (colaje)
- B proposición ($k = 0$)

Inducción

$$
\begin{array}{rrcl}
\textsc{Succ}: & \mathbf{succ} \star \bar{n} \cdot t \cdot \pi \star s & \succ & t \star \overline{s(n)} \cdot \pi \star s \\
\textsc{Rec0}: & \mathbf{rec} \star z \cdot f \cdot \bar{0} \cdot \pi \star s & \succ & z \star \pi \star s \\
\textsc{Rec}: & \mathbf{rec} \star z \cdot f \cdot \overline{s(n)} \cdot \pi \star s & \succ & f \star \bar{n} \cdot (\mathbf{rec}\ z\ f\ \bar{n}) \cdot \pi \star s
\end{array}
$$

Proposición

A formula interna, $s \in \mathcal{S}$:

1. $(\lambda x.(x\bar{0}), s) \Vdash (\{0\} \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot$
2. $(\mathbf{succ}, s) \Vdash \forall x(\{x\} \Rightarrow (\{s(x)\} \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot)$
3. $(\mathbf{rec}, s) \Vdash A(0) \Rightarrow \forall y(\{y\} \Rightarrow A(y) \Rightarrow A(s(y)) \Rightarrow \forall x(\{x\} \Rightarrow A(x))$

Inducción

$$\begin{array}{rrcl}
\textsc{Succ}: & \mathbf{succ} \star \bar{n} \cdot t \cdot \pi \star s & \succ & t \star \overline{s(n)} \cdot \pi \star s \\
\textsc{Rec0}: & \mathbf{rec} \star z \cdot f \cdot \bar{0} \cdot \pi \star s & \succ & z \star \pi \star s \\
\textsc{Rec}: & \mathbf{rec} \star z \cdot f \cdot \overline{s(n)} \cdot \pi \star s & \succ & f \star \bar{n} \cdot (\mathbf{rec}\ z\ f\ \bar{n}) \cdot \pi \star s
\end{array}$$

Proposición

A formula interna, $s \in \mathcal{S}$:

1. $(\lambda x.(x\bar{0}), s) \Vdash (\{0\} \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot$
2. $(\mathbf{succ}, s) \Vdash \forall x(\{x\} \Rightarrow (\{s(x)\} \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot)$
3. $(\mathbf{rec}, s) \Vdash A(0) \Rightarrow \forall y(\{y\} \Rightarrow A(y) \Rightarrow A(s(y)) \Rightarrow \forall x(\{x\} \Rightarrow A(x))$

Inducción

$$\begin{array}{lrcl} \textsc{Succ}: & \mathbf{succ} \star \bar{n} \cdot t \cdot \pi \star s & \succ & t \star \overline{s(n)} \cdot \pi \star s \\ \textsc{Rec0}: & \mathbf{rec} \star z \cdot f \cdot \bar{0} \cdot \pi \star s & \succ & z \star \pi \star s \\ \textsc{Rec}: & \mathbf{rec} \star z \cdot f \cdot \overline{s(n)} \cdot \pi \star s & \succ & f \star \overline{n} \cdot (\mathbf{rec}\ z\ f\ \overline{n}) \cdot \pi \star s \end{array}$$

Proposición

A formula interna, $s \in \mathcal{S}$:

1. $(\lambda x.(x\bar{0}), s) \Vdash (\{0\} \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot$
2. $(\mathbf{succ}, s) \Vdash \forall x(\{x\} \Rightarrow (\{s(x)\} \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot)$
3. $(\mathbf{rec}, s) \Vdash A(0) \Rightarrow \forall y(\{y\} \Rightarrow A(y) \Rightarrow A(s(y)) \Rightarrow \forall x(\{x\} \Rightarrow A(x))$

Demostración

Colaje de $\|\{x\} \Rightarrow A\| = \{(\bar{n} \cdot \pi, s) : x(s) = n \text{ et } (\pi, s) \in \|A\|\}$

Inducción

$$\begin{array}{rrcl} \textsc{Succ}: & \mathbf{succ} \star \bar{n} \cdot t \cdot \pi \star s & \succ & t \star \overline{s(n)} \cdot \pi \star s \\ \textsc{Rec0}: & \mathbf{rec} \star z \cdot f \cdot \bar{0} \cdot \pi \star s & \succ & z \star \pi \star s \\ \textsc{Rec}: & \mathbf{rec} \star z \cdot f \cdot \overline{s(n)} \cdot \pi \star s & \succ & f \star \bar{n} \cdot (\mathbf{rec}\ z\ f\ \bar{n}) \cdot \pi \star s \end{array}$$

