

Trajectoire et rebond d'une balle au tennis de table

Objectifs :

- Étude théorique de la trajectoire et du rebond
- Parvenir à une modélisation Maple et à l'obtention de courbes

Introduction : Newton, un modèle pour Gatien ?

I. Étude de la trajectoire

1. L'effet Magnus
2. La force de trainée
3. Equations générales

II. Étude du rebond

1. Modèle du rebond
2. Résolution
3. Détermination expérimentale de e_z
4. Étude de e_x

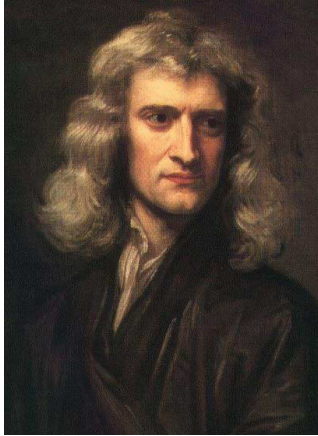
III. Modélisation Maple

1. Trajectoire
2. Rebond

Conclusion

Introduction : Newton, un modèle pour Gatien ?

Pratiquant le Tennis de Table, j'ai toujours été fasciné par ce que l'on nomme couramment les « effets », la rotation que l'on pouvait donner à une balle, et plus encore, par les trajectoires qui s'ensuivent. J'ai donc choisi, dans le cadre de ce TIPE, de m'intéresser plus particulièrement au problème suivant : **Comment peut-on modéliser la trajectoire et le rebond d'une balle ?** L'intuition du joueur, aussi chevronné soit-il, est-elle en accord avec les lois de la physique ?



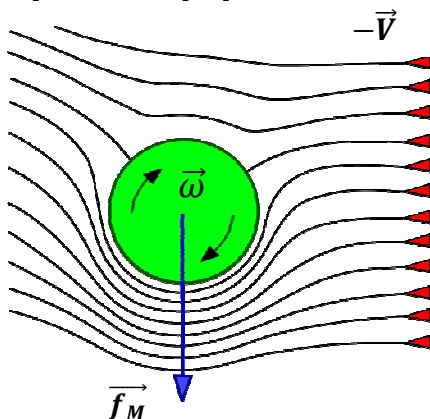
Le top spin, qui consiste à donner une rotation à la balle, donne une trajectoire courbée à la balle. D'où vient ce phénomène ?

I. Etude de la trajectoire

Il s'agit ici d'effectuer une étude des différentes forces s'exerçant sur la balle : l'effet Magnus, la force de trainée et le poids.

1. L'effet Magnus

D'après la loi de Bernoulli, quand la vitesse d'un fluide (ici l'air) augmente, sa pression diminue. C'est ce qui permet d'expliquer la déviation d'une balle en rotation, du fait de ce que l'on nomme l'effet Magnus.



Prenons une balle se déplaçant dans l'air à une vitesse $\vec{V}$. Dans le référentiel de la balle, l'air a donc une vitesse $-\vec{V}$. De plus, la rotation de la balle va entraîner l'air, l'accélérant en dessous, et le ralentissant en dessus. D'après la loi de Bernoulli, cela crée donc une différence de pression, dont il résulte une force : l'effet Magnus.

Dans la littérature, on trouve l'expression suivante :

$$\vec{f}_M = \alpha \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{v}) \quad \text{où}$$

α en $kg \cdot rad^{-1}$ est un coefficient lié à la nature de la balle

$\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la balle

$\vec{\omega}$ est le vecteur rotation de la balle

Le coefficient α peut se déterminer expérimentalement, par exemple à l'aide d'une soufflerie et d'une barre de torsion. J'ai choisi de ne pas refaire cette expérience et de reprendre une valeur donnée dans la littérature, à savoir $\alpha = 1.8 \cdot 10^{-5} kg \cdot rad^{-1}$.

