

# Déformation des Flots de Chemins Continus : Théorie et Applications

Habilitation à Diriger les Recherches  
Mémoire de synthèse

Philippe Gaucher  
Institut de Recherche Mathématique Avancée  
ULP et CNRS UMR 7501  
7 rue René Descartes  
67084 Strasbourg Cedex  
France  
[gaucher@math.u-strasbg.fr](mailto:gaucher@math.u-strasbg.fr)

# Table des matières

1	Introduction	1
2	Vers une théorie homotopique des flots	2
3	La combinatoire des branchements	9
4	Le nerf globulaire	12
5	Les deux articles à ENTCS	14
6	Les nerfs semi-globulaires	18
7	Les CW-complexes globulaires	19

## 1 Introduction

Je travaille principalement sur l'approche géométrique du parallélisme. Cela m'a conduit à introduire des objets et des idées qui sont les prémisses d'une théorie des flots de chemins continus à homotopie près. Cette relation d'équivalence sur les flots appelée *homotopie dirigée* ou *dihomotopie* préserve rigoureusement les propriétés informatiques de l'automate parallèle correspondant au flot. Cette démarche peut donc non seulement aboutir à des applications concrètes mais elle aboutit aussi à conjecturer l'existence d'une théorie générale des flots de chemins à homotopie près dont la topologie algébrique classique serait un cas particulier.

Ce domaine de recherche est à l'intersection des deux domaines suivants :

1. La modélisation de phénomènes concrets (en particulier le parallélisme mais d'autres applications sont envisagées) qui sont étroitement liés à l'écoulement du temps, plus particulièrement à son irréversibilité.
2. La topologie algébrique, et plus particulièrement les  $\omega$ -catégorie et les problèmes combinatoires associés, ainsi que l'algèbre homologique et ses généralisations non-additives.

## 2 Vers une théorie homotopique des flots

Je présente dans cette section l'article [Gau00b] de façon synthétique. Dans [Gou95], une modélisation des automates parallèles (Higher Dimensional Automata en anglais ou HDA) par des ensembles précubiques <sup>1</sup> est introduite. L'origine de cette idée semble être [Pra91].

**Définition 2.1.** *Un ensemble précubique est une famille  $(K_n)_{n \geq 0}$  d'ensembles munie d'opérateurs face  $\partial_i^\alpha : K_n \rightarrow K_{n-1}$  pour tout  $n \geq 1$ ,  $1 \leq i \leq n$  et  $\alpha \in \{-, +\}$  vérifiant  $\partial_i^\alpha \partial_j^\beta = \partial_{j-1}^\beta \partial_i^\alpha$  pour  $i < j$ .*

Dans ce modèle, un cube de dimension  $n$   $[0, 1]^n$  représente l'exécution en parallèle de  $n$  transitions <sup>2</sup> de dimension 1. Chaque coordonnée représente l'état d'avancement d'une des  $n$  1-transitions et les chemins d'exécution possibles sont tous les chemins continus croissants par rapport à chaque axe de coordonnées de  $(0, 0, \dots, 0)$  à  $(1, 1, \dots, 1)$ . Un HDA est alors un collage de  $n$ -cubes. Cette idée a été implémentée plus tard par Cridlig sous forme d'un programme CaML traduisant un programme écrit en *Concurrent Pascal* en un fichier texte contenant le codage d'un ensemble précubique [Cri96]. Dans ce modèle, une exécution séquentielle (i.e. quand rien n'a lieu en parallèle) correspond à un mot fabriqué avec les éléments de  $K_1$  et réciproquement.

Goubault a alors l'idée d'associer dans [Gou95] deux théories homologiques à un tel objet de la façon suivante : si  $\mathbb{Z}K_n$  est le groupe abélien libre engendré par  $K_n$ , alors l'application linéaire  $\partial^\alpha$  pour  $\alpha \in \{-, +\}$  de  $\mathbb{Z}K_n$  dans  $\mathbb{Z}K_{n-1}$  définie par  $\partial^\alpha = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \partial_i^\alpha$  vérifie  $\partial^\alpha \circ \partial^\alpha = 0$ ; on peut alors considérer les deux théories homologiques engendrées par les deux différentielle; notons les  $H_*^-$  et  $H_*^+$ . Alors il remarque que pour  $n \geq 1$ ,  $H_n^-$  (resp.  $H_n^+$ ) permet de voir les zones de branchement (resp. les zones de confluence) de chemins d'exécution et que pour  $n = 0$ ,  $H_0^-$  (resp.  $H_0^+$ ) permet de voir les états finaux (resp. initiaux) de l'automate parallèle modélisé.

Considérons en effet pour illustrer cette idée le cas du HDA (ou ensemble précubique) de dimension 1 de la figure 1. Alors  $u - w$  est un cycle qui induit sur  $H_1^-$  une classe d'homologie non-triviale. L'idée se généralise aisément en dimension supérieure. La figure 2 représente un automate parallèle avec un branchement de dimension 2 : ici  $(A) - (F) + (I)$  est un cycle induisant une classe d'homologie non triviale dans  $H_2^-$ .

Dans [Gou95], un chemin de dimension 1 dans  $K$  allant de  $\alpha \in K_0$  à  $\beta \in K_0$  est formalisé par un élément  $\gamma \in \mathbb{Z}K_1$  tel que  $(\partial_1^- - \partial_1^+)(\gamma) = \alpha - \beta$ . Par exemple dans le cas de la figure 1,  $(\partial_1^- - \partial_1^+)(u + v) = \partial_1^- u - \partial_1^+ v$ . Cette astuce permet de ne pas avoir à considérer des compositions de cube pour parler des chemins de dimension 1. Mais ce

<sup>1</sup>La terminologie *ensemble précubique* m'a été suggérée par Ronald Brown.

<sup>2</sup>On appelle cela une  $n$ -transition. Par convention, une 0-transition est un autre terme pour état du HDA.

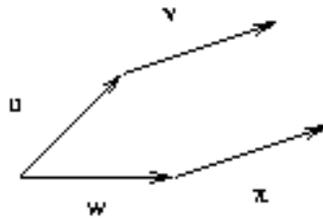


FIG. 1 – HDA avec branchement de dimension 1

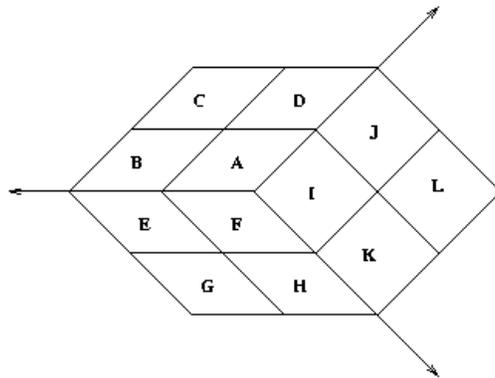


FIG. 2 – HDA avec branchement de dimension 2

formalisme *linéaire* (proche des bicomplexes) ne permet pas d'aller plus loin : on ne peut pas en effet formaliser les chemins de dimension supérieure à 1 (donc dès que des actions simultanées ont lieu). De plus, comme on le verra plus loin, si on ajoute des compositions de cubes, les théories homologiques introduites par Goubault ne sont plus invariantes par cubification : plus la description est détaillée, plus il y a de classes d'homologie non-triviales différentes associées aux mêmes zones de branchement et de confluence. Cette approche s'est donc rapidement avérée être une impasse. La solution <sup>3</sup> était de considérer les  $\omega$ -catégories strictes globulaires, comme proposée d'ailleurs déjà dans [Pra91].