Proposición

A formula interna, $s \in \mathcal{S}$:

1. $(\lambda x.(x\bar{0}), s) \Vdash (\{0\} \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot$
2. $(\mathbf{succ}, s) \Vdash \forall x(\{x\} \Rightarrow (\{s(x)\} \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot)$
3. $(\mathbf{rec}, s) \Vdash A(0) \Rightarrow \forall y(\{y\} \Rightarrow A(y) \Rightarrow A(s(y)) \Rightarrow \forall x(\{x\} \Rightarrow A(x))$

Proposición

$$(\mathbf{get}, s) \Vdash (\{\iota\} \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot \qquad \iota : s \mapsto s$$

Definiciones

$$f \sim g := \exists s_0, \forall s \geq s_0 (f(s) = g(s))$$

Definiciones

$$\|A\|^* = \{\pi : \exists s_\pi, \forall s \geq s_\pi, (\pi, s) \in \|A\|\}$$
$$|A|^* = \{t : \exists s_t, \forall s \geq s_t, (t, s) \in |A|\}$$

Testigo : $t \Vdash^* A$

$\forall \pi \in \|A\|^*$, existe s_t tal que $\forall s \geq s_t, t \star \pi \star s \in \perp\!\!\!\perp$

Definiciones

$$f \sim g := \exists s_0, \forall s \geq s_0 (f(s) = g(s))$$

Definiciones

$$\begin{array}{rcl} \|A\|^* & = & \{\pi : \exists s_\pi, \forall s \geq s_\pi, (\pi, s) \in \|A\|\} \\ |A|^* & = & \{t : \exists s_t, \forall s \geq s_t, (t, s) \in |A|\} \end{array}$$

Testigo : $t \Vdash^* A$

$\forall \pi \in \|A\|^*$, existe s_t tal que $\forall s \geq s_t, t \star \pi \star s \in \perp\!\!\!\perp$

Definiciones

Definiciones

$$\begin{array}{rcl} \|A\|^* & = & \{\pi : \exists s_\pi, \forall s \geq s_\pi, (\pi, s) \in \|A\|\} \\ |A|^* & = & \{t : \exists s_t, \forall s \geq s_t, (t, s) \in |A|\} \end{array}$$

Testigo : $t \Vdash^* A$

$$\forall \pi \in \|A\|^*, \text{ existe } s_t \text{ tal que } \forall s \geq s_t, t \star \pi \star s \in \perp\!\!\!\perp$$

Propiedades

1. $\|A \Rightarrow B\|^* = |A|^* \cdot \|B\|^*$
2. $\bigcup_{f \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}}} \|A\{x := f\}\|^* = \|\forall x A\|^*$ et $|\forall x A|^* = \bigcap_{f \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}}} |A\{x := f\}|^*$
3. $\|\{f\} \Rightarrow A\|^* = \{\bar{n} \cdot \pi : \pi \in \|A\|^*,\ f \sim n^*\}$

Definiciones

Definiciones

$$
\begin{array}{rcl}
\|A\|^* & = & \{\pi : \exists s_\pi, \forall s \geq s_\pi, (\pi, s) \in \|A\|\} \\
|A|^* & = & \{t : \exists s_t, \forall s \geq s_t, (t, s) \in |A|\}
\end{array}
$$

Testigo : $t \Vdash^* A$

$\forall \pi \in \|A\|^*$, existe s_t tal que $\forall s \geq s_t, t \star \pi \star s \in \perp\!\!\!\perp$

Problema

- $(t \Vdash^* A) \quad \not\Rightarrow \quad t \in |A|^*$
- $(t \Vdash^* A \Rightarrow B) \wedge (u \Vdash^* A) \quad \not\Rightarrow \quad tu \Vdash^* B$

Resultados preservados

Propiedades

- Si $\forall s \in \mathcal{S}, (t,s) \in |A|$ entonces $t \in |A|^*$
- Si $t \in |A|^*$ entonces $t \Vdash^* A$

Corolarios :