2. La force de trainée

L'expression de la force de trainée dépend du nombre de Reynolds. Celui-ci est donné par la formule :

$$Re = \frac{\rho \cdot d \cdot v}{\eta}$$

où

d est le diamètre de la balle

v est la vitesse de la balle

η est la viscosité dynamique du fluide (en $Pa \cdot s^{-1}$)

ρ est la masse volumique du fluide

Avec $d = 40mm$, et à une température de $20^\circ C$, $\eta = \eta_{air} = 1.8 \cdot 10^{-5} Pa \cdot s^{-1}$, $\rho = \rho_{air} = 1.2 kg \cdot m^{-3}$ et

$1 < v < 50 m \cdot s^{-1}$, on trouve :

$$2.6 \cdot 10^3 < Re < 1.4 \cdot 10^5$$

Dans ce domaine, l'écoulement est dit turbulent, et la force de trainée est donnée par

$$\vec{f}_t = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_x \cdot S \cdot v \cdot \vec{v} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \rho \text{ est la masse volumique du fluide} \\ S \text{ est la surface de la sphère (soit } 4\pi \cdot r^2) \\ C_x \text{ est le coefficient de trainée} \\ \vec{v} \text{ est la vitesse de la balle, } v = \|\vec{v}\| \end{cases}$$

Dans le cadre de notre étude, C_x demeure sensiblement constant (pour $10^3 < Re < 2 \cdot 10^5$, $C_x \approx 0.4$), et on a donc, en posant $h = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_x \cdot S \approx 3 \cdot 10^{-4}$, $\vec{f}_t = -h \cdot v \cdot \vec{v}$

3. Equations générales

Dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, on étudie donc la balle, de masse $m = 2.7g$, de rayon $R = 2.0 \text{ mm}$.

Les forces qui s'appliquent sur la balle sont son poids, $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$, la force de trainée $\vec{f}_t$ et l'effet Magnus $\vec{f}_M$. On considère que les durées considérées des trajectoires sont suffisamment courtes pour négliger la décélération de la rotation de la balle, et supposer ainsi que le vecteur $\vec{\omega}$ reste constant.

En appliquant la seconde loi de Newton, on obtient, avec les notations précédentes :

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -h \cdot v \cdot \vec{v} + \alpha \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{v}) + m \cdot \vec{g}$$

En projetant sur chaque axe, on obtient les équations suivantes :

$$m\ddot{x} = -h\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot \dot{x} + \alpha(\omega_y \cdot \dot{z} - \omega_z \cdot \dot{y}) \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = -h\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot \dot{y} + \alpha(\omega_z \cdot \dot{x} - \omega_x \cdot \dot{z}) \quad (2)$$

$$m\ddot{z} = -h\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot \dot{z} + \alpha(\omega_x \cdot \dot{y} - \omega_y \cdot \dot{x}) \quad (3)$$

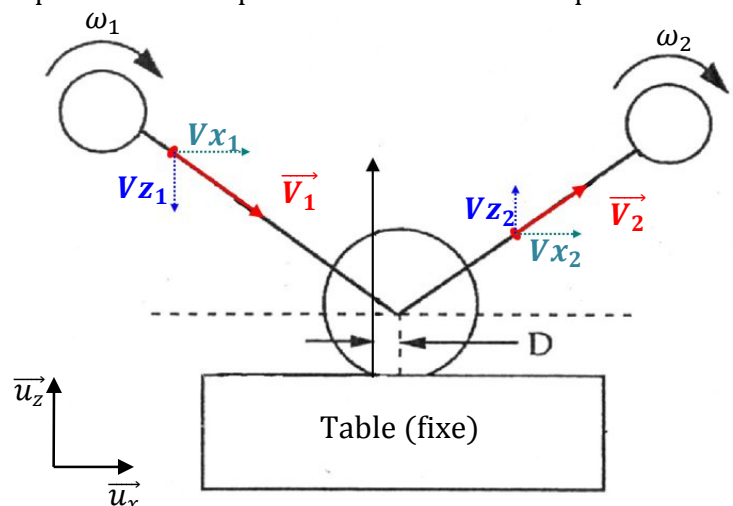
Ce sont les équations du mouvement, qui ne sont malheureusement pas linéaires, et que Maple ne sait résoudre sous cette forme. Nous verrons par la suite une façon de surmonter cette difficulté.