**Définition 2.2.** [BH81a] [Str87] [Ste91] Une  $\omega$ -catégorie globulaire est un ensemble  $A$  muni de deux familles d'applications  $(d_n^- = s_n)_{n \geq 0}$  et  $(d_n^+ = t_n)_{n \geq 0}$  de  $A$  dans  $A$  et d'une famille d'opérations 2-aires partiellement définies  $(*_n)_{n \geq 0}$  où pour tout  $n \geq 0$ ,  $*_n$  est une application de  $\{(a, b) \in A \times A, t_n(a) = s_n(b)\}$  dans  $A$  ( $(a, b)$  étant envoyé sur  $a *_n b$ ) qui vérifient les axiomes suivants (avec  $\alpha$  et  $\beta$  éléments de  $\{-, +\}$ ) :

1.  $d_m^\beta d_n^\alpha x = \begin{cases} d_m^\beta x & \text{si } m < n \\ d_n^\alpha x & \text{si } m \geq n \end{cases}$  (égalités globulaires)
2.  $s_n x *_n x = x *_n t_n x = x$
3. si  $x *_n y$  existe, alors  $s_n(x *_n y) = s_n x$ ,  $t_n(x *_n y) = t_n y$  et pour  $m \neq n$ ,  $d_m^\alpha(x *_n y) = d_m^\alpha x *_n d_m^\alpha y$
4. dès que les deux membres de l'égalité suivante existent, alors  $(x *_n y) *_n z = x *_n (y *_n z)$
5. si  $m \neq n$  et si les deux membres de l'égalité existent, alors  $(x *_n y) *_m (z *_n w) = (x *_m z) *_n (y *_m w)$  (loi d'interchange ou axiome de Godement)
6. pour tout  $x$  dans  $A$ , il existe un entier naturel  $n$  tel que  $s_n x = t_n x = x$  (le plus petit de ces nombres est appelé la dimension de  $x$  et est noté  $\dim(x)$ ). L'ensemble des morphismes de dimension  $n$  d'une  $\omega$ -catégorie  $\mathcal{C}$  sera noté  $\mathcal{C}_n$ .

Pour  $x \in A$ ,  $s_n A$  est appelé la  $n$ -source de  $x$  et  $t_n x$  le  $n$ -but de  $x$ .

La figure 3 est une illustration de la définition de  $\omega$ -catégorie avec

$$\begin{aligned}
\alpha &= s_0 s_1 A = s_0 t_1 A = s_0 s_1 B = s_0 t_1 B \\
\beta &= t_0 s_1 A = t_0 t_1 A = t_0 s_1 B = t_0 t_1 B \\
t_1 A &= s_1 B, \quad t_1 C = s_1 D \\
(A *_1 B) *_0 (C *_1 D) &= (A *_0 C) *_1 (B *_0 D) \\
t_1(A *_0 C) &= t_1 A *_0 t_1 C = s_1 B *_0 s_1 D = s_1(B *_0 D)
\end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Tout au moins une première solution.

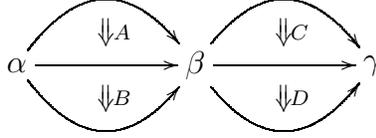


FIG. 3 – Illustration de la loi d’interchange et des axiomes globulaires

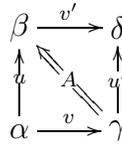


FIG. 4 – Une 2-transition

L’idée de base de ce formalisme est la suivante. Supposons que nous nous intéressons au HDA correspondant à deux exécutions en parallèle comme dans la figure 4 de  $u$  et  $v$ . On peut voir ce HDA comme une  $\omega$ -catégorie globulaire  $\mathcal{C}$  avec pour ensemble de 1-morphismes  $\mathcal{C}_1 = \{u, v, u', v', u *_0 v', v *_0 u'\}$  et un 2-morphisme  $A$  allant de  $v *_0 u'$  à  $u *_0 v'$ . Dans un tel formalisme, les 0-morphismes représentent les états du HDA, les 1-morphismes et leurs composées les chemins d’exécution de dimension 1, les 2-morphismes les homotopies entre les chemins de dimension 1, etc... En pratique, on suppose aussi tous les morphismes de dimension supérieure ou égale à 2 inversibles, comme on l’évoquera par la suite.

Pour retrouver une homologie des branchements et des confluentes, on introduit alors la  $\omega$ -catégorie libre engendrée par les faces du  $n$ -cube  $I^n$  et toutes leurs composées. En effet, si on peut associer un nerf cubique  $\omega\mathcal{C}at(I^*, \mathcal{C})$  à une  $\omega$ -catégorie  $\mathcal{C}$  représentant un HDA, alors on peut réutiliser les idées de Goubault.

Cette construction de  $I^n$  est due à Aitchison dans [Ait86] et est rappelée dans [Gau00b, Gau01a, Gau02] en utilisant le langage de [Ste98]. Disons simplement que les faces sont étiquetées par des mots de longueur  $n$  dans l’alphabet  $\{-, 0, +\}$ , un mot correspondant au barycentre d’une face : cf. la figure 5 pour une représentation de  $I^2$  et la figure 6 pour une représentation de  $I^3$ . Et là, coup de théâtre :

**Proposition 2.3.** [Gau00b] *Si  $\mathcal{C}$  est une  $\omega$ -catégorie globulaire, alors les complexes de chaînes  $(\mathbb{Z}\omega\mathcal{C}at(I^n, \mathcal{C}), \partial^-)$  et  $(\mathbb{Z}\omega\mathcal{C}at(I^n, \mathcal{C}), \partial^+)$  sont acycliques !*

Il faudra attendre juin 2001 [GG01] pour que je comprenne vraiment la raison profonde

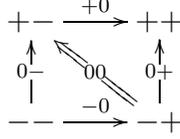


FIG. 5 – La  $\omega$ -catégorie  $I^2$

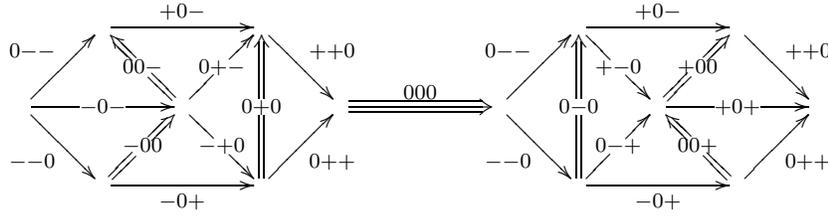


FIG. 6 – La  $\omega$ -catégorie  $I^3$

de cette acyclicité. La cause algébrique de l'acyclicité de  $\partial^-$  <sup>4</sup> est l'identité  $\partial^- \epsilon_1 + \epsilon_1 \partial^- = Id$ , où  $\epsilon_1$  est le premier opérateur de dégénérescence du nerf cubique  $\omega Cat(I^*, \mathcal{C})$  de  $\mathcal{C}$ . Je me suis donc arrangé pour ne garder dans le nerf cubique que les éléments  $x$  tels que  $\partial_{i_1}^- \dots \partial_{i_p}^- x$  ne soient jamais dans l'image de  $\epsilon_1$ . C'est comme cela que j'ai introduit dans [Gau00b] les sous-complexes non acycliques  $(\mathbb{Z}\omega Cat(I^*, \mathcal{C})^-, \partial^-)$  et  $(\mathbb{Z}\omega Cat(I^*, \mathcal{C})^+, \partial^+)$  de respectivement  $(\mathbb{Z}\omega Cat(I^n, \mathcal{C}), \partial^-)$  et  $(\mathbb{Z}\omega Cat(I^n, \mathcal{C}), \partial^+)$  :

