

TD Logique temporelle LTL

Master MIC

janvier 2018

Rappel : Syntaxe et sémantique de LTL. On considère des formules de LTL dont la syntaxe est donnée par la grammaire suivante :

$$\phi ::= P \mid \phi \vee \psi \mid \phi \wedge \psi \mid \neg\phi \mid \mathbf{X}\phi \mid \phi \mathbf{U} \psi$$

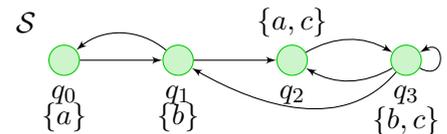
où P appartient à un ensemble de propositions atomiques AP . On utilise aussi les abréviations \mathbf{F} et \mathbf{G} . Ces formules s'interprètent sur une exécution ρ d'une structure de Kripke : $\rho(i)$ est le i -ème état, ρ^i est le i -ème suffixe (commençant en $\rho(i)$) et $\ell(\rho(i))$ est l'ensemble des propositions vraies en $\rho(i)$. La sémantique est notamment définie par :

- $\rho \models P$ ssi $P \in \ell(\rho(0))$,
- $\rho \models \mathbf{X}\phi$ ssi $\rho^{i+1} \models \phi$ et
- $\rho \models \phi \mathbf{U} \psi$ ssi $\exists j \geq 0$ t.q. $(\rho^j \models \psi) \wedge (\forall k \in [0, j[, \text{ on a } : \rho^k \models \phi)$

Exercice 1 :

On considère le STE \mathcal{S} de la figure ci-contre (q_0 est l'état initial). Pour chacune des formules suivantes, dire si la formule est vraie pour \mathcal{S} (ie pour toutes ses exécutions). Justifier les réponses.

Interpréter des formules LTL



- | | | | |
|------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|----------------|
| $a \mathbf{U} b$ | $\mathbf{X}(a \mathbf{U} b)$ | $\mathbf{G}(c \Rightarrow (a \mathbf{U} b))$ | $\mathbf{G}Fa$ |
| $\mathbf{F}Gc \Rightarrow \mathbf{G}(a \Rightarrow \mathbf{X}b)$ | $\mathbf{F}Gc \Rightarrow \mathbf{G}(b \Rightarrow \mathbf{X}a)$ | $\mathbf{F}Gc \Rightarrow \mathbf{G}(b \Rightarrow \mathbf{X}a)$ | $\mathbf{G}Fb$ |

Vérifier avec Prism les résultats précédents.

Exercice 2 :

Ecrire des formules LTL

Ecrire en logique temporelle, les propriétés suivantes qui concernent un protocole de communication où des messages sont émis (on utilisera des propositions a et b) :

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. La proposition a n'est jamais vraie. 2. La proposition a est vraie au moins une fois. 3. La proposition a est vraie infiniment souvent. 4. La proposition a est vraie exactement une fois. | <ol style="list-style-type: none"> 5. La proposition a est vraie exactement deux fois. 6. Les propositions a et b sont vraies en alternance : a est vraie, puis b, puis a, \dots 7. Si la proposition a est vraie infiniment souvent, alors la proposition b est toujours vraie. |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Exercice 3 :

Equivalence de formules LTL

Comparer les paires de formules ci-dessous : dites si elles sont équivalentes ou différentes (justifiez vos réponses) :

- | | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> • $\mathbf{F}(a \wedge b)$ et $(\mathbf{F}a) \wedge (\mathbf{F}b)$ • $a \mathbf{U} b$ et $\mathbf{G}a \wedge \mathbf{F}b$ | <ul style="list-style-type: none"> • $\mathbf{G}(a \wedge b)$ et $(\mathbf{G}a) \wedge (\mathbf{G}b)$ • $\mathbf{F}a \wedge \mathbf{F}b$ et $\mathbf{F}(a \wedge \mathbf{F}b) \vee \mathbf{F}(b \wedge \mathbf{F}a)$ |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|