Chaines de Markov

Def: $\mathcal{M} = (S, P, s_{init}, \ell)$

S = ensemble d'états

$s_{init} \in S$: état initial

$P : S \times S \to [0,1]$: la fct de transition probabiliste t.q.

$$\forall s, \sum_{s' \in S} P(s,s') = 1$$

$\ell : S \to 2^{AP}$: étiquetage des états par des prop. atomiques

Chemin de $\mathcal{M}$: $\pi = s_0 s_1 \dots \in S^\omega$ t.q. $P(s_i, s_{i+1}) > 0 \ \forall i \geq 0$

$Paths(\mathcal{M})$ = ens. des chemins de $\mathcal{M}$

$Paths^F(\mathcal{M})$ = ens des préfixes finis de chemins de $\mathcal{M}$

Notation:

$$\begin{cases} Post(s) = \{ s' \in S \ / \ P(s,s') > 0 \} \\ Pre(s) = \{ s' \in S \ / \ P(s',s) > 0 \} \end{cases}$$

$Post^*(s)$, $Pre^*(s)$ ...

Un état $s \in S$ est <u>absorbant</u> ssi $P(s,s) = 1$

[et alors $Post^*(s) = \{s\}$]

$K_{\mathcal{M}}$ = la structure de Kripke induite par $\mathcal{M}$.

$= (S, \to, \ell)$ avec $s \to t$ ssi $P(s,t) > 0$

Espace probabiliste associé à $\mathcal{M}$:

Def : Tribu

Soit Ω un ensemble.
Une tribu sur Ω est un ensemble $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$ t.q.

① $\mathcal{A} \neq \emptyset$
② $\forall B \in \mathcal{A}, \; \Omega \setminus B \in \mathcal{A}$
③ Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'élé^{ts} de $\mathcal{A}$, alors

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$$

NB : $\mathcal{A}$ est aussi stable par $\cap$ dénombrable.

$(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable.

Def :

Une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une fonction $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ telle que :

① $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
② Si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'élé^{ts} de $\mathcal{A}$
t.q. $\forall i, j \in \mathbb{N} \quad i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$
alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_n B_n\right) = \sum_n \mathbb{P}(B_n)$

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabiliste.

Soit $\mathcal{M}$ une chaîne de Markov.

Soit $\hat{\pi} \in Paths^F(\mathcal{M})$

On note $Cyl(\hat{\pi}) = \{\pi \in Paths(\mathcal{M}) \mid \hat{\pi} \text{ est un préfixe de } \pi\}$

L'espace probabiliste $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\mathcal{M})$ associé à $\mathcal{M}$ est :

- $\Omega = Paths(\mathcal{M})$
- $\mathcal{A}$ = la plus petite tribu qui contient tous les cylindres de $\mathcal{M}$. (notée $\mathcal{T}_{Cyl(\mathcal{M})}$)
- $\mathbb{P}_\mathcal{M} : \mathcal{T}_{Cyl(\mathcal{M})} \rightarrow [0,1]$ est définie par :

$$\begin{cases} \circ\ \mathbb{P}_\mathcal{M}(Cyl(s_0 s_1 \dots s_n)) = \prod_{i=0}^{n-1} P(s_i, s_{i+1}) \\ \circ\ \mathbb{P}_\mathcal{M}(Cyl(s)) = 1 \end{cases}$$

Mesurabilité des propriétés d'accessibilité :

- $\mathbf{F}\, B$ avec $B \subseteq S$ [notation LTL/CTL]

$$\mathbf{F}\, B = \{\pi \in Paths(\mathcal{M}) \mid \pi \models \mathbf{F}\, B\}$$

- $A\, \mathcal{U}\, B$ $\quad A, B \subseteq S$

$$A\, \mathcal{U}\, B = \{\pi \in Paths(\mathcal{M}) \mid \pi \models A\, \mathcal{U}\, B\}$$

- $\mathbf{G}\mathbf{F}\, B$

$$\mathbf{G}\mathbf{F}\, B = \{\pi \in Paths(\mathcal{M}) \mid \pi \models \mathbf{G}\mathbf{F}\, B\}$$

Ces 3 propriétés sont bien <u>mesurables</u> :

▷ $$\mathbf{F}\, B = \bigcup_{\substack{s_0 s_1 \dots s_n \in Paths^F_s(\mathcal{M}) \\ \text{t.q. } s_0, \dots, s_{n-1} \notin B \\ s_n \in B}} Cyl(s_0 \dots s_n)$$ ⟶ c'est bien énumérable...