Resultados preservados

Propiedades

- Si $\forall s \in \mathcal{S},\ (t,s) \in |A|$ entonces $t \in |A|^*$
- Si $t \in |A|^*$ entonces $t \Vdash^* A$

Corolarios :

Adecuación

Si A es una formula interna y $\vdash t : A$, entonces $t \Vdash^* A$

Resultados preservados

Propiedades

- Si $\forall s \in \mathcal{S}, (t,s) \in |A|$ entonces $t \in |A|^*$
- Si $t \in |A|^*$ entonces $t \Vdash^* A$

Corolarios :

Adecuación

Si A es una formula interna y $\vdash t : A$, entonces $t \Vdash^* A$

Transferencia

1. $|\forall x A(x)|^* = |\forall^{\mathrm{st}} x A(x)|^*$ y $\|\forall^{\mathrm{st}} x A(x)\|^* = \|\forall x A(x)\|^*$
2. $\lambda x.x \in |\forall x A(x) \Rightarrow \forall^{\mathrm{st}} x A(x)|^*$ y $\lambda x.x \in |\forall^{\mathrm{st}} x A(x) \Rightarrow \forall x A(x)|^*$

Resultados preservados

Propiedades

- Si $\forall s \in \mathcal{S}$, $(t, s) \in |A|$ entonces $t \in |A|^*$
- Si $t \in |A|^*$ entonces $t \Vdash^* A$

Corolarios :

Inducción

A formula interna:

1. $\lambda x.(x\bar{0}) \in |(\{0\} \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot|^*$
2. **succ** $\in |\forall x(\{x\} \Rightarrow (\{s(x)\} \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot)|^*$
3. **rec** $\in |A(0) \Rightarrow \forall y(\{y\} \Rightarrow A(y) \Rightarrow A(s(y)) \Rightarrow \forall x(\{x\} \Rightarrow A(x))|^*$

Idealización (1/2)

$$\forall^{\text{st}} n \exists^{\text{st}} x \forall^{\text{st}} y (y \leq n \Rightarrow R(x,y)) \Rightarrow \exists x \forall^{\text{st}} y R(x,y) \qquad \text{(I')}$$

Demostración :

$(\bar{n} \cdot u \cdot \pi) : \forall s \geq s_\pi, (u, s) \in |\iota > n^* \mapsto \bot|$

$$\lambda n.(\mathbf{succ}\ n\ \mathbf{set}) \star \bar{n} \cdot u \cdot \pi \star s$$

Idealización (1/2)

$$\forall^{\mathrm{st}} n \exists^{\mathrm{st}} x \forall^{\mathrm{st}} y (y \leq n \Rightarrow R(x,y)) \Rightarrow \exists x \forall^{\mathrm{st}} y R(x,y) \qquad (\mathrm{I}')$$

Proposición

$\lambda n.(\mathbf{succ}\ n\ \mathbf{set}) \Vdash^{*} \forall^{\{\overline{\mathrm{st}}\}} y((\iota > y \mapsto \bot) \Rightarrow \bot) \qquad \iota : s \mapsto s$

Demostración :

$(\bar{n} \cdot u \cdot \pi) : \forall s \geq s_\pi, (u,s) \in |\iota > n^{*} \mapsto \bot|$

$$\lambda n.(\mathbf{succ}\ n\ \mathbf{set}) \star \bar{n} \cdot u \cdot \pi \star s$$

Idealización (1/2)

$$\forall^{\mathrm{st}} n \exists^{\mathrm{st}} x \forall^{\mathrm{st}} y (y \leq n \Rightarrow R(x,y)) \Rightarrow \exists x \forall^{\mathrm{st}} y R(x,y) \qquad \text{(I')}$$

Proposición

$\lambda n.(\mathbf{succ}\ n\ \mathbf{set}) \Vdash^* \forall^{\{\mathrm{st}\}} y((\iota > y \mapsto \bot) \Rightarrow \bot) \qquad \iota : s \mapsto s$

Demostración :

$(\bar{n} \cdot u \cdot \pi) : \forall s \geq s_\pi, (u,s) \in |\iota > n^* \mapsto \bot|$

$$\lambda n.(\mathbf{succ}\ n\ \mathbf{set}) \star \bar{n} \cdot u \cdot \pi \star s$$

