

TD 2

1 Propriétés qualitatives

Montrer que les 3 points suivants (discutés en cours) sont équivalents. NB : b est un sous-ensemble d'états d'une chaîne de Markov $\mathcal{M} = (S, P, s_0, \ell)$ finie. On rappelle que les formules de CTL s'interprètent sur la structure de Kripke induite par $\mathcal{M}$.

1. $Pr(s \models \text{GF } b) = 1$
2. $\mathcal{C} \cap b \neq \emptyset$ pour toute composante fortement connexe terminale $\mathcal{C}$ atteignable depuis s
3. $s \models \text{AG EF } b$

2 Modéliser et analyser - Chaînes de Markov avec coûts

On considère le jeu de l'oie de la figure 1. On y joue avec un dé à six faces, on part de la case 0 et on cherche à arriver à la case 15. Pour atteindre la case 15 depuis une case i , il faut que le dé donne exactement la valeur v telle que $i + v = 15$ et si $i + v > 15$ on reste en i .

0 <i>début</i>	1	2	3 <i>sauter un tour</i>
11	12	13 <i>retourner à la case départ !</i>	4 <i>rejouer</i>
10 <i>retourner à la case départ !</i>	15 <i>bingo !</i>	14	5
9	8 <i>reculer de 3 cases</i>	7	6

FIGURE 1 – jeu de l'oie

On souhaite représenter le jeu sous la forme d'une chaîne de Markov afin de répondre aux questions suivantes :

1. Avec quelle probabilité, on atteint la case 15 ?
2. En combien de tours en moyenne, atteint-on la case 15 ?

Donner une modélisation du jeu sous la forme d'une chaîne de Markov avec coûts.

3 Equivalence de formules PCTL

Pour chaque cas ci-dessous, indiquer si c'est correct (à justifier!) ou erroné (donner un contre-exemple) :

- $P_{=1}X (P_{=1}G a) \stackrel{?}{=} P_{=1}G (P_{=1}X a)$
- $P_{>.5}X (P_{>.5}F a) \stackrel{?}{=} P_{>.5}F (P_{>.5}X a)$
- $P_{=1}X (P_{=1}F a) \stackrel{?}{=} P_{=1}F (P_{=1}X a)$

4 Chaînes de Markov avec coûts

On considère les deux chaînes de Markov de la figure 2. Pour $\mathcal{M}_1$, on considère la fonction coût suivant : $w(q_0) = w(q_4) = 0$, $w(q_1) = 4$, $w(q_2) = 3$ et $w(q_3) = 2$. Et pour $\mathcal{M}_2$, on considère la fonction coût suivant : $w(q_0) = w(q_4) = w(q_5) = 0$, $w(q_1) = 2$, $w(q_2) = 5$ et $w(q_3) = 10$.

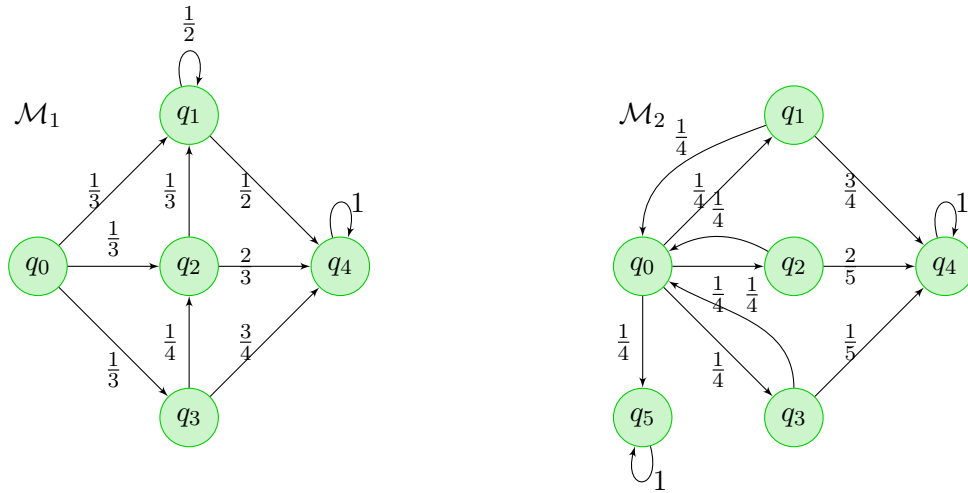


FIGURE 2 – Chaînes de Markov de l'exercice 4.

1. Pour la chaîne $\mathcal{M}_1$, calculer la probabilité d'arriver en q_4 depuis q_0 .
2. Pour la chaîne $\mathcal{M}_1$, calculer le coût moyen pour arriver en q_4 depuis q_0 .
3. Pour la chaîne $\mathcal{M}_2$, calculer la probabilité d'atteindre q_4 depuis q_0 pour un coût total borné par 15.