**Définition 2.4.** [Gau00b] Soit  $\mathcal{C}$  la  $\omega$ -catégorie globulaire librement engendrée par un ensemble précubique <sup>5</sup>. Alors on pose pour tout  $n \geq 0$  :

$$\omega Cat(I^n, \mathcal{C})^- := \{x \in \omega Cat(I^n, \mathcal{C}), \forall p \geq 0, \forall i_1, \dots, \forall i_p, \partial_{i_1}^- \dots \partial_{i_p}^- x \notin Im(\epsilon_1)\}$$

$$\omega Cat(I^n, \mathcal{C})^+ := \{x \in \omega Cat(I^n, \mathcal{C}), \forall p \geq 0, \forall i_1, \dots, \forall i_p, \partial_{i_1}^+ \dots \partial_{i_p}^+ x \notin Im(\epsilon_1)\}$$

On pose alors  $H_*^-(\mathcal{C}) := H_*(\mathbb{Z}\omega Cat(I^n, \mathcal{C})^-, \partial^-)$  et on l'appelle l'homologie (semi-cubique) <sup>6</sup> des branchements et  $H_*^+(\mathcal{C}) := H_*(\mathbb{Z}\omega Cat(I^n, \mathcal{C})^+, \partial^+)$  que l'on appelle l'homologie (semi-cubique) des confluences.

<sup>4</sup>Conventionnellement, à chaque fois qu'une explication sera identique pour le cas des branchements et des confluences, je n'expliquerai dans ce texte en détail que le cas des branchements.

<sup>5</sup>Pour une  $\omega$ -catégorie globulaire quelconque, la définition change très légèrement pour des raisons techniques assez subtiles mais coïncide avec celle donnée ici pour les  $\omega$ -catégories provenant d'ensembles précubiques. On peut trouver la définition correcte dans [Gau02, Gau01a].

<sup>6</sup>Je parlais d'homologie des coins dans [Gau00b]. J'ai essayé d'homogénéiser la terminologie plus tard dans [Gau01c].

Le théorème 8.7 de [Gau00b] qui donne un lien précis entre la notion de 1-morphismes homotopes dans une  $\omega$ -catégorie vue comme un HDA et ces nouvelles théories homologiques me confirmait que j'étais sur une bonne voie.

Les deux ensembles  $\omega\text{Cat}(I^*, \mathcal{C})^-$  et  $\omega\text{Cat}(I^*, \mathcal{C})^+$  ne sont pas fonctoriels par rapport à  $\mathcal{C}$ . Pour contourner le problème et récupérer la fonctorialité, j'ai dû introduire la catégorie  $\omega\text{Cat}_1$  des  $\omega$ -catégories non-contractantes avec comme morphisme les  $\omega$ -foncteurs non-contractants. Je reviendrai sur l'interprétation algébrique et géométrique de cette définition plus loin.

**Définition 2.5.** *Une  $\omega$ -catégorie  $\mathcal{C}$  est dite non-contractante si et seulement si pour tout morphisme  $x$  de  $\mathcal{C}$  de dimension supérieure ou égale à 1, la 1-source  $s_1x$  et le 1-but  $t_1x$  sont de dimension 1 <sup>7</sup>. Un  $\omega$ -foncteur d'une  $\omega$ -catégorie non-contractante  $\mathcal{C}$  à une  $\omega$ -catégorie non-contractante  $\mathcal{D}$  est dit non-contractant si pour tout  $x$  de  $\mathcal{C}$  de dimension supérieure ou égale à 1,  $f(x)$  est de dimension supérieure ou égale à 1. La catégorie correspondante est notée  $\omega\text{Cat}_1$ .*

Lors de mes fréquentes discussions avec Eric Goubault, la recherche de l'analogue du morphisme d'Hurewicz dans la théorie naissante des HDA revenait de façon récurrente. Partant du principe (qui se révélera plus tard faux) que les deux homologies  $H_*^-$  et  $H_*^+$  pouvaient jouer le rôle joué par l'homologie singulière en topologie algébrique classique, je me suis demandé alors si je pouvais trouver une théorie homologique  $H_*^{gl}$  avec deux morphismes  $h^\alpha : H_*^{gl} \rightarrow H_*^\alpha$ . C'est comme cela que j'ai eu l'idée d'introduire l'homologie globulaire. L'idée géométrique sous-jacente est la suivante :

*Un globe orienté (imaginer un ballon de rugby avec un flot de chemins d'exécution à la surface partant d'une pointe et arrivant à une autre) se sépare canoniquement en deux zones <sup>8</sup>, à savoir la zone où les chemins s'écartent (la zone de branchement) et la zone où ils se retrouvent (la zone de confluence), ce qui doit donner deux morphismes  $h^-$  et  $h^+$ .*

C'est ainsi que dans [Gau00b], j'introduis l'homologie globulaire, du moins une première tentative de construction. Car malgré une tentative de justification de la définition par un argument de foncteur dérivé, je tombe sur différents problèmes comme par exemple la non-annulation des groupes d'homologie globulaire pour la  $\omega$ -catégorie engendrée par les faces d'un  $n$ -cube plein. Ce qui est plutôt gênant car si l'homologie globulaire doit détecter des globes orientés creux comme celui de la figure 7, on ne voit pas bien où se trouvent de tels globes dans un  $n$ -cube plein...

Les principaux résultats de [Gau00b] sont alors :

1. La première tentative de construction de l'homologie globulaire.
2. La construction des morphismes  $h^-$  et  $h^+$ .

---

<sup>7</sup>A priori,  $s_1x$  et  $t_1x$  sont de dimension 0 ou 1.

<sup>8</sup>Il est vivement déconseillé de faire la même chose sur un vrai ballon de rugby.

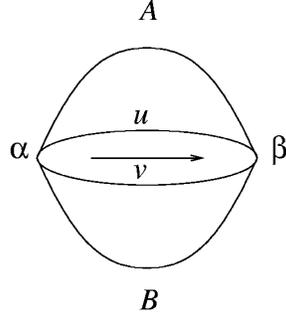


FIG. 7 – Un globe orienté creux de dimension 3

3. La mise en évidence du lien entre le noyau de  $h_1^-$  et la recherche des deadlocks dans les *progress graphs*. Une explication succincte de ce qu'est un *progress graphs* est donnée plus loin.
4. La mise en évidence du lien entre le noyau de  $h_n^-$  et la recherche des  $n$ -deadlocks dans les *progress graphs* pour  $n \geq 2$ .
5. Le premier résultat reliant les théories homologiques  $H_*^-$  et  $H_*^+$  à l'homotopie dirigée des chemins dans les HDA.
6. Un certain nombre de conjectures techniques sur  $H_*^-$  et  $H_*^+$  qui ne sont toujours pas résolues.
7. La mention du lien entre les HDA à homotopie près et le problème de confidentialité.
8. La mise en évidence du caractère simplicial des théories homologiques  $H_*^-$  et  $H_*^+$ .