II. Etude du rebond

1. Modèle du rebond

Le rebond est quant à lui plus complexe à modéliser. En effet, il est difficile de décrire ce qui se passe exactement pendant le contact entre la balle et la table. Celle-ci « s'écrase », dans le sens où l'on peut observer une déformation provisoire au dessous (cf D sur le schéma), mais la durée de l'impact est très courte et ne permet pas une observation précise du phénomène. On peut toutefois considérer que qualitativement, durant l'impact, la balle adhère à la table (puisque l'on observe des rebonds différents en fonction de la rotation de la balle). On simplifie le problème de la manière suivante :

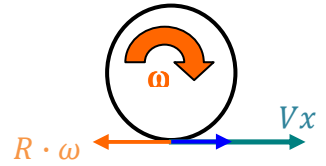
- On se place dans le plan (Oxz) : $\vec{V}$ dans ce plan, $\vec{\omega}$ suivant $\vec{u}_y$
- On suppose que la balle adhère à la table durant le contact, pour tenir compte de l'écrasement D, mais dans les calculs, on prendra $D=0$.



2. Résolution

On s'intéresse aux deux coefficients de restitution suivants :

$$e_z = -\frac{V_{z2}}{V_{z1}} \quad (4) \quad \left| \quad e_x = -\frac{V_{x2} - R \cdot \omega_2}{V_{x1} - R \cdot \omega_1} \quad (5)$$



Le premier correspond au coefficient de restitution verticale usuel, dont on s'inspire pour le second, le terme $Vx - R \cdot \omega$ correspondant à la vitesse apparente au point de contact.

Le coefficient e_z , lié aux propriétés des corps, est constant. Des études scientifiques¹ semblent montrer que pour des matériaux donnés (ici la balle et la table), dans un même domaine de vitesse, le coefficient e_x demeure sensiblement constant.

La troisième équation reliant les vitesses avant et après le rebond vient de la conservation du moment cinétique au point de contact :

$$J \cdot \omega_1 + m \cdot R \cdot V_{x1} = J \cdot \omega_2 + m \cdot R \cdot V_{x2}, \quad \text{où } J = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2 \quad (6)$$

Etant donnés les coefficients e_x et e_z , les équations (4), (5) et (6), linéaires, nous permettent de déterminer facilement $\{V_{x2}, V_{z2}, \omega_2\}$ en fonction de $\{V_{x1}, V_{z1}, \omega_1\}$.

3. Détermination expérimentale de e_z



Afin de déterminer e_z , on lâche une balle verticalement puis on mesure la hauteur des rebonds. En négligeant les frottements de l'air, la seule force à prendre en compte, le poids, est conservative, on peut donc écrire la conservation d'énergie : $m \cdot g \cdot z_{max} = \frac{1}{2} m \cdot V_{max}^2$, où V_{max} correspond à la vitesse précédant le rebond et z_{max} au sommet du rebond. En considérant deux rebonds successifs, on a donc $e_z = -\frac{V_{z2}}{V_{z1}} = \sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$.

On vérifie que les frottements sont négligeables en approchant la vitesse par une fonction linéaire, puisque sans frottements, la vitesse vaut $V_z = \pm g \cdot t + V_{z0}$.

Ce sont les droites qui apparaissent sur la figure ci-contre.

