



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 647–650



Topologie/Informatique théorique

Automate parallèle à homotopie près (II)

Concurrent process up to homotopy (II)

Philippe Gaucher

Institut de recherche mathématique avancée, ULP et CNRS, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France

Reçu le 12 juillet 2002 ; accepté après révision le 2 décembre 2002

Présenté par Jean-Louis Koszul

Résumé

On démontre que la catégorie des CW-complexes globulaires à dihomotopie près est équivalente à la catégorie des flots à dihomotopie faible près. Ce théorème est une généralisation du théorème classique disant que la catégorie des CW-complexes modulo homotopie est équivalente à la catégorie des espaces topologiques modulo homotopie faible. *Pour citer cet article : P. Gaucher, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

One proves that the category of globular CW-complexes up to dihomotopy is equivalent to the category of flows up to weak dihomotopy. This theorem generalizes the classical theorem which states that the category of CW-complexes up to homotopy is equivalent to the category of topological spaces up to weak homotopy. *To cite this article: P. Gaucher, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

1. Rappels sur les flots

Cette Note est la deuxième de deux Notes présentant quelques résultats de [1]. Tous les espaces topologiques sont supposés faiblement séparés et compactement engendrés, c'est-à-dire dans ce cas homéomorphes à la limite inductive de leurs sous-espaces compacts (cf. l'appendice de [5] pour un survol des propriétés de ces espaces). La catégorie correspondante est notée **Top**. On travaille ainsi dans une catégorie d'espaces topologiques qui est non seulement complète et cocomplète mais en plus cartésienement fermée [6]. En d'autres termes, le foncteur $- \times X : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$ a un adjoint à droite $\mathbf{TOP}(X, -)$. Dans la suite, D^n est le disque fermé de dimension n et S^{n-1} est le bord de D^n , à savoir la sphère de dimension $n - 1$. En particulier la sphère de dimension 0 est la paire $\{-1, +1\}$.

Définition 1.1 [1]. Un flot X consiste en la donnée d'un ensemble X^0 appelé 0-squelette, d'un espace topologique $\mathbb{P}X$ appelé espace des chemins, de deux applications continues $s : \mathbb{P}X \rightarrow X^0$ et $t : \mathbb{P}X \rightarrow X^0$ (X^0 étant muni de

Adresse e-mail : gaucher@math.u-strasbg.fr (P. Gaucher).

la topologie discrète) et d’une application continue $*$: $\{(x, y) \in \mathbb{P}X \times \mathbb{P}X, t(x) = s(y)\} \rightarrow \mathbb{P}X$ satisfaisant les axiomes $s(x * y) = s(x)$, $t(x * y) = t(y)$ et enfin $x * (y * z) = (x * y) * z$ pour tout $x, y, z \in \mathbb{P}X$. Un morphisme de flots f de X vers Y est une application continue de $X^0 \sqcup \mathbb{P}X$ vers $Y^0 \sqcup \mathbb{P}Y$ telle que $f(X^0) \subset Y^0$, $f(\mathbb{P}X) \subset \mathbb{P}Y$, $s(f(x)) = f(s(x))$, $t(f(x)) = f(t(x))$, $f(x * y) = f(x) * f(y)$. La catégorie correspondante est notée **Flow**.

Les éléments de $\mathbb{P}X$ sont appelés les chemins d’exécution (non-constants) et ceux de X^0 les états de X (ou encore les chemins d’exécution constants).

Si Z est un espace topologique, le flot $Glob(Z)$ est défini comme suit : $\mathbb{P}Glob(Z) = Z$, $Glob(Z)^0 = \{0, 1\}$, et enfin $s = 0$ et $t = 1$ (il n’y a pas de chemins d’exécution composables). Si Z est un singleton, on obtient le flot \bar{I} correspondant au segment dirigé.

Définition 1.2 [1]. Deux morphismes de flots f et g de X dans Y sont S-homotopes s’il existe une application continue $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que (1) $H(-, u)$ est un morphisme de flots de X dans Y . (2) $H(-, 0) = f$ et $H(-, 1) = g$. On écrit $f \sim_S g$.