Ce dernier point mérite d'être expliqué. Le caractère présimplicial de l'homologie des branchements (et de celle des confluences) était déjà apparent dans la construction de Goubault, l'interprétation géométrique étant que l'intersection d'un  $n$ -cube par un hyperplan près d'un coin est un  $(n - 1)$ -simplexe (cf. la figure 8). En fait l'homologie des branchements est une vraie homologie simpliciale :

**Proposition 2.6.** [Gau00b] Posons  $\mathcal{N}_n^-(\mathcal{C}) = \omega\text{Cat}(I^{n+1}, \mathcal{C})^-$ ,  $\partial_i x = \partial_{i+1}^-$ , et  $\epsilon_i = \Gamma_{i+1}^-$  où  $\Gamma_j^- : \omega\text{Cat}(I^n, -) \rightarrow \omega\text{Cat}(I^{n+1}, -)$  est pour  $1 \leq j \leq n$  l'unique transformation naturelle telle que

$$\Gamma_j^-(x)(k_1 \dots k_{n+1}) = x(k_1 \dots \max(k_j, k_{j+1}) \dots k_{n+1})$$

où  $k_1 \dots k_{n+1}$  est une face du  $(n + 1)$ -cube avec l'ordre  $- < 0 < +$ . Alors ces opérations définissent sur l'ensemble gradué  $\mathcal{N}_*^-(\mathcal{C})$  un ensemble simplicial augmenté avec l'augmenta-

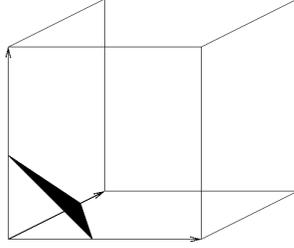


FIG. 8 – Intersection d'un plan et d'un cube

tion  $\partial_{-1} : \mathcal{N}_0^-(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}_0 =: \mathcal{N}_{-1}^-(\mathcal{C})$  définie par  $\partial_{-1}x = s_0x$ . Il est appelé le nerf semi-cubique des branchements.

Les opérations  $\Gamma_j^-$  ne sont pas nouvelles et apparaissent déjà dans plusieurs travaux [BH81b, AA89] mais c'est semble-t-il la première fois que cette structure simpliciale<sup>9</sup> était remarquée. Le lecteur attentif pourra remarquer la position du simplexe dans la figure 8 : il est en position *achronale*, ou, si l'on préfère, transversale au flot temporel. Cette structure simpliciale fut donc le premier indice qui m'amena à comprendre l'importance des simplexes en position achronale dans cette théorie.

Comme convention pour la suite, si  $X$  est un ensemble simplicial augmenté, on pose  $H_{n+1}(X) := H_n(\mathbb{Z}X_*, \partial)$  pour  $n \geq -1$  où  $\partial$  est la différentielle simpliciale. Remarquons que  $H_0(X) = \mathbb{Z}X_{-1}/Im(\partial_{-1})$ . En appliquant cette construction au nerf semi-cubique des branchements, on retrouve évidemment l'homologie des branchements puisque il y a deux décalages d'indices dans deux sens opposés.

### 3 La combinatoire des branchements

L'article [Gau01a] prouve que les nouvelles constructions introduites dans [Gau00b] de l'homologie des branchements et des confluences sont bien insensibles aux subdivisions, ce qui n'est pas le cas du tout de la construction introduite par Goubault dans sa thèse.

Le problème est en effet le suivant. On voudrait pouvoir dire que les automates de la figure 1 et de la figure 9 sont isomorphes dans une catégorie convenable. Dans la catégorie des ensembles précubiques, il n'existe aucun morphisme de l'un vers l'autre préservant l'état initial et les états finaux (qui sont des invariants pour l'*homotopie dirigée*). La première idée est alors de travailler dans la catégorie des ensembles précubiques  $K$  munis de lois de

---

<sup>9</sup>En fait il y en a deux, une pour les branchements, une pour les confluences, mais comme dit précédemment, quand la situation est symétrique, je ne détaille que le cas des branchements.

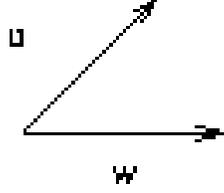


FIG. 9 – HDA avec branchement de dimension 1

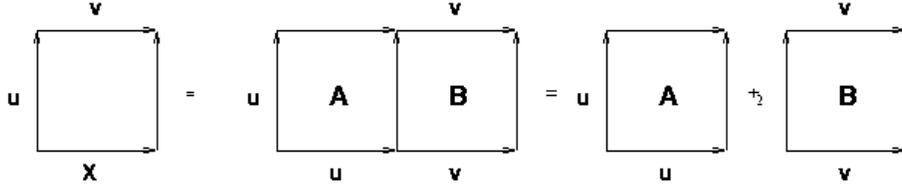


FIG. 10 – Identification de  $u +_1 v$  et de  $v$  par des 2-cubes minces

composition. Ce sont des ensembles précubiques munis de  $n$  lois de composition  $+_1, \dots, +_n$  en dimension  $n$  satisfaisant les axiomes suivants :

1. si  $x, y \in K_n$  et si  $1 \leq i \leq n$ , alors  $x +_i y$  existe si et seulement si  $\partial_i^+ x = \partial_i^- y$ .
2. Les  $+_i$  sont associatives.
3.  $\partial_i^-(x +_i y) = \partial_i^- x$  et  $\partial_i^+(x +_i y) = \partial_i^+ y$ .
4. si  $i < j$ ,  $\partial_i^\alpha(x +_j y) = \partial_i^\alpha x +_{j-1} \partial_i^\alpha y$ .
5. si  $i > j$ ,  $\partial_i^\alpha(x +_j y) = \partial_i^\alpha x +_j \partial_i^\alpha y$ .

Ces axiomes apparaissent déjà dans [BH81b]. Les lois  $+_i$  axiomatisent la concaténation des  $n$ -cubes dans les  $n$  directions possibles. Dans cette nouvelle catégorie de HDA, il existe un morphisme allant du HDA de la figure 9 vers celui de la figure 1 préservant l'état initial et les états finaux, à savoir l'unique morphisme vérifiant  $u \mapsto u +_1 v := X$  et  $w \mapsto w +_1 x := Y$ . Mais alors  $X - Y$  et  $u - v$  sont deux cycles non-homologues représentant le même branchement.

Pour pouvoir identifier  $X - Y$  et  $u - v$ , il faudrait pouvoir rajouter des éléments dans  $K_2$  qui ne génèrent pas de nouvelles classes d'homologie. C'est précisément le type d'éléments *minces* représentés à la figure 10 qui manque car  $\partial^-(A +_2 B) = u +_1 v - u$  et donc  $u +_1 v$  et  $u$  deviennent égaux en homologie. Plus précisément :

**Définition 3.1.** Soit  $x \in \omega\text{Cat}(I^n, \mathcal{C})$  où  $\mathcal{C}$  est une  $\omega$ -catégorie quelconque. L'élément  $x$  est dit *mince* si l'étiquette  $x(0_n)$  de l'intérieur  $00 \dots 0 = 0_n$  de  $I^n$  est un morphisme de  $\mathcal{C}$  de dimension strictement inférieure à  $n$ .