▷ $$A\, \mathcal{U}\, B = \bigcup_{\substack{s_0 s_1 \dots s_n \in Paths^F_s(\mathcal{M}) \\ \text{t.q. } s_0, \dots, s_{n-1} \in A \setminus B \\ \text{et } s_n \in B}} Cyl(s_0 \dots s_n)$$

et $$\mathbb{P}(A\, \mathcal{U}\, B) = \sum_{\substack{s_0 s_1 \dots s_n \in Paths^F_s(\mathcal{M}) \\ \text{t.q. } s_0, \dots, s_{n-1} \in A \setminus B \\ s_n \in B}} \underbrace{\mathbb{P}(Cyl(s_0 \dots s_n))}_{= \prod_{i=0}^{n-1} P(s_i, s_{i+1})}$$

▷ $$\mathbf{GF}\, B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} \bigcup_{\substack{s_0 \dots s_m \in Paths^F_s(\mathcal{M}) \\ \text{et } s_m \in B}} Cyl(s_0 \dots s_m)$$

Calculer les probabilités d'accessibilité :

→ on considère la prop. d'accessibilité contrainte $C \mathcal{U} B$ où $C, B \subseteq S$

Pour chaque état $s \in S$, on va calculer $x_s = Pr(s \models C \mathcal{U} B)$.

[1] On note $S_{=0}$ les états de S qui ne vérifient pas la propriété CTL $\underline{E\, C \mathcal{U} B}$ [donc les états à partir desquels on ne peut pas atteindre B tout en visitant C le long du chemin ...]

On peut voir que $S_{=0} = \{ s \in S \,/\, Pr(s \models C \mathcal{U} B) = 0 \}$

Donc : $\forall s \in S_{=0},\ x_s = 0$

[2] On note $S_{=1} = B$.

On peut voir que $S_{=1} \subseteq \{ s \in S \,/\, Pr(s \models C \mathcal{U} B) = 1 \}$

Donc : $\forall s \in S_{=1},\ x_s = 1$

[3] Pour les états de $S \setminus (S_{=0} \cup S_{=1}) = S_?$ on obtient un système d'équations : $\bar{y} = M \bar{y} + \bar{b}$

avec : ▸ M = une matrice carrée $|S_?| \times |S_?|$ telle que si $s, t \in S_?$, le coef. de la ligne "s" et de la colonne "t" correspond à $P(s,t)$ de $\mathcal{M}$.

▸ $\bar{b} = (b_s)_{s \in S_?}$ avec $b_s = \sum_{u \in B} P(s,u)$

Alors $(x_s)_{s \in S_?}$ est $\underline{\text{la}}$ solution unique de $\bar{y} = A\bar{y} + \bar{b}$.

NB : il est important d'avoir $S_{=0} = \{ s \,/\, Pr(s \models C \mathcal{U} B) = 0 \}$ pour avoir une seule solution.

Algorithme de calcul par convergence :

Pour calculer $\bar{x} = (x_s)_{s \in S_?}$ t.q. $x_s = Pr(s \models \mathcal{C}\mathcal{M}\mathcal{B})$, on peut utiliser l'algorithme suivant :

1] calcul de $S_{=0}$

2] calcul de $S_{=1}$ ($= \mathcal{B}$)

3] calcul de M et $\bar{b}$.

4] calcul de $\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)} \ldots$ jusqu'à "convergence"

avec $\begin{cases} \bar{x}^{(0)} = \bar{0} \\ \bar{x}^{(n+1)} = M\bar{x} + b \end{cases}$

lorsque $\max_{s \in S_?} |x_s^{(n+1)} - x_s^{(n)}| < \varepsilon$

pour un ε fixé

→ approximation.

. NB : la limite $\lim_{n \to +\infty} \bar{x}^{(n)}$ est la solution $\bar{x}$.

NB' : si on suppose juste que $S_{=0} \subseteq \{s \mid Pr(s \models \mathcal{C}\mathcal{M}\mathcal{B}) = 0\}$ alors $\bar{x}$ est le plus petit point fixe de l'opérateur $\Gamma : [0,1]^{S_?} \to [0,1]^{S_?}$ défini par $\Gamma(\bar{y}) = M\bar{y} + \bar{b}$

NB'' : le tps de convergence peut être long...