Accessibilité répétée :

Si $\mathcal{M}$ est une chaîne de Markov **finie** et $t \in S$,

alors $$\Pr(s \models GF\, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin \mathcal{E} \text{ avec } \mathcal{E} \in CFCT(\mathcal{M}) \\ \Pr(s \models F\, \mathcal{E}) & \text{sinon avec } \mathcal{E} \text{ la CFCT contenant } t. \end{cases}$$

CFCT = composante fortement connexe Terminale

Propriétés "qualitatives" :

- soit $S_{=0} = \{ s \in S \mid \Pr(s \models c\mathcal{U} B) = 0 \}$

alors : $S_{=0} = S \setminus \{ s \in S / \underbrace{s \models E\, c\, \mathcal{U}\, B}_{\text{dans la struct. de Kripke sous-jacente à } \mathcal{M}} \}$

Complexité : $O(|\mathcal{M}|)$

- Soit $S_{=1} = \{ s \in S \mid Pr(s \models C \cup B) = 1 \}$

On construit une chaine de Markov $\mathcal{M}' = (S, P', s_0, \ell)$ où les états de B et ceux de $S \setminus (C \cup B)$ sont absorbants (= bouclent sur eux-m avec proba 1).

On peut alors calculer l'ensemble $S_{=1}$ en utilisant des algos de parcours de graphes, car on a : $S_{=1} = S \setminus Pre^*(S \setminus Pre^*(B))$

PCTL (Probabilistic CTL)

Syntaxe:

$$\begin{cases} \varphi_1, \varphi_2 ::= \top \mid a \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \neg \varphi_1 \mid \mathbb{P}_J(\varphi_p) \\ \varphi_p ::= X \varphi_1 \mid \varphi_1 \,\mathcal{U}\, \varphi_2 \mid \varphi_1 \,\mathcal{U}^{\leq n}\, \varphi_2 \end{cases}$$

$a \in AP$, $J \subseteq [0;1]$: interv. avec bornes rationnelles

Sémantique:

$s \models a \iff a \in \ell(s)$

$s \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \iff (s \models \varphi_1$ et $s \models \varphi_2)$

$s \models \neg \varphi_1 \iff s \not\models \varphi_1$

$s \models \mathbb{P}_J(\varphi_p) \iff \Pr(s \models \varphi_p) \in J$

avec $\Pr(s \models \varphi_p) = \Pr(\{\pi \in Paths(s) \mid \pi \models \varphi_p\})$

Et:

$\pi \models X \varphi \iff \pi(1) \models \varphi$

$\pi \models \varphi_1 \,\mathcal{U}\, \varphi_2 \iff \exists j \geq 0 \; (\pi(j) \models \varphi_2$ et $\forall 0 \leq k < j,\ \pi(k) \models \varphi_1)$

$\pi \models \varphi_1 \,\mathcal{U}^{\leq n}\, \varphi_2 \iff \exists 0 \leq j \leq n \; (\pi(j) \models \varphi_2$ et $\forall 0 \leq k < j,\ \pi(k) \models \varphi_1)$

On utilise ainsi l'opérateur G :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_{\leq p}(G\,\varphi) = \mathbb{P}_{\geq 1-p}(F\,\neg\varphi) & (\dots) \\ \mathbb{P}_{]p,q]}(G^{\leq n}\,\varphi) = \mathbb{P}_{[1-q\,;\,1-p[}(F\,\neg\varphi) & (\dots) \end{cases}$$

NB: on peut tjs se ramener à des opérateurs $\mathbb{P}_{\leq p}$ ou $\mathbb{P}_{\geq q}$.

Ex: $\mathbb{P}_{]0.3;0.7]}(\varphi) = \neg\,\mathbb{P}_{\leq .3}(\varphi) \wedge \mathbb{P}_{\leq .7}(\varphi)$

Prop: $\mathbb{P}_{<p}(\varphi) \equiv \neg\,\mathbb{P}_{\geq p}(\varphi) \quad \forall p \in]0;1]$