Les résultats principaux de [Gau01a] sont alors les suivants. On part d'un ensemble précubique  $K$  et on considère la  $\omega$ -catégorie libre engendrée  $\Pi(K)$ . Alors dans le complexe des branchements  $(\mathbb{Z}\omega\text{Cat}(I^*, \Pi(K))^- , \partial^-)$ , on a que :

1. Le sous-complexe de chaînes engendré par les éléments minces est conjecturalement acyclique pour des  $\omega$ -catégories du type  $\Pi(K)$ . Cette conjecture est la conjecture dite des éléments minces. Sa démonstration semble impossible sans idée nouvelle sur le sujet.
2. Modulo ce sous-complexe, les règles de calculs dans  $\mathbb{Z}\omega\text{Cat}(I^*, \Pi(K))^-$  sont les suivantes ( $0_n$  étant le  $n$ -morphisme de  $I^n$  correspondant à l'intérieur du  $n$ -cube) :
  - Si  $x, z \in \omega\text{Cat}(I^*, \Pi(K))^-$  et  $y \in \omega\text{Cat}(I^*, \Pi(K))^-$  tels que  $x(0_n) *_p y(0_n) = z(0_n)$  dans  $\Pi(K)$  pour un  $p \geq 1$ , alors  $x + y = z$ .
  - Si  $x, z \in \omega\text{Cat}(I^*, \Pi(K))^-$  et  $y \in \omega\text{Cat}(I^*, \Pi(K))^-$  tels que  $x(0_n) *_0 y(0_n) = z(0_n)$  dans  $\Pi(K)$ , alors  $x = z$ .
  - Si  $x$  et  $x +_j y$  sont des éléments de  $\omega\text{Cat}(I^*, \Pi(K))^-$ , alors  $x = x +_j y$  modulo le sous-complexe engendré par les éléments minces. C'est exactement la traduction mathématique de l'invariance par subdivision des homologies des branchements et des confluences.
3. Les preuves font intervenir de façon décisive des opérateurs du nerf cubique appelés les *mouvements élémentaires*. Le choix de la terminologie vient du fait que je conjecture qu'ils permettent par composition d'engendrer toutes les transformations naturelles du nerf cubique dans lui-même. Une description complète et conjecturale des transformations naturelles du nerf des branchements dans lui-même est également donnée.
4. Ces mouvements élémentaires permettent également par composition de retrouver des opérateurs apparaissant dans les travaux de Brown, Higgins, Al-Agl etc... [BH81b, Ait86] comme des cas particuliers de mes opérateurs.

Cet article ne donne pas la solution aux conjectures énoncées dans [Gau00b] concernant l'homologie des branchements. En particulier, je ne sais toujours pas comment prouver que l'homologie des branchements de  $I^n$  est nulle en dimension strictement positive. La combinatoire de la  $\omega$ -catégorie  $I^n$  est donc très riche et reste à explorer. Il y a notamment des rapports entre ce sujet et les ordres de Bruhat supérieurs [MS89] et aussi avec le groupe des tresses. En effet, comme dans [AABS00], un des ingrédients essentiels de [Gau01a] est le phénomène suivant :

**Proposition 3.2.** *Soient  $f_1, \dots, f_n$   $n$  opérateurs d'un ensemble dans lui-même qui sont des idempotents ( $f_i f_i = f_i$  pour tout  $i$ ) qui satisfont les relations du groupe des tresses  $B_{n+1}$ , à savoir :*

1. si  $|i - j| \geq 2$ , alors  $f_i f_j = f_j f_i$

2. pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i < n$ ,  $f_i f_{i+1} f_i = f_{i+1} f_i f_{i+1}$ .

Posons alors  $F = (f_1)(f_2 f_1) \dots (f_n f_{n-1} \dots f_1)$ . Alors pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n$ ,  $f_i F = F$ . En d'autre terme, le tressage des opérateurs  $f_i$  permet d'appliquer les  $f_i$  un nombre maximal de fois.

## 4 Le nerf globulaire

C'est dans [Gau02] que je corrige la construction de l'homologie globulaire introduite dans [Gau00b]. Le principe de cette nouvelle construction est le suivant.

**Proposition 4.1.** [Gau02] Soit  $\mathcal{C}$  une  $\omega$ -catégorie. Soit  $\mathbb{P}\mathcal{C}$  l'ensemble  $\mathbb{N}$ -gradué où  $(\mathbb{P}\mathcal{C})_n$  est exactement l'ensemble des morphismes de dimension  $n+1$  de  $\mathcal{C}$ . Alors les opérateurs  $s_p$ ,  $t_p$  et  $*_p$  pour  $p \geq 1$  induisent une structure de  $\omega$ -catégorie sur  $\mathbb{P}\mathcal{C}$  si et seulement si  $\mathcal{C}$  est non-contractante.

**Définition 4.2.** La  $\omega$ -catégorie  $\mathbb{P}\mathcal{C}$  associée à une  $\omega$ -catégorie non-contractante  $\mathcal{C}$  est appelée la  $\omega$ -catégorie des chemins de  $\mathcal{C}$ . L'application  $\mathcal{C} \mapsto \mathbb{P}\mathcal{C}$  induit un foncteur de la catégorie des  $\omega$ -catégories non-contractantes  $\omega\text{Cat}_1$  vers la catégorie des  $\omega$ -catégories (globulaires strictes)  $\omega\text{Cat}$ .

Cette proposition est une justification *a posteriori* de la définition 2.5 car  $\mathbb{P}\mathcal{C}$ , absolument essentielle pour la suite, n'existe que si et seulement si  $\mathcal{C}$  est non-contractante. On est en plus obligé de travailler avec des  $\omega$ -foncteurs non-contractants pour que l'application  $\mathcal{C} \mapsto \mathbb{P}\mathcal{C}$  soit fonctorielle. On va alors considérer le nerf simplicial de  $\mathbb{P}\mathcal{C}$  : pour cela, on a besoin de travailler avec la  $\omega$ -catégorie libre engendrée par les faces du simplexe de dimension  $n$   $\Delta^n$  (la  $\omega$ -catégorie engendrée sera notée de la même façon). La définition exacte est rappelée dans [Gau00b, Gau01a, Gau02]. Elle est due originellement à Street dans [Str87] mais la présentation s'inspire de [Ste98]. Disons simplement que les faces de  $\Delta^n$  sont étiquetées par les suites strictement croissantes d'éléments de  $\{0, 1, \dots, n\}$ . La figure 4 donne une représentation de la  $\omega$ -catégorie engendrée par le 2-simplexe. On a alors la

**Définition 4.3.** Soit  $\mathcal{C}$  une  $\omega$ -catégorie non-contractante. Le nerf simplicial  $\mathcal{N}_*^{\text{gl}}(\mathcal{C}) := \omega\text{Cat}(\Delta^*, \mathbb{P}\mathcal{C})$  muni de l'augmentation  $\partial_{-1} : \mathcal{N}_0^{\text{gl}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0 =: \mathcal{N}_{-1}^{\text{gl}}(\mathcal{C})$  définie par  $\partial_{-1}x = (s_0x, t_0x)$  est appelé le nerf globulaire de  $\mathcal{C}$ .

Les éléments du nerf simplicial  $\omega\text{Cat}(\Delta^*, \mathbb{P}\mathcal{C})$  de  $\mathbb{P}\mathcal{C}$  sont intuitivement des formes géométriques comme celle dessinée à la figure 12. Il y a également une notion d'élément mince dans ce nerf simplicial et modulo le sous-complexe engendré par les éléments minces (qui est également conjecturalement acyclique pour les  $\omega$ -catégories librement engendrées par

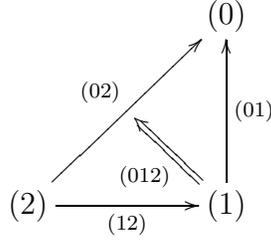


FIG. 11 – La  $\omega$ -catégorie  $\Delta^2$

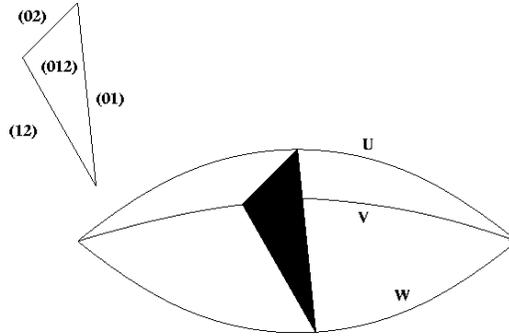


FIG. 12 – Simplexe globulaire de dimension 2

des ensembles précubiques), on a la règle de calcul suivante : pour  $x \in \omega\text{Cat}(\Delta^n, \mathbb{P}\mathcal{C})$ , on note  $w(x)$  l'étiquette du  $n$ -morphisme correspondant à l'intérieur de  $\Delta^n$ , alors : si  $x, y, z \in \omega\text{Cat}(\Delta^n, \mathbb{P}\mathcal{C})$  tels que  $w(x) *_p w(y) = w(z)$  pour un  $p \geq 1$  alors  $x + y = z$ . Il se trouve que c'est exactement les relations qui manquaient dans la construction de [Gau00b] de l'homologie globulaire pour pouvoir garantir l'annulation de l'homologie globulaire des  $n$ -cubes en dimension strictement positive.