Idealización (1/2)

$$\forall^{\mathrm{st}} n \exists^{\mathrm{st}} x \forall^{\mathrm{st}} y (y \leq n \Rightarrow R(x,y)) \Rightarrow \exists x \forall^{\mathrm{st}} y R(x,y) \qquad \text{(I')}$$

Proposición

$$\lambda n.(\mathbf{succ}\ n\ \mathbf{set}) \Vdash^{*} \forall^{\{\mathrm{st}\}} y((\iota > y \mapsto \bot) \Rightarrow \bot) \qquad \iota : s \mapsto s$$

Demostración :

$(\bar{n} \cdot u \cdot \pi) : \forall s \geq s_\pi, (u,s) \in |\iota > n^* \mapsto \bot|$

$$\lambda n.(\mathbf{succ}\ n\ \mathbf{set}) \star \bar{n} \cdot u \cdot \pi \star s \succ \mathbf{succ} \star \bar{n} \cdot \mathbf{set} \cdot u \cdot \pi \star s$$

Idealización (1/2)

$$\forall^{\mathrm{st}} n \exists^{\mathrm{st}} x \forall^{\mathrm{st}} y (y \leq n \Rightarrow R(x,y)) \Rightarrow \exists x \forall^{\mathrm{st}} y R(x,y) \qquad \text{(I')}$$

Proposición

$$\lambda n.(\mathbf{succ}\ n\ \mathbf{set}) \Vdash^{*} \forall^{\{\mathrm{st}\}} y((\iota > y \mapsto \bot) \Rightarrow \bot) \qquad \iota : s \mapsto s$$

Demostración :

$(\bar{n} \cdot u \cdot \pi) : \forall s \geq s_\pi, (u,s) \in |\iota > n^* \mapsto \bot|$

$$\begin{aligned} \lambda n.(\mathbf{succ}\ n\ \mathbf{set}) \star \bar{n} \cdot u \cdot \pi \star s &\succ \mathbf{succ} \star \bar{n} \cdot \mathbf{set} \cdot u \cdot \pi \star s \\ &\succ \mathbf{set} \star \overline{s(n)} \cdot u \cdot \pi \star s \end{aligned}$$

Idealización (1/2)

$$\forall^{\mathrm{st}} n \exists^{\mathrm{st}} x \forall^{\mathrm{st}} y (y \leq n \Rightarrow R(x,y)) \Rightarrow \exists x \forall^{\mathrm{st}} y R(x,y) \qquad (\mathrm{I}')$$

Proposición

$\lambda n.(\textbf{succ}\ n\ \textbf{set}) \Vdash^* \forall^{\{\mathrm{st}\}} y((\iota > y \mapsto \bot) \Rightarrow \bot) \qquad \iota : s \mapsto s$

Demostración :

$(\bar{n} \cdot u \cdot \pi) : \forall s \geq s_\pi, (u,s) \in |\iota > n^* \mapsto \bot|$

$$\begin{aligned} \lambda n.(\textbf{succ}\ n\ \textbf{set}) \star \bar{n} \cdot u \cdot \pi \star s &\succ \textbf{succ} \star \bar{n} \cdot \textbf{set} \cdot u \cdot \pi \star s \\ &\succ \textbf{set} \star \overline{s(n)} \cdot u \cdot \pi \star s \\ &\succ u \star \pi \star \text{máx}(s, s(n)) \in \perp\!\!\!\perp \end{aligned}$$

Idealización (1/2)

$$\forall^{\mathrm{st}} n \exists^{\mathrm{st}} x \forall^{\mathrm{st}} y (y \leq n \Rightarrow R(x,y)) \Rightarrow \exists x \forall^{\mathrm{st}} y R(x,y) \qquad \text{(I')}$$

Proposición

Si $\mathscr{M} \vDash \forall n \exists x \forall y (y \leq n \Rightarrow R(x,y))$, entonces existe $\tau \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}}$ t.q. $\lambda n.(\mathbf{succ}\ n\ \mathbf{set}) \Vdash^{*} \forall^{\{\mathrm{st}\}} y ((\tau > y \mapsto \bot) \Rightarrow \bot)$

Demostración :