De là on définit la notion de flots S-homotopes :

Définition 1.3 [1]. Deux flots X et Y sont S-homotopes s’il existe un morphisme de flots $f : X \rightarrow Y$ et un morphisme de flots $g : Y \rightarrow X$ tels que $f \circ g \sim_S Id_Y$ et $g \circ f \sim_S Id_X$. On dit alors que f et g sont deux équivalences de S-homotopie réciproques.

Il existe une deuxième classe de morphismes de flots appelés T-homotopie qui permet d’identifier des flots ayant les mêmes propriétés informatiques sous-jacentes [2,1]. Nous n’en dirons rien de nouveau ici par rapport à la précédente note. Il est donc inutile de rappeler la définition précise de cette classe de morphismes.

2. Flot S-cofibrant

Un flot S-cofibrant est obtenu par définition comme suit. On part d’un espace discret X^0 et on considère le flot correspondant ayant X^0 comme 0-squelette et l’ensemble vide \emptyset comme espace de chemins. On lui attache ensuite des \bar{I} pour obtenir un premier flot X_0^1 . On passe ensuite de X_n^1 à X_{n+1}^1 pour $n \geq 0$ en attachant des $Glob(D^{n+1})$ le long de morphismes d’attachement $Glob(S^n) \rightarrow X_n^1$. En d’autres termes, on choisit une famille de morphismes de flots $f_i : Glob(S^n) \rightarrow X_n^1$ pour $i \in I$ et X_{n+1}^1 est alors obtenu par le diagramme cocartésien dans la catégorie des flots (qui se trouve être cocomplète)

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_{i \in I} Glob(S^n) & \xrightarrow{\bigsqcup_{i \in I} f_i} & X_n^1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \bigsqcup_{i \in I} Glob(D^{n+1}) & \longrightarrow & X_{n+1}^1
 \end{array}$$

Si Z est un CW-complexe, alors $Glob(Z)$ est un exemple de flot S-cofibrant. Vu la similitude entre la construction des CW-complexes globulaires introduits dans [3,2] et celle des flots S-cofibrants, on n’aura pas de mal à se convaincre du :

Théorème 2.1 [1]. *Le plongement des CW-complexes globulaires dans les flots induit une équivalence de catégories entre les CW-complexes globulaires à S-homotopie et T-homotopie près et les flots S-cofibrants à S-homotopie et T-homotopie près.*

La preuve de ce théorème repose essentiellement sur le fait que deux CW-complexes globulaires sont S-homotopes (resp. T-homotopes) si et seulement si les flots correspondants sont S-homotopes (resp. T-homotopes) (cf. [2]).

3. Dihomotopie faible

Définition 3.1 [1]. Un morphisme de flots $f : X \rightarrow Y$ est une S -homotopie faible si f induit une bijection entre X^0 et Y^0 et une équivalence d'homotopie faible de $\mathbb{P}X$ vers $\mathbb{P}Y$. On dit alors que X et Y sont faiblement S -homotopes.

Théorème 3.2 [1]. Un morphisme de flots $f : X \rightarrow Y$ entre deux flots S -cofibrants X et Y est une équivalence de S -homotopie faible si et seulement si c'est une équivalence de S -homotopie.

Si les deux flots S -cofibrants sont de la forme $Glob(Z)$ et $Glob(T)$ où Z et T sont deux CW-complexes, cet énoncé correspond au théorème classique de Whitehead.