Les résultats principaux de [Gau02] sont alors les suivants :

1. La nature simpliciale de l'homologie globulaire est mise en évidence.
2. Il y a maintenant trois nerfs simpliciaux (en fait augmentés)  $\mathcal{N}^{gl}$ ,  $\mathcal{N}^-$  et  $\mathcal{N}^+$  et les morphismes  $h^\pm : \mathcal{N}^{gl} \rightarrow \mathcal{N}^\pm$  sont maintenant des transformations naturelles entre ensembles simpliciaux augmentés.
3. La conjecture des éléments minces est étendue à un nouveau nerf, ce qui montre son caractère très général.
4. Un début d'axiomatisation de ces trois nerfs simpliciaux est proposé. Et quelques conjectures liées à la conjecture des éléments minces sont proposées.

5. On prouve que l’homologie globulaire de  $I^n$  s’annule pour tout  $n$  en dimension strictement positive. Le principe de la preuve ne peut pas être réutilisé pour prouver l’annulation de l’homologie des branchements de  $I^n$  pour tout  $n$  en dimension strictement positive. Ce dernier énoncé reste donc une conjecture.
6. Est conjecturé que l’homologie globulaire de toute  $\omega$ -catégorie provenant d’un *composable pasting scheme* s’annule en dimension strictement positive. Cette dernière conjecture est étroitement reliée à ce que Kapranov et Voevodsky dans [KV91] appelle le problème de la recherche du *pasting scheme* dérivé d’un *pasting scheme* donné.
7. Un nerf bisimplicial (le *nerf biglobulaire*, contraction de bisimplicial et globulaire) est introduit : il est construit à partir du nerf globulaire. Ce nouveau foncteur jouera probablement un rôle très important car il contient “moralement” toute l’information géométrique du HDA [Gau01b].

## 5 Les deux articles à ENTCS

Les articles [Gau00a] et [Gau01b] publiés à *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* sont des textes informels qui ont permis de prendre du recul par rapport aux résultats techniques précédemment exposés. Rédiger ces articles, avec la contrainte de la limite du nombre de pages, m’a été très profitable et m’a permis de prendre une photographie aérienne du sujet dans lequel je suis lancé. Et ce sont les articles que je conseille de lire en premier pour comprendre mon travail.

L’idée principale de [Gau00a] est la découverte empirique des deux types de déformation d’un HDA formalisé par une  $\omega$ -catégorie qui laissent invariantes les propriétés informatiques de l’automate sous-jacent. Cela aboutira un an plus tard dans [GG01] à une formalisation complète de la *dihomotopie* sur une catégorie qui devrait jouer en *homotopie dirigée* le rôle que jouent les CW-complexes en topologie algébrique classique (cf. la section 7). C’est l’unique exemple connu à ce jour de formalisation globale de la dihomotopie sur une catégorie.

Expliquons un peu l’exemple du “drapeau suisse” (figure 13) pour comprendre de quoi il s’agit. C’est un exemple de *progress graph* (on utilise les notations  $P$  et  $V$  de Dijkstra [Dij68]). D’autres exemples de *progress graph* sont commentés par exemple dans [Gou95, FGR99, GG01]. Il y a deux ressources  $a$  et  $b$  qui ne peuvent être utilisées que par un seul processeur à la fois et il y a deux programmes  $T_1$  et  $T_2$  qui fonctionnent en parallèle. Chaque programme correspond à un axe de coordonnées. Prendre la ressource  $a$  (resp.  $b$ ) est symbolisé par l’instruction  $Pa$  (resp.  $Pb$ ). Libérer la ressource  $a$  (resp.  $b$ ) est symbolisé par la ressource  $Va$  (resp.  $Vb$ ). On suppose alors que les programmes  $T_1$  et  $T_2$  sont les suivants :  $T_1 = Pa.Pb.Vb.Va$  and  $T_2 = Pb.Pa.Va.Vb$ . Chaque axe de coordonnées correspond à l’état d’avancement d’un des programmes : 0 pour rien d’effectué et 1 pour mission accomplie.

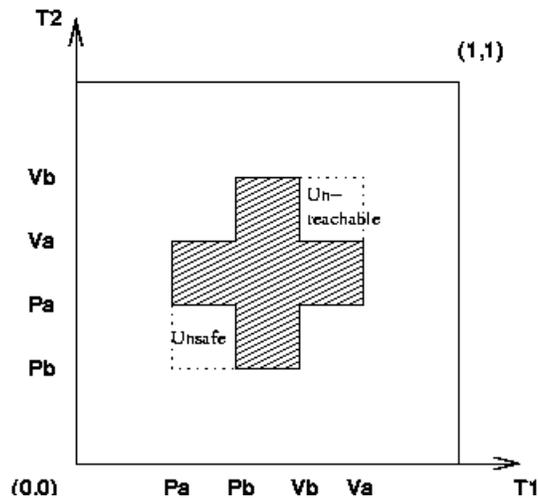


FIG. 13 – Le drapeau suisse

Les chemins d'exécution possibles sont tous les chemins croissants par rapport à chaque axe de coordonnées qui vont de  $(0, 0)$  à  $(1, 1)$  et évitant la zone en croix du milieu appelée *zone d'exclusion mutuelle*. Un point de cette zone représente un état impossible car il correspondrait à au moins une des deux ressources prises par les deux processeurs  $T_1$  et  $T_2$  simultanément. Deux régions particulières apparaissent : la région "Unsafe" qui amène à un blocage inévitable : on atteint alors ce qu'on appelle un *deadlock* du système : dès qu'un chemin pénètre dans la zone *Unsafe*, il ne pourra plus atteindre l'état final  $(1, 1)$  et donc le système sera bloqué. De façon symétrique, la zone *Unreachable* est une zone par laquelle aucun chemin d'exécution partant de  $(0, 0)$  ne peut passer. Cette zone représente un codage qui ne servira jamais à rien, ce qui n'est pas très économique. On peut observer que le problème de la détection des *deadlocks* et celui de la détection des états inaccessibles sont symétriques l'un de l'autre : en renversant le sens du temps, on transforme l'un des problèmes en l'autre.

Ce sont les deux principaux types de propriétés qui intéressent les gens travaillant sur les automates parallèles car d'autres types de vérification se ramènent en dernier ressort à rechercher des propriétés type *deadlock* [GW91]. Beaucoup de problèmes intéressants (séquentialisation, ordonnancement d'actions, etc...) s'y ramènent en effet de façon non triviale et donc sont liés au problème de classification des chemins à *homotopie dirigée* près (cf par exemple [Gun94]).

L'exemple de la figure 14 est une situation où il n'y a ni *deadlock*, ni état inaccessible.