$(\bar{n} \cdot u \cdot \pi) : \forall s \geq s_\pi, (u,s) \in |\iota > n^* \mapsto \bot|$

$$\begin{aligned} \lambda n.(\mathbf{succ}\ n\ \mathbf{set}) \star \bar{n} \cdot u \cdot \pi \star s &\succ \mathbf{succ} \star \bar{n} \cdot \mathbf{set} \cdot u \cdot \pi \star s \\ &\succ \mathbf{set} \star \overline{s(n)} \cdot u \cdot \pi \star s \\ &\succ u \star \pi \star \mathrm{máx}(s, s(n)) \in \perp\!\!\!\perp \end{aligned}$$

Idealización (2/2)

Especificación

$$t \Vdash \forall^{\{\overline{n}\}} n \exists^{\{\overline{x}\}} x \forall^{\{\overline{y}\}} y (f_R(x,y,n) = 0)$$
$$f_R(n,x,y) := y \leq n \Rightarrow R(x,y)$$

$$t \star \bar{n} \cdot \kappa \cdot \pi \star s \succ \kappa_0 \star \bar{p}_0 \cdot v_0 \cdot \pi \star s$$

$$v_0 \star \bar{n} \cdot \kappa_0 \cdot \pi \star s \succ \kappa \star \bar{p}_1 \cdot v_1 \cdot \pi \star s$$

$$\vdots$$

$$v_k \star \bar{n} \cdot \kappa_k \cdot \pi \star s \succ \kappa \star \bar{p}_k \cdot v_{k+1} \cdot \pi \star s$$

$$\vdots$$

$$v_f \star \bar{n} \cdot \kappa_f \cdot \pi \star s \succ \kappa_k \star \pi \star s$$

avec $f_R(n, p_k, n) = 0$.

¿Candidato no estándar : $\tau : m \mapsto p_k$?

Idealización (2/2)

Especificación

$t \Vdash \forall^{\{\overline{n}\}} n \exists^{\{\overline{x}\}} x \forall^{\{\overline{y}\}} y (f_R(x,y,n) = 0)$
$f_R(n,x,y) := y \leq n \Rightarrow R(x,y)$

$$t \star \overline{n} \cdot \kappa \cdot \pi \star s \succ \kappa_0 \star \overline{p}_0 \cdot v_0 \cdot \pi \star s$$
$$v_0 \star \overline{n} \cdot \kappa_0 \cdot \pi \star s \succ \kappa \star \overline{p}_1 \cdot v_1 \cdot \pi \star s$$
$$\vdots$$
$$v_k \star \overline{n} \cdot \kappa_k \cdot \pi \star s \succ \kappa \star \overline{p}_k \cdot v_{k+1} \cdot \pi \star s$$
$$\vdots$$
$$v_f \star \overline{n} \cdot \kappa_f \cdot \pi \star s \succ \kappa_k \star \pi \star s$$

avec $f_R(n, p_k, n) = 0.$

¿Candidato no estándar : $\tau : m \mapsto p_k$?

Idealización (2/2)

Especificación

$t \Vdash \forall^{\{\bar{n}\}} n \exists^{\{\bar{x}\}} x \forall^{\{\bar{y}\}} y (f_R(x,y,n) = 0)$
$f_R(n,x,y) := y \leq n \Rightarrow R(x,y)$

$$t \star \bar{n} \cdot \kappa \cdot \pi \star s \succ \kappa_0 \star \bar{p}_0 \cdot v_0 \cdot \pi \star s$$
$$v_0 \star \bar{n} \cdot \kappa_0 \cdot \pi \star s \succ \kappa \star \bar{p}_1 \cdot v_1 \cdot \pi \star s$$
$$\vdots$$
$$v_k \star \bar{n} \cdot \kappa_k \cdot \pi \star s \succ \kappa \star \bar{p}_k \cdot v_{k+1} \cdot \pi \star s$$
$$\vdots$$
$$v_f \star \bar{n} \cdot \kappa_f \cdot \pi \star s \succ \kappa_k \star \pi \star s$$

avec $f_R(n, p_k, n) = 0$.