Résultats de la modélisation

Ecart relatif $V_z(t) = 4.3 \%$

Ecart quad. $V_z = 121.2 \text{ mm.s}^{-1}$

Coeff. corrélation = -0.99909

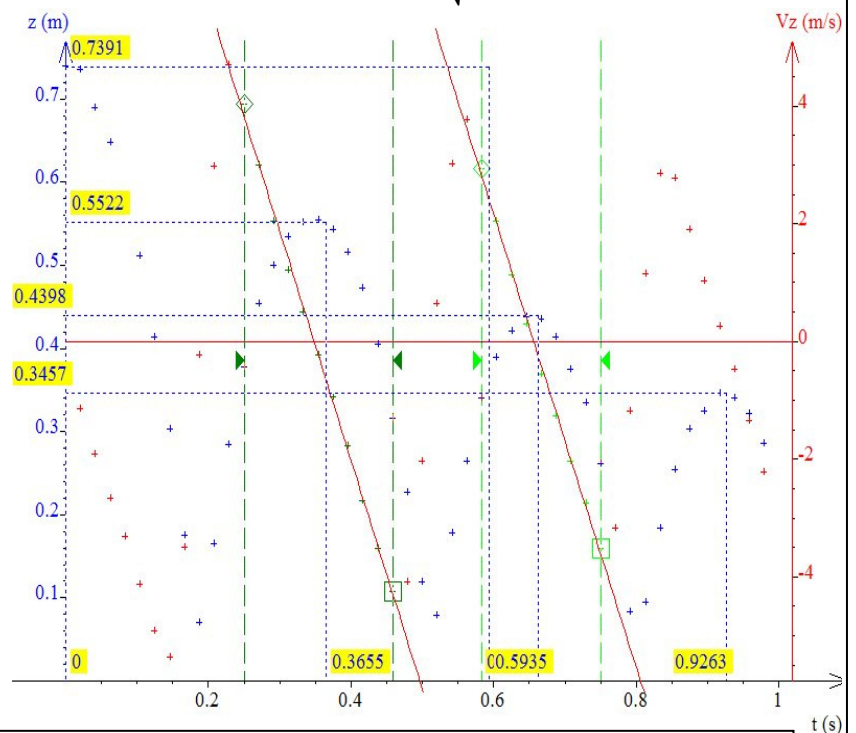
Ecart relatif $V_z(t) = 4.2 \%$

Ecart quad. $V_z = 100.2 \text{ mm.s}^{-1}$

Coeff. corrélation = -0.99909

L'hypothèse est bien validée.

La valeur retenue est $e_z = 0.9$



Etude d'un rebond sous Regressi

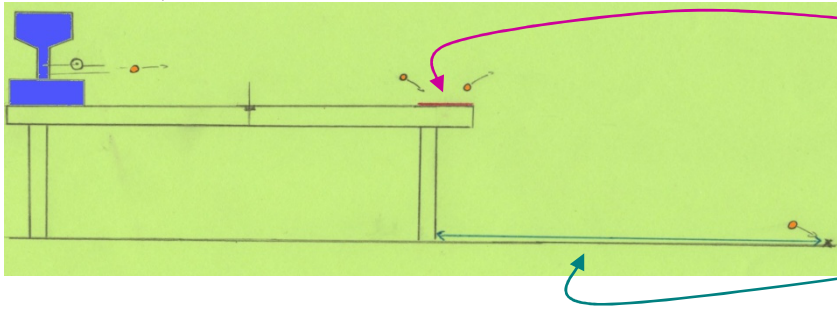
(en rouge la vitesse, en bleu la hauteur, avec le temps en abscisse)

¹ Rod Cross, Grip-skip behavior of a bouncing ball (American Journal Physics, Vol 70, n°11, Novembre 2002)

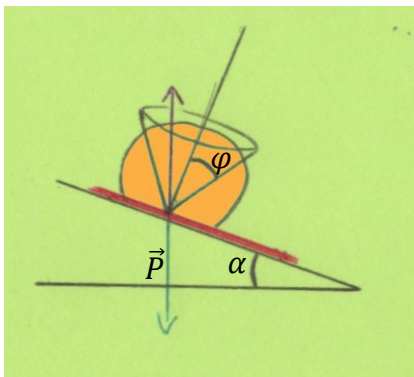
4. Etude de e_x

L'étude de e_x est plus problématique : en effet, afin d'en déterminer la valeur, il faudrait pouvoir mesurer les vitesses de rotation ω_1 et ω_2 , ce qui ne peut se faire au stroboscope (les balles avancent), ni avec une caméra standard (la résolution est bien insuffisante, ne serait-ce que pour mesurer V_x). De fait, j'ai abandonné l'idée d'en trouver précisément la valeur (par la suite, je me suis servi de valeurs tabulées pour des systèmes s'en rapprochant afin d'obtenir des allures qualitatives de trajectoire).

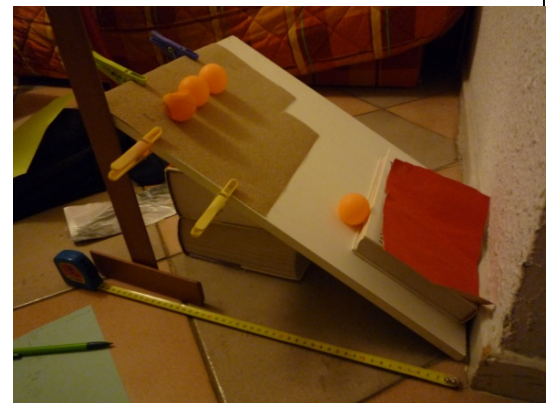
Toutefois, il m'a paru intéressant de relier e_x au coefficient de frottement entre la balle et le support (que je tenais intuitivement pour responsable de la valeur de e_x). Je me suis pour cela servi d'un **robot distributeur de balles** (afin d'obtenir des séries de lancers identiques d'un point de vue de la vitesse et la rotation), et de



différents matériaux, fins, afin de ne pas trop altérer la valeur de e_z . J'ai déterminé pour chacun d'entre eux le coefficient de frottement avec une balle, et observé pour des balles coupées (back-spin : $\vec{\omega} \cdot \vec{u}_y < 0$) et liftées (top-spin : $\vec{\omega} \cdot \vec{u}_y > 0$) la **longueur du rebond**.