On voit qu'à *élasticité* près, l'automate parallèle de la figure 13 peut se transformer en la partie de droite de la figure 15. On peut intuitivement déformer un automate de beaucoup

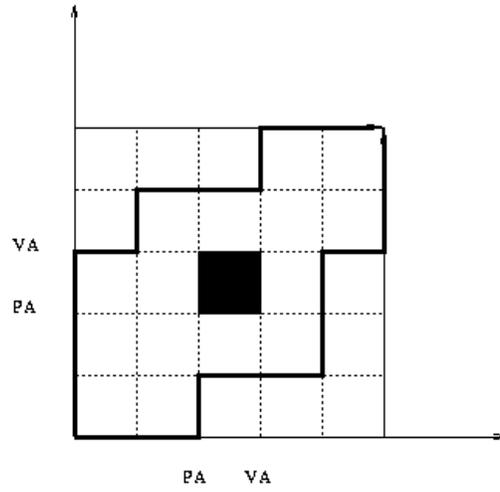


FIG. 14 – Représentation symbolique d'un sémaphore et de deux chemins d'exécutions non équivalents (et non dihomotopes)

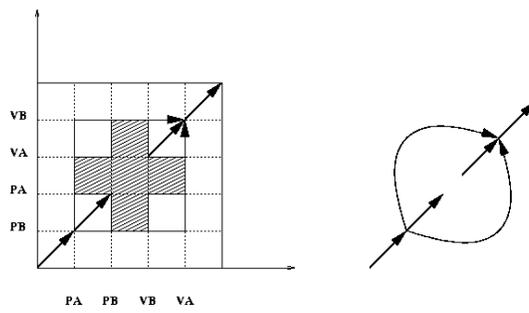


FIG. 15 – Le drapeau suisse à élasticité près

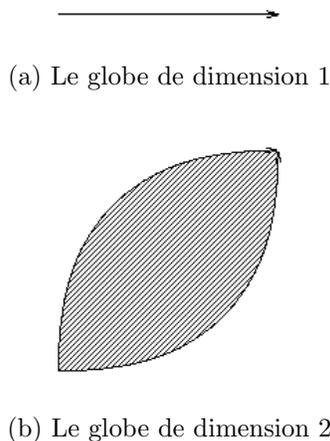


FIG. 16 – Exemple de déformation spatiale

de façon : l'essentiel pour ne pas transformer ses propriétés informatiques est de *ne pas contracter les chemins orientés sur des points*. Ainsi en *homotopie dirigée*, un segment orienté ne doit pas être homotope à un point : on dira qu'un segment dirigé n'est pas *dihomotope* à un point. Donc il s'agit bien d'homotopie, mais avec quelques subtilités.

Dans [Gau00a], l'observation fondamentale suivante est faite (on travaille avec une  $\omega$ -catégorie  $\mathcal{C}$  modélisant un HDA) :

**Philosophie 5.1.** *Il y a deux types de déformation laissant invariantes les propriétés de l'automate sous-jacent : les déformations spatiales et les déformations temporelles. Les déformations spatiales correspondent intuitivement à des déformations de  $p$ -morphisme de  $\mathcal{C}$  avec  $p \geq 2$ . Les déformations temporelles correspondent intuitivement à la concaténation de deux 1-morphismes, ce qui fait disparaître l'état du milieu, ou bien à la subdivision en deux parties d'un 1-morphisme, ce qui fait apparaître un nouvel état.*

La figure 16 donne un exemple très simple de déformation spatiale : le passage d'un HDA à l'autre est obtenu par écrasement ou dilatation du 2-morphisme. La figure 17 donne un exemple très simple de déformation temporelle : le passage d'un HDA à l'autre est obtenu par suppression ou addition de l'état au milieu de  $u = u_1 * u_2$ .

Le reste de [Gau00a] ainsi que l'article [Gau01b] proposent une ligne de recherche qui s'articule autour de la notion de dihomotopie précédemment définie.

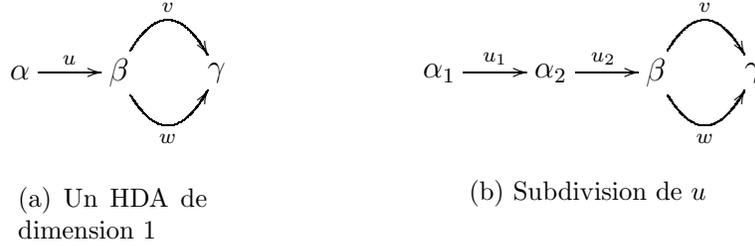


FIG. 17 – Exemple de déformation temporelle



FIG. 18 – 2-simplexe semi-globulaire négatif et positif

## 6 Les nerfs semi-globulaires

L'article [Gau01c] est consacré à une correction du nerf des branchements, dans le but d'avoir un nerf simplicial de Kan (ce n'était pas le cas de l'ancien) tout en gardant bien entendu la même théorie homologique. Le nouveau nerf des branchements contient intuitivement des formes géométriques comme dans la figure 18.

Les principaux résultats de cet article sont les suivants :

1. A partir de la  $\omega$ -catégorie des chemins  $\mathbb{P}\mathcal{C}$  de  $\mathcal{C}$ , on fabrique une nouvelle  $\omega$ -catégorie  $\mathbb{P}^-\mathcal{C}$  intuitivement obtenue à partir de  $\mathbb{P}\mathcal{C}$  en prenant son quotient par la relation d'équivalence engendrée par les relations  $x \sim x *_0 y$  pour tout  $x, y, x *_0 y \in \mathbb{P}\mathcal{C}$ . C'est une  $\omega$ -catégorie dont les  $n$ -morphisms sont les classes d'équivalence de  $n$ -morphisms de  $\mathbb{P}\mathcal{C}$  commençant de la même façon. Pour employer un vocabulaire plus géométrique, ce sont des *germes* de  $n$ -morphisms commençant de la même façon.
2. Le nerf simplicial de  $\mathbb{P}^-\mathcal{C}$  contient alors des éléments comme la partie gauche de la figure 18. La théorie homologique correspondante  $H_*^{gl^-}$  est appelée l'homologie semi-globulaire des branchements (ou homologie semi-globulaire négative).
3. Une transformation naturelle  $\mathcal{N}^- \rightarrow \mathcal{N}^{gl^-}$  est construite et il est démontré que la

transformation induite  $H_*^- \rightarrow H_*^{gl-}$  est un isomorphisme pour toute  $\omega$ -catégorie librement engendrée par un ensemble précubique si on admet la conjecture des éléments minces.

4. Deux nouvelles transformations  $\mathcal{N}^{gl} \rightarrow \mathcal{N}^{gl-}$  et  $\mathcal{N}^{gl} \rightarrow \mathcal{N}^{gl+}$  sont introduites.
5. On vérifie que  $\mathbb{P}^-\mathcal{C}$  (et  $\mathbb{P}^+\mathcal{C}$ ) sont des  $\omega$ -groupoïdes strictes dès que  $\mathbb{P}\mathcal{C}$  est un  $\omega$ -groupoïde.

Cette dernière remarque mérite d'être commentée.

**Définition 6.1.** [BH81b] Soit  $\mathcal{D}$  une  $\omega$ -catégorie globulaire stricte. Alors  $\mathcal{D}$  est un  $\omega$ -groupoïde stricte si et seulement si pour tout morphisme  $x \in \mathcal{D}$ , et pour tout  $n \geq 0$ , il existe un  $x'$  qui dépend a priori de  $n$  tel que  $x *_n x' = s_n x (= t_n x')$  et  $x' *_n x = s_n x' (= t_n x)$ .