Pour le démontrer, on commence par introduire pour tout espace topologique U et tout flot X un flot $U \boxtimes X$ de telle façon que l'on ait la bijection naturelle $\mathbf{Flow}([0, 1] \boxtimes X, Y) \simeq \mathbf{Top}([0, 1], \mathbf{FLOW}(X, Y))$ où $\mathbf{FLOW}(X, Y)$ est l'ensemble des morphismes de flots de X à Y muni de la Kelleyfication de la topologie induite par celle de $\mathbf{TOP}(X, Y)$. Mais le foncteur $\mathbf{FLOW}(X, -) : \mathbf{Flow} \rightarrow \mathbf{Top}$ ne commute pas avec les limites projectives. En effet, si X est un singleton, alors $\mathbf{FLOW}(X, Y) = Y^0$ est toujours discret mais la limite projective d'espaces topologiques discrets peut être totalement discontinue sans être discrète. On doit donc procéder autrement pour définir correctement $U \boxtimes X$. Mais dès que U est connexe, la bijection naturelle ci-dessus est vraie et $U \boxtimes X$ est alors le flot libre engendré par $X^0 \sqcup (U \times X)$ quotienté par les relations $s(u, x) = s(x)$, $t(u, x) = t(x)$ et $(u, x) * (u, y) = (u, x * y)$ dès que $t(x) = s(y)$ pour tout $u \in U$ et tout $x, y \in \mathbb{P}X$.

Puis on adapte à la catégorie des flots la théorie des paires NDR et DR d'espaces topologiques [6] de la façon suivante. La notion de paire NDR d'espaces topologiques devient la notion de S -cofibration définie comme suit :

Définition 3.3 [1]. Un morphisme de flots $i : X \rightarrow Y$ est une S -cofibration si i vérifie la propriété de relèvement des S -homotopies, i.e. pour tous morphismes de flots $g : Y \rightarrow Z$ et $H : [0, 1] \boxtimes X \rightarrow Z$ tels que $H(0 \boxtimes x) = g(i(x))$, il existe un morphisme de flots $\bar{H} : [0, 1] \boxtimes Y \rightarrow Z$ tel que $\bar{H}(u \boxtimes i(x)) = H(u \boxtimes x)$ et $\bar{H}(0 \boxtimes y) = g(y)$ pour tout $u \in [0, 1]$, $x \in X$ et $y \in Y$.

La notion de paire DR d'espaces topologiques devient la notion de S -cofibration acyclique définie comme suit :

Définition 3.4 [1]. Une S -cofibration $i : X \rightarrow Y$ est acyclique si elle est une équivalence de S -homotopie.

Avec ces objets, on démontre alors (entre autre) le théorème suivant :

Théorème 3.5 [1]. Soit (Y, B) une paire NDR d'espaces topologiques et soit $i : A \rightarrow X$ une S -cofibration. Alors le morphisme de flots canonique $(Y, B) \boxtimes i : Y \boxtimes A \sqcup_B \boxtimes_A B \boxtimes X \rightarrow Y \boxtimes X$ est une S -cofibration. Si de plus (Y, B) est une paire DR ou si i est une S -cofibration acyclique, alors la S -cofibration $(Y, B) \boxtimes i$ est acyclique.

On a enfin besoin, comme dans le cas classique, de prouver que tout morphisme de flots est S -homotope à une inclusion de flots. Cela se fait en introduisant le « mapping cylindre » d'un morphisme de flots comme suit :

Définition 3.6 [1]. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de flots. Le mapping cylindre de f est le flot I_f obtenu par le diagramme cocartésien de \mathbf{Flow} suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \{1\} \boxtimes X & \longrightarrow & [0, 1] \boxtimes X \\
 \downarrow 1 \boxtimes x \mapsto f(x) & & \downarrow \\
 Y & \longrightarrow & I_f
 \end{array}$$

Muni de ces outils, on suit alors pas-à-pas la démonstration du théorème de Whitehead telle que exposée dans le livre [7] en adaptant aux flots les théorèmes de compression ainsi que les différents théorèmes d'extension de morphismes ou d'homotopies. On obtient même gratuitement le théorème suivant :

Théorème 3.7 [1]. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de flots où X et Y sont deux flots S -cofibrants. Alors f est S -homotope à un morphisme de flots $g : X \rightarrow Y$ tel que pour tout $n \geq 0$, $g(X_n^1) \subset Y_n^1$.

