

Algorithmique

TD n° 10 : Analyse amortie et révision programmation dynamique

Exercice 1 : des piles et des files

Dans cet exercice, on considère des piles (structures LIFO) munies des opérations de base classiques : $\text{Push}(P,x)$ pour ajouter un élément x dans la pile, $\text{Pop}(P)$ pour retirer l'élément du dessus et le renvoyer comme résultat de la fonction, et $\text{IsEmpty}(P)$ qui renvoie Vrai si et seulement si la pile est vide. On suppose que toutes ces opérations sur les piles se font en temps constant.

On va implémenter des files (structures FIFO) avec des piles : une file F sera basée sur deux piles, dénotées $F.\text{Pin}$ et $F.\text{Pout}$. On construit les fonctions Ajouter , Extraire et EstVide de la manière suivante :

```
def Ajouter(F,x) :
    Push(F.Pin,x)

def Extraire(F) :
    if not IsEmpty(F.Pout) then :
        return Pop(F.Pout)
    else if not IsEmpty(F.Pin) then :
        while not IsEmpty(F.Pin) :
            Push(F.Pout,Pop(F.Pin))
        return Pop(F.Pout)
    else return erreur

def EstVide(F) :
    return IsEmpty(F.Pin) and IsEmpty(F.Pout)
```

1. Appliquer l'algorithme à la séquence suivante d'instructions (on indiquera à chaque étape le contenu des deux piles) appliquées sur une file F initialement vide : $\text{Ajouter}(F,2)$, $\text{Ajouter}(F,5)$, $\text{Ajouter}(F,8)$, $\text{Ajouter}(F,6)$, $\text{Extraire}(F)$, $\text{Ajouter}(F,4)$, $\text{Ajouter}(F,5)$, $\text{Extraire}(F)$, $\text{Extraire}(F)$, $\text{Extraire}(F)$, $\text{Extraire}(F)$, $\text{Extraire}(F)$.
2. Quelle est la complexité des opérations sur ces files ?
3. Calculer la complexité *amortie* des opérations sur ces files en considérant une suite de n opérations $\text{Ajouter}(F,-)$ / $\text{Extraire}(F)$ (à partir d'une file vide). On utilisera une des trois méthodes vues en cours (agrégation, comptable, ou potentiel).

Exercice 2 : la vache et la barrière

On a une vache qui cherche à sortir d'un pré avec une clôture comportant une ouverture, mais la vache ne sait pas où est l'ouverture. Le pré est un demi-plan, la vache se trouve au point origine $A = (0, 0)$, la clôture est la droite d'équation $y = 1$, et l'ouverture est un point sur cette droite. La vache est myope : elle ne peut voir l'ouverture que si elle est juste dessus. Elle va donc commencer par aller jusqu'à la clôture, au point $(0, 1)$, mais alors se pose une question : de quel côté est l'ouverture ? Faut-il aller à droite ou à gauche ? La vache souhaite passer le moins de temps possible à chercher l'ouverture. Elle marche à vitesse constante de 1 mètre par seconde.

Donner un algorithme pour la vache lui garantissant que quelle que soit la position B de l'ouverture, elle la trouvera en temps $O(\text{dist}(A, B))$.

Exercice 3 :

On suppose qu'on a une suite d'opérations. La i -ième opération a coût $c(i)$. Dans chacun des cas suivants, est-ce que le coût amorti par opération est constant ?

1. $c(i) = i$ si i est une puissance de 2, et $c(i) = 1$ sinon.
2. $c(i)$ est la plus grande puissance de 2 qui divise i .
3. $c(i)$ est le plus grand k tel que 2^k divise i .