M2 informatique 2023-2024

Vérification de systèmes probabilistes
Mardi 26 mars 2024 9h – 11h / Notes de cours autorisées

Mode d'emploi : Le barème est donné à titre indicatif. **La qualité de la rédaction et des explications sera très fortement prise en compte pour la note.** On peut toujours supposer une question résolue et passer à la suite.

1 Modélisation (2,5)

On considère le jeu de dé suivant : le joueur lance un dé à **10** faces. Et :
— Si le résultat est 1, 2 ou 3, c'est gagné !
— Si le résultats est 9 ou 10, c'est perdu !
— Sinon, le joueur relance le dé tant que deux valeurs successives n'ont pas la même parité : dès que deux valeurs paires se suivent, c'est gagné ! Et dès que deux valeurs impaires se suivent, c'est perdu ! (le premier lancé est pris en compte).

1. Modéliser ce jeu sous la forme d'une chaîne de Markov.
2. Quelle est la probabilité de gagner ?
3. Quelle est la probabilité que ce jeu ne termine jamais ?

2 Analyse de chaînes de Markov (3)

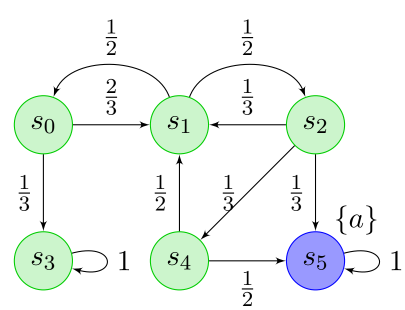


FIGURE 1 – La chaîne $\mathcal{M}_1$.

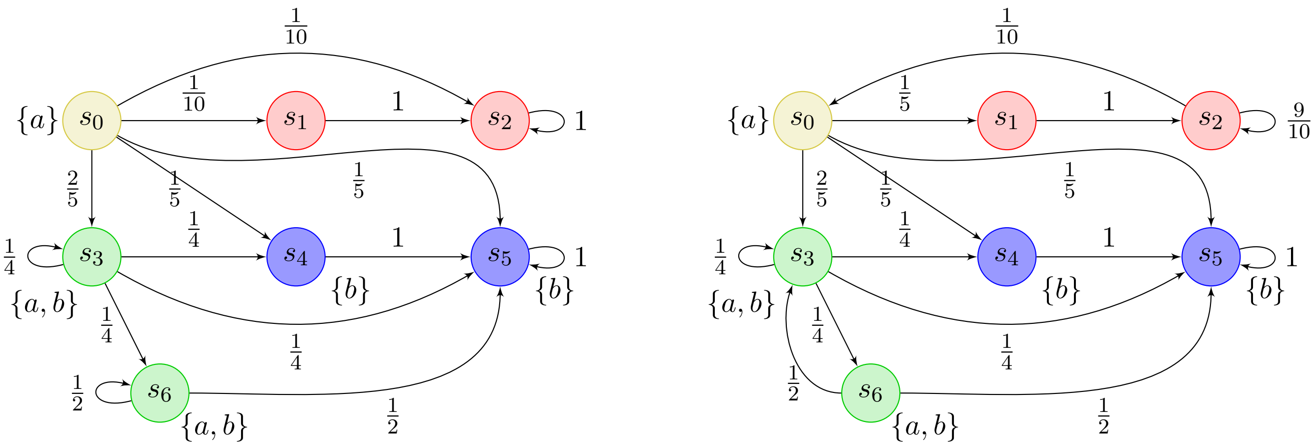
On considère la chaîne $\mathcal{M}_1$ de la Figure 1, l'étiquetage des propositions atomiques est indiqué entre accolades. On s'intéresse à la propriété $\mathsf{F}\,a$:

1. Calculer les probabilités $x_i = Pr(s_i \models \mathsf{F}\ a)$ pour $i = 0, \dots, 5$ en posant les équations correspondantes et en les résolvant.
2. Appliquer l'algorithme itératif pour calculer les probabilités x_is. On détaillera les 4 premières itérations de l'algorithme (donc les vecteurs $\overline{x}^{(0)}$, $\overline{x}^{(1)}$, $\overline{x}^{(2)}$ et $\overline{x}^{(3)}$).