Enfin on a :

Théorème 3.8 [1]. *Tout flot est faiblement S -homotope à un flot S -cofibrant. Ce CW-complexe globulaire est nécessairement unique à S -homotopie près d'après le théorème précédent.*

Si X est un espace topologique, on sait qu'il existe une procédure pour construire une famille de CW-complexes $(Y_n)_{n \geq 0}$ où pour tout $i \geq 0$ et tout point base, l'application canonique $\pi_i(Y_n) \rightarrow \pi_i(X)$ est surjective et pour tout $0 \leq i \leq n$ et tout point base, l'application canonique $\pi_i(Y_n) \rightarrow \pi_i(X)$ est injective. Dans cette procédure, on passe de Y_n à Y_{n+1} en attachant des disques D^{n+1} à Y_n . La notation π_i désigne évidemment le i -ième groupe d'homotopie.

Une procédure exactement similaire fonctionne pour les flots. On part d'un flot X et on commence par associer à $\mathbb{P}X$ un espace Y_0 et une application continue $Y_0 \rightarrow \mathbb{P}X$ vérifiant les mêmes conditions que ci-dessus. On prend alors le flot libre T_0 engendré par X^0 et Y_0 , ce qui ne change évidemment rien à la situation pour les groupes d'homotopie. Puis on attache à T_0 des cellules $Glob(D^1)$ le long de morphismes d'attachement $Glob(S^0) \rightarrow T_0$ de façon à obtenir un morphisme de flots $T_1 \rightarrow X$ induisant des bijections pour π_0 et π_1 . L'unique différence avec ce qui se passe pour les espaces topologiques est qu'attacher une cellule à un flot peut engendrer, du fait de la composition des chemins, un attachement de plusieurs cellules à l'espace des chemins sous-jacents. Cela ne change rien pour les groupes d'homotopie. D'où le résultat en itérant le procédé. Et comme corollaire, on obtient le

Théorème 3.9 [1]. *Le foncteur réalisation catégorique induit une équivalence de catégories entre la catégorie des CW-complexes globulaires à S -homotopie et à T -homotopie près et la catégorie des flots à S -homotopie faible et à T -homotopie près.*

Nous avons donc obtenu après [3] une deuxième façon de décrire les automates parallèles à dihomotopie près. L'immense avantage de cette seconde façon est que la catégorie des flots est complète et cocomplète, contrairement à la catégorie des CW-complexes globulaires. De plus on a le

Théorème 3.10 [1]. *Il existe une structure modèle sur la catégorie des flots dont les équivalences faibles sont exactement les S -homotopies faibles.*

Question 3.11. Existe-t-il une structure modèle sur la catégorie des flots dont les équivalences faibles contiendraient aussi les T -homotopies? Cette structure modèle pourrait être obtenue éventuellement par localisation à gauche ou à droite au sens de [4] de la structure modèle du Théorème 3.10.

Il y a deux obstacles à surmonter pour répondre à cette question : (1) prouver l'existence d'une ou des deux localisations, (2) vérifier que la ou les nouvelles structures modèle n'identifient pas des automates parallèles ayant des propriétés différentes.

Pour terminer, la catégorie des flots n'est pas cartésienement fermée mais elle possède quand même une structure monoïdale fermée qui a une signification informatique intéressante [1].

Références

- [1] P. Gaucher, A convenient category for the homotopy theory of concurrency, 2002, math.AT/0201252.
- [2] P. Gaucher, Automate parallèle à homotopie près (I), Projet de note aux C. R. Acad. Sci. Paris, 2002.
- [3] P. Gaucher, E. Goubault, Topological deformation of higher dimensional automata, 2001, math.AT/0107060, à paraître dans Homology, Homotopy and Applications.
- [4] P.S. Hirschhorn, Localization of model categories, October 2001, available at <http://www-math.mit.edu/~psh/>.
- [5] L.G. Lewis, The stable category and generalized thom spectra, Ph.D. thesis, University of Chicago, 1978.
- [6] N.E. Steenrod, A convenient category of topological spaces, Michigan Math. J. 14 (1967) 133–152.
- [7] G.W. Whitehead, Elements of Homotopy Theory, Springer-Verlag, New York, 1978.