Pour une  $\omega$ -catégorie non-contractante  $\mathcal{C}$ ,  $\mathbb{P}\mathcal{C}$  est un  $\omega$ -groupoïde si et seulement si pour tout morphisme  $x$  de  $\mathbb{P}\mathcal{C}$  et pour tout  $n \geq 1$ , il existe un  $x'$  qui dépend a priori de  $n$  tel que  $x *_n x' = s_n x (= t_n x')$  et  $x' *_n x = s_n x' (= t_n x)$ <sup>10</sup>. Il est absolument hors de question de supposer l'existence d'inverses par rapport à  $*_0$  car la loi de composition  $*_0$  indique l'orientation du temps. L'existence d'un inverse par rapport à  $*_n$  pour  $n \geq 1$  signifie intuitivement que s'il y a une homotopie dans un sens, alors il doit y avoir une homotopie dans l'autre sens. D'où la définition :

**Définition 6.2.** Une  $\omega$ -catégorie non-contractante  $\mathcal{C}$  est dite de Kan si  $\mathbb{P}\mathcal{C}$  est un  $\omega$ -groupoïde. La catégorie des  $\omega$ -catégories non-contractantes de Kan avec comme morphismes les  $\omega$ -foncteurs non-contractants sera notée  $\omega\text{Cat}_1^{\text{Kan}}$ .

En travaillant dans  $\omega\text{Cat}_1^{\text{Kan}}$ , le nerf globulaire et les deux nerfs semi-globulaires sont de Kan et donc on peut considérer leurs groupes d'homotopie, les points base étant des 0-morphismes de resp.  $\mathbb{P}\mathcal{C}$  (resp.  $\mathbb{P}^-\mathcal{C}$ ,  $\mathbb{P}^+\mathcal{C}$ ), donc des 1-morphismes de  $\mathcal{C}$  (resp. des germes de 1-morphismes de  $\mathbb{P}\mathcal{C}$  commençant ou finissant de la même façon).

## 7 Les CW-complexes globulaires

L'article [GG01] écrit en collaboration avec Eric Goubault va introduire la notion de *CW-complexe globulaire*.

**Définition 7.1.** [Nac65, Joh82] Un *po-espace global* est une paire  $(X, \leq)$  où  $X$  est un espace topologique et  $\leq$  une relation d'ordre partielle sur  $X$  dont le graphe est un fermé de  $X \times X$ .

---

<sup>10</sup>Pour les 1-morphismes, on prend  $x = x'$ .

Les CW-complexes globulaires sont des recollements de po-espaces globaux de la forme  $Glob(X)$  (cf. la figure 19) qui sont à la fois assez expressifs pour exprimer tous les automates parallèles, suffisamment rigides pour éviter les phénomènes mathématiques pathologiques liés au recollement d’espaces globaux, et enfin parfaitement adaptés pour pouvoir formaliser les notions de déformation spatiale et temporelle. La terminologie de *CW-complexe globulaire* vient du fait que les définitions sont des copies directes de ce qui se passe avec la catégorie  $\omega Cat_1$  des  $\omega$ -catégories globulaires non-contractantes avec comme morphisme les  $\omega$ -foncteurs non-contractants. En fait, en forme de boutade, on peut dire que les  $\omega$ -catégories globulaires strictes sont le troisième auteur de [GG01].

Les principaux résultats de [GG01] sont les suivants :

1. Les notions d’équivalence de S-dihomotopie (S pour spatial) et d’équivalence de T-dihomotopie (T pour temporel) sont introduites. Elles font exactement ce qui était conjecturé dans [Gau00a] : à savoir deux CW-complexes globulaires S-dihomotopes ne diffèrent que par des écrasements ou des dilatations de cellule de dimension supérieure ou égale à 2 et deux CW-complexes globulaires T-dihomotopes ne diffèrent entre eux que par l’apparition ou la disparition d’éléments du 0-squelette.
2. L’existence de la localisation de  $\mathbf{glCW}$  par les équivalences de S-dihomotopie (resp. de T-dihomotopie) est prouvée.
3. Il est prouvé que tout CW-complexe globulaire peut être muni d’une façon canonique et fonctorielle d’une structure de po-espace local. De plus un foncteur réalisation de la catégorie des ensembles précubiques vers la catégorie des CW-complexes globulaires est construit.
4. On introduit un foncteur Globe (figure 19) qui non seulement induit un foncteur de la catégorie des CW-complexes vers celle des CW-complexes globulaires, mais en plus qui passe au quotient après localisation par les équivalences d’homotopie, à droite par les équivalences de dihomotopie, pour donner un plongement  $\mathbf{Ho}(\mathbf{CW}) \hookrightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{glCW})$  des *types d’homotopie* vers les *types de dihomotopie*.

Cette existence d’un plongement de la catégorie des types d’homotopie dans celle des types de dihomotopie a d’importantes conséquences au niveau du programme de recherche. Ce fait ainsi que d’autres faits mathématiques exposés dans [Gau01b] me conduisent à penser que l’on peut “remonter” le long du foncteur Globe la plupart des théorèmes concernant les types d’homotopie classiques aux types de dihomotopie.

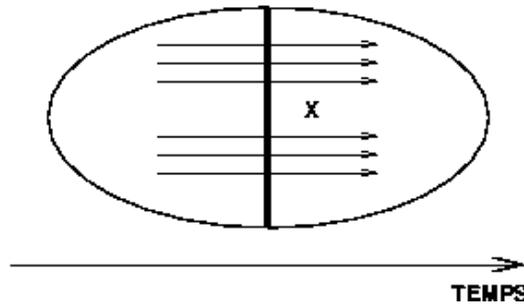


FIG. 19 – Représentation symbolique de  $Glob(X)$  pour un espace topologique  $X$

## Références

- [AA89] Fahd Ali A. Al-Agl. *Aspects of multiple categories*. PhD thesis, University of Wales, Department of Pure Mathematics, University College of North Wales, Bangor, Gwynedd LL57 1UT, U.K., September 1989.
- [AABS00] Fahd A. A. Al-Agl, R. Brown, and R. Steiner. Multiple categories : the equivalence of a globular and a cubical approach, 2000. arxiv :math.CT/0007009.
- [Ait86] I. R. Aitchison. The geometry of oriented cubes. Macquarie Mathematics Reports 86-0082, 1986.
- [BH81a] R. Brown and P. J. Higgins. The equivalence of  $\infty$ -groupoids and crossed complexes. *Cahiers Topologie Géom. Différentielle*, 22(4) :371–386, 1981.
- [BH81b] R. Brown and P. J. Higgins. On the algebra of cubes. *J. Pure Appl. Algebra*, 21(3) :233–260, 1981.
- [Cri96] R. Cridlig. Implementing a static analyzer of concurrent programs : Problems and perspectives. In *Logical and Operational Methods in the Analysis of Programs and Systems*, pages 244–259, 1996.
- [Dij68] E.W. Dijkstra. *Cooperating Sequential Processes*. Academic Press, 1968.
- [FGR99] L. Fajstrup, E. Goubault, and M. Raussen. Algebraic topology and concurrency. to appear in *Theoretical Computer Science*, also technical report R-99-2008, Aalborg University, 1999.
- [Gau00a] P. Gaucher. From concurrency to algebraic topology. In *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, volume 39, page 19pp. Elsevier Science Publishers, 2000.
- [Gau00b] P. Gaucher. Homotopy invariants of higher dimensional categories and concurrency in computer science. *Math. Structures Comput. Sci.*, 10 :481–524, 2000.

- [Gau01a] P. Gaucher. Combinatorics of branchings in higher dimensional automata. *Theory and Applications of Categories*, 8(12) :pp.324–376, 