Détermination du coefficient de frottement f :

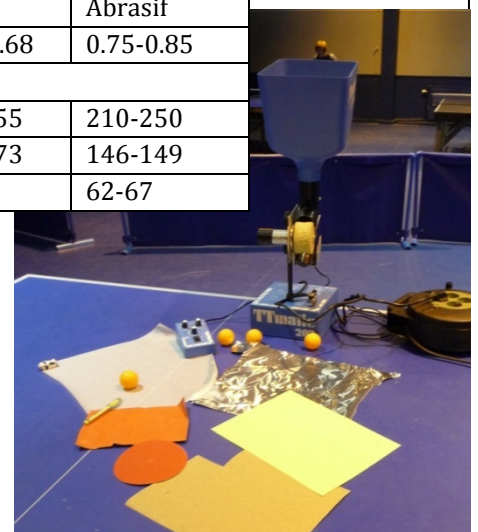
On raisonne simplement en termes de cône de frottement : on pose une **balle aplatie** sur le dessous sur un plan incliné recouvert du **matériau** choisi. Dès que $\alpha \geq \varphi$, celle-ci se met en mouvement. La relation $f = \tan \varphi$ permet d'obtenir f .

Exploitation :

Matériau	Papier sulfurisé	Feuille de papier	Aluminium	Papier de verre	Papier Silex	Disque Abrasif
f	0.22-0.26	0.29-0.35	0.34-0.41	0.55-0.60	0.57-0.68	0.75-0.85
Longueur du rebond (cm)						
Liftée *	252-260	256-260	255-258	226-235	250-255	210-250
Coupée *	243-244	230-235	195-205	162-164	155-173	146-149
Très coupée **	130-140	112-114	106-113	76-82	65-82	62-67

*Deuxième rebond au sol \ \ ** Deuxième rebond sur la table

J'ai ensuite, dans ma modélisation Maple (voir paragraphes suivants), fait varier e_x afin d'observer l'impact sur la longueur du rebond. On constate ainsi que quelque soit l'« effet » imprimé à la balle, pour des conditions initiales données, la longueur du rebond est une fonction décroissante de e_x . Or expérimentalement, on observe que cette longueur est aussi une fonction décroissante de f . Ceci montre bien que e_x varie avec f , et l'on peut de plus envisager avoir, pour V_{x1} et ω_1 donnés, e_x fonction croissante de f .



Le robot et les différents matériaux utilisés.

III- Modélisation Maple

1. Trajectoire

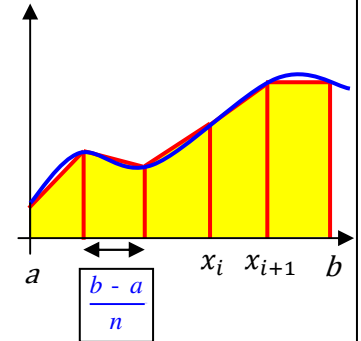
Lorsque l'on cherche à résoudre sous Maple le système d'équations différentielles $\{(1),(2),(3)\}$, on s'aperçoit que cela n'est pas possible. Ceci vient du fait que les équations sont du second ordre et non linéaires.

Cependant, on constate que ces trois équations ne font intervenir que les dérivées premières et secondes de x, y et z , mais jamais ces fonctions elles-mêmes. On peut ainsi se ramener, en posant $i = \dot{x}, j = \dot{y}$ et $k = \dot{z}$, à un système non linéaire du premier ordre. On peut alors résoudre numériquement ce système, les solutions étant obtenues sous formes de procédures, et non de fonction.

```
> F:=dsolve({eqx,eqy,eqz,ei},{i(t),j(t),k(t)}, numeric, output=listprocedure);
```

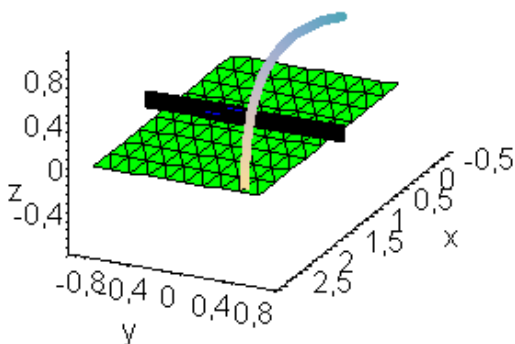
Pour remonter aux variables positionnelles, j'ai choisi d'utiliser la méthode dite « des trapèzes », qui permet d'approcher une intégrale par une somme. Pour un certain pas n , on calcule $T_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$. L'intérêt de cette méthode réside dans le fait que si $f \in C^2([a; b], \mathbb{R})$, $\left| \int_a^b f(x) dx - T_n(f) \right| = O_{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$.

Le caractère C^2 de x, y, z est garanti par le théorème de Cauchy : $X = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$ est en effet solution d'une équation différentielle $\dot{X} = \varphi(X)$, avec $\varphi \in C^1$, X est donc C^1 .



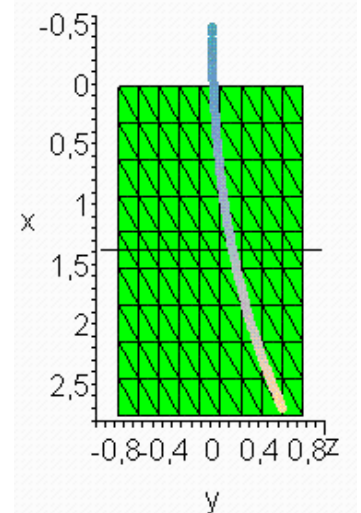
```
trap_list:=proc(F,x0,G,y0,H,z0,t,n)
global X,Y,Z,fin,tf: local k:
X:=[x0]: Y:=[y0]: Z:=[z0]: k:=0:
while Z[k+1]>=0 and k<n-1 do
X:=[op(X), (X[k+1]+t/n*(F(k*t/n)+F((k+1)*t/n))/2)]:
Y:=[op(Y), (Y[k+1]+t/n*(G(k*t/n)+G((k+1)*t/n))/2)]:
Z:=[op(Z), (Z[k+1]+t/n*(H(k*t/n)+H((k+1)*t/n))/2)]:
k:=k+1
end do:
fin:=k: tf:=k*t/n
end proc:
```

Il ne reste alors plus qu'à tracer la trajectoire, à l'aide de la fonction *pointplot3d*.



On remarque bien sur les trajectoires que les courbes s'incurvent à cause de l'effet Magnus : c'est l'influence de la rotation latérale ($\vec{\omega} \cdot \vec{u}_z$, positif sur les figures ci-contre) sur les trajectoires.

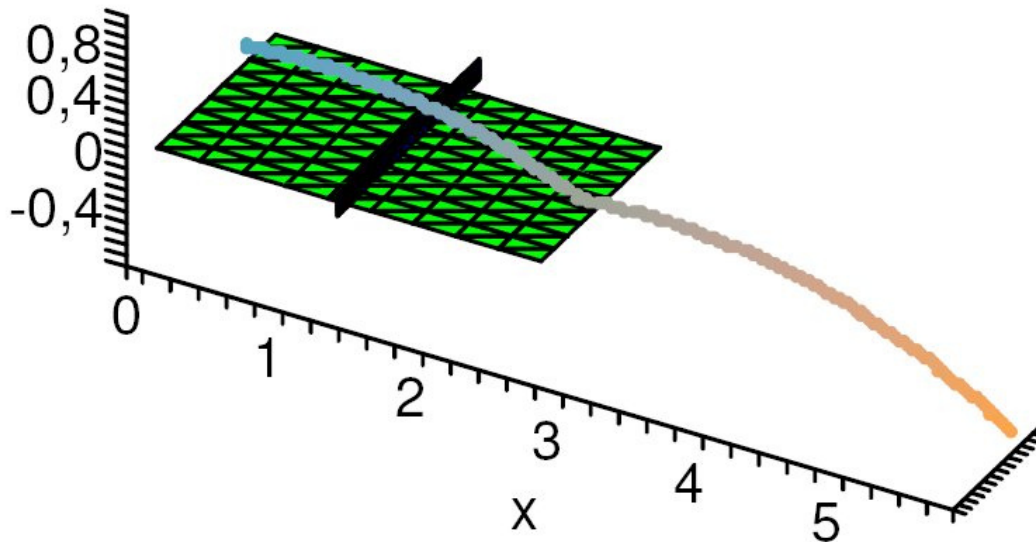
On constate au passage que les durées des trajectoires sont courtes, ce qui permet de valider l'hypothèse d'un vecteur $\vec{\omega}$ sensiblement constant.



2. Rebond

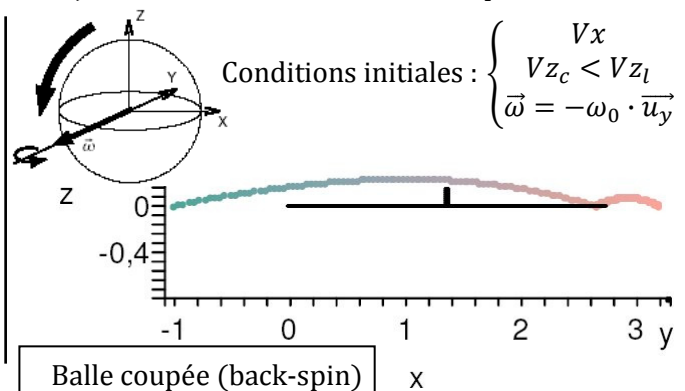
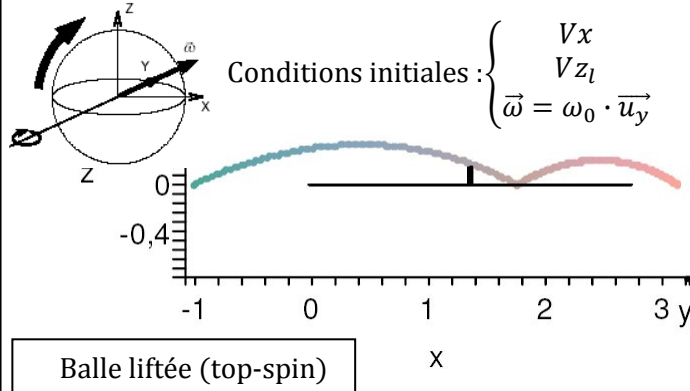
Pour le rebond, il suffit de résoudre le système linéaire $\{(4),(5),(6)\}$, de tracer la suite de la trajectoire, puis de concaténer le tout.

```
> rest_vert:=ez=-vz2/vz1:
rest_hor:=ex=-(vx2-R*w2)/(vx1-R*w1):
mom_cinet:=J*w1+m*R*vx1=J*w2+m*R*vx2:
solve({rest_vert,rest_hor,mom_cinet},{vx2,vz2,w2});
```



En modifiant légèrement la procédure, on peut (comme sur la figure ci-contre), tracer le rebond jusqu'au sol, et obtenir l'abscisse de l'impact, ce dont je me suis servi dans l'étude de e_x (II-4).

Il est alors intéressant de visualiser sur l'ensemble de la trajectoire l'influence d'un effet coupé ou lifté :



On retrouve des allures conformes aux observations empiriques : une balle coupée « flotte » plus longtemps, et a un rebond beaucoup plus court, tandis que la balle liftée « retombe » plus vite, et donne l'impression de s'accélérer au rebond, qui est alors beaucoup plus long.

Conclusion

Même si elles n'ont qu'une valeur qualitative, les allures des trajectoires obtenues sont assez satisfaisantes dans la mesure où elles permettent de corroborer l'intuition du joueur. En effet, la corrélation entre la rotation de la balle et le caractère incurvée des trajectoires est bien confirmée par l'étude précédente. De plus, le modèle du rebond est qualitativement fidèle lui aussi à l'observation expérimentale.

Cependant, la question de la légitimité du coefficient e_x reste entière, mais seules des observations avec des caméras numériques très performantes pourraient confirmer ou non le fait qu'il reste plus ou moins constant. De plus, il pourrait aussi être intéressant d'étudier l'influence d'un effet « latéral » ($\vec{\omega}$ présentant une composante non nulle suivant $\vec{u}_z$). L'étude du rebond reste d'ailleurs encore un sujet sur lequel se penchent certains scientifiques aujourd'hui !!