3 Bisimulation probabiliste (2,5)

On considère les chaînes de Markov $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$ de la figure 2. L'étiquetage des propositions atomiques est indiqué entre accolades.

Simplifiez les deux chaînes en construisant leurs chaînes quotient $\mathcal{M}_{2/\sim}$ et $\mathcal{M}_{3/\sim}$ dont les états sont les classes d'équivalence de la relation $\sim$ sur les états de $\mathcal{M}_2$ ou $\mathcal{M}_3$.



(a) $\mathcal{M}_2$. (b) $\mathcal{M}_3$.

FIGURE 2 – Les chaînes $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$.

4 PCTL (2.5)

On reprend la chaîne de Markov $\mathcal{M}_2$ de l'exercice précédent. Pour chaque cas ci-dessous, indiquer si la formule est vraie ou non. Justifier vos réponses.

1. $\mathcal{M}_2, s_3 \models \mathsf{P}_{>.7}\mathsf{F}\,(b \wedge \neg a)$
2. $\mathcal{M}_2, s_0 \models \mathsf{P}_{>.5}\mathsf{X}\,(\mathsf{P}_{>.7}\mathsf{F}\,(b \wedge \neg a))$
3. $\mathcal{M}_2, s_0 \models \mathsf{P}_{\geq 1}\mathsf{F}\,\mathsf{G}\,(\neg a)$

5 PCTL (suite) (2,5)

Ecrire les propriétés suivantes en PCTL :

1. On atteint un état vérifiant ok avec une probabilité supérieure à 0.9.
2. On atteint l'état vérifiant ok sans passer par un état vérifiant ko avec une probabilité supérieure à 0.7.
3. On a toujours ok avec probabilité 1.

6 Analyse de processus de décision de Markov (7)

On considère le MDP $\mathcal{P}$ de la figure 3. Chaque action a un nom différent.

1. Calculer $Pr^{min}(s_0 \models \mathsf{F}\, a)$. Donner un scheduler qui réalise cette probabilité.
2. Calculer $Pr^{max}(s_0 \models \mathsf{F}\, a)$. Donner un scheduler qui réalise cette probabilité.
3. Pour les énoncés suivants, indiquer si ils sont vrais ou faux (et justifier vos réponses) :
   (a) $s_0 \models \mathsf{P}_{<.5}\mathsf{F}\, a$
   (b) $s_0 \models \mathsf{P}_{<.001}\mathsf{F}\, a$
   (c) $s_0 \models \mathsf{P}_{>.5}\mathsf{F}\, a$
4. On s'intéresse à la propriété $\mathsf{F}^{<3}a$. Calculer $Pr^{max}(s_0 \models \mathsf{F}^{<3}a)$ et donner un scheduler qui la réalise.

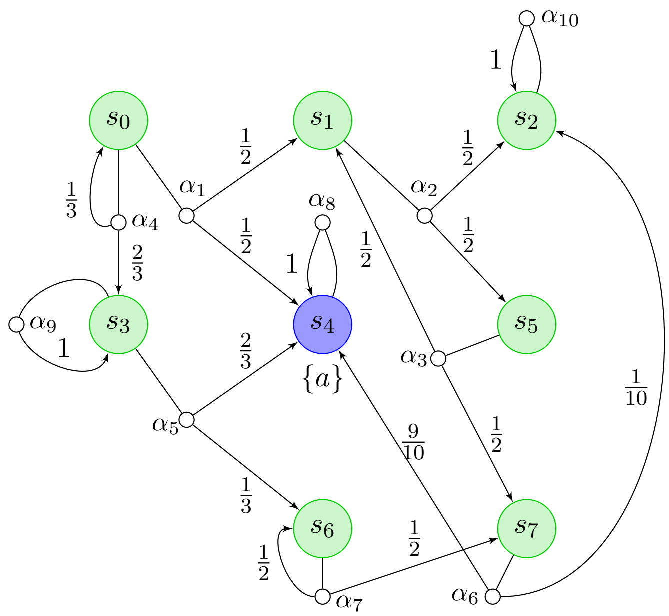


Figure 3 – Le MDP $\mathcal{P}$.