¿Candidato no estándar : $\tau : m \mapsto p_k$ **?**

Estandardización

$$\forall^{\mathrm{st}} x \exists^{\mathrm{st}} y \forall^{\mathrm{st}} z (z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge C(z)) \qquad \text{(S)}$$

Representación de conjunto : predicado $A(x) \equiv x \in A$

$$\exists^{\mathrm{st}} A \forall^{\mathrm{st}} z (A(z) \Leftrightarrow C(z)) \qquad \text{(S')}$$

Definimos :

$$\|A_C(z)\| = \{(\pi, s) : \pi \in \|C(n^*)\|^*, n = z(s)\}$$

Estandardización

Para todo $z^* \in \mathbb{N}^S$ estándar:

$$\|A_c(z)\|^* = \|C(z)\|^* \text{ y } |A_c(z)|^* = |C(z)|^*$$

Estandardización

$$\forall^{\mathrm{st}} x \exists^{\mathrm{st}} y \forall^{\mathrm{st}} z (z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge C(z)) \tag{S}$$

Representación de conjunto : predicado $A(x) \equiv x \in A$

$$\exists^{\mathrm{st}} A \forall^{\mathrm{st}} z (A(z) \Leftrightarrow C(z)) \tag{S'}$$

Definimos :

$$\|A_C(z)\| = \{(\pi, s) : \pi \in \|C(n^*)\|^*, n = z(s)\}$$

Estandardización

Para todo $z^* \in \mathbb{N}^S$ estándar:

$$\|A_c(z)\|^* = \|C(z)\|^* \text{ y } |A_c(z)|^* = |C(z)|^*$$

Estandardización

$$\forall^{\mathrm{st}} x \exists^{\mathrm{st}} y \forall^{\mathrm{st}} z (z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge C(z)) \qquad \text{(S)}$$

Representación de conjunto : predicado $A(x) \equiv x \in A$

$$\exists^{\mathrm{st}} A \forall^{\mathrm{st}} z (A(z) \Leftrightarrow C(z)) \qquad \text{(S')}$$

Definimos :

$$\|A_C(z)\| = \{(\pi, s) : \pi \in \|C(n^*)\|^*, n = z(s)\}$$

Estandardización

Para todo $z^* \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}}$ estándar:

$$\|A_c(z)\|^* = \|C(z)\|^* \text{ y } |A_c(z)|^* = |C(z)|^*$$

Estandardización

$$\forall^{\mathrm{st}} x \exists^{\mathrm{st}} y \forall^{\mathrm{st}} z (z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge C(z)) \qquad \text{(S)}$$

Representación de conjunto : predicado $A(x) \equiv x \in A$

$$\exists^{\mathrm{st}} A \forall^{\mathrm{st}} z (A(z) \Leftrightarrow C(z)) \qquad \text{(S')}$$

Definimos :

$$\|A_C(z)\| = \{(\pi, s) : \pi \in \|C(n^*)\|^*, n = z(s)\}$$

Estandardización

Para todo $z^* \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}}$ estándar:

$$\|A_c(z)\|^* = \|C(z)\|^* \text{ y } |A_c(z)|^* = |C(z)|^*$$

Estandardización

$$\forall^{\mathrm{st}} x \exists^{\mathrm{st}} y \forall^{\mathrm{st}} z (z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge C(z)) \qquad \text{(S)}$$

Representación de conjunto : predicado $A(x) \equiv x \in A$

$$\exists^{\mathrm{st}} A \forall^{\mathrm{st}} z (A(z) \Leftrightarrow C(z)) \qquad \text{(S')}$$

Definimos :

$$\|A_C(z)\| = \{(\pi, s) : \pi \in \|C(n^*)\|^*, n = z(s)\}$$

Estandardización

Para todo $z^* \in \mathbb{N}^{\mathcal{S}}$ estándar:

$$\|A_c(z)\|^* = \|C(z)\|^* \text{ y } |A_c(z)|^* = |C(z)|^*$$

Insuficiencias de los testigos

Problema

- $(t \Vdash^* A) \quad \not\Rightarrow \quad t \in |A|^*$
- $(t \Vdash^* A \Rightarrow B) \wedge (u \Vdash^* A) \quad \not\Rightarrow \quad tu \Vdash^* B$

Insuficiencias de los testigos

Problema

- $(t \Vdash^* A) \quad \not\Rightarrow \quad t \in |A|^*$
- $(t \Vdash^* A \Rightarrow B) \wedge (u \Vdash^* A) \quad \not\Rightarrow \quad tu \Vdash^* B$

Polo demasiado general ?

- simetrías : $⫫_1 = ⫫_2 = \ldots$
- monotonía de **set**

Insuficiencias de los testigos

Problema

- $(t \Vdash^* A) \quad \not\Rightarrow \quad t \in |A|^*$
- $(t \Vdash^* A \Rightarrow B) \wedge (u \Vdash^* A) \quad \not\Rightarrow \quad tu \Vdash^* B$

Polo demasiado general ?

- simetrías : $⫫_1 = ⫫_2 = \ldots$
- monotonía de **set**

Insuficiencias de los testigos

Problema

- $(t \Vdash^* A) \quad \not\Rightarrow \quad t \in |A|^*$
- $(t \Vdash^* A \Rightarrow B) \wedge (u \Vdash^* A) \quad \not\Rightarrow \quad tu \Vdash^* B$

Nueva ortogonalidad :

$$(t,s) \perp\!\!\!\perp (\pi, s') := \forall s'' \geq \text{máx}(s,s'), t \star \pi \star s'' \in \perp\!\!\!\perp$$

- $s' \geq s$ y $(t,s) \Vdash A$ implica $(t,s') \Vdash A$.
- no colaje...

Insuficiencias de los testigos

Problema

- $(t \Vdash^* A) \quad \not\Rightarrow \quad t \in |A|^*$
- $(t \Vdash^* A \Rightarrow B) \wedge (u \Vdash^* A) \quad \not\Rightarrow \quad tu \Vdash^* B$

Nueva ortogonalidad :

$$(t, s) \perp\!\!\!\perp (\pi, s') := \forall s'' \geq \text{máx}(s, s'), t \star \pi \star s'' \in \perp\!\!\!\perp$$

- $s' \geq s$ y $(t, s) \Vdash A$ implica $(t, s') \Vdash A$.
- no colaje...

Insuficiencias de los testigos

Problema

- $(t \Vdash^* A) \quad \not\Rightarrow \quad t \in |A|^*$
- $(t \Vdash^* A \Rightarrow B) \wedge (u \Vdash^* A) \quad \not\Rightarrow \quad tu \Vdash^* B$

Design distinto: $\boldsymbol{\Lambda} := \Lambda, \boldsymbol{\Pi} := \Pi \times \mathcal{S}$

$$\|\{x\} \mapsto A\| = \{(\bar{n} \cdot \pi, s) : x(s) = n \text{ y } (\pi, s) \in \|A\{x := n\}\|\}$$

- colaje forzado
- $(\{x\} \mapsto A) \quad \not\Leftrightarrow \quad ((\{x\} \mapsto \bot) \Rightarrow \bot) \Rightarrow A$

Insuficiencias de los testigos

Problema

- $(t \Vdash^{*} A) \quad \not\Rightarrow \quad t \in |A|^{*}$
- $(t \Vdash^{*} A \Rightarrow B) \wedge (u \Vdash^{*} A) \quad \not\Rightarrow \quad tu \Vdash^{*} B$

Design distinto: $\mathbf{\Lambda} := \Lambda, \mathbf{\Pi} := \Pi \times \mathcal{S}$

$$\|\{x\} \mapsto A\| = \{(\bar{n} \cdot \pi, s) : x(s) = n \text{ y } (\pi, s) \in \|A\{x := n\}\|\}$$

- colaje forzado
- $(\{x\} \mapsto A) \quad \not\Leftrightarrow \quad ((\{x\} \mapsto \bot) \Rightarrow \bot) \Rightarrow A$

Otras pistas

Pregunta central : ¿tipo de get y set?

- Análisis no estándar
- **set** : $\{x\} \Rightarrow A(x) \Rightarrow A(\iota)$?
- Forcing ?

Otras pistas

Pregunta central : ¿tipo de get y set?

- Análisis no estándar
- **set** : $\{x\} \Rightarrow A(x) \Rightarrow A(\iota)$?
- Forcing ?

Otras pistas

Pregunta central : ¿tipo de get y set?

- Análisis no estándar
- **set** : $\{x\} \Rightarrow A(x) \Rightarrow A(\iota)$?
- Forcing ?

Otras pistas

Pregunta central : ¿tipo de get y set?

- Análisis no estándar
- **set** : $\{x\} \Rightarrow A(x) \Rightarrow A(\iota)$?
- Forcing ?

Gracias por su atención.

Algunas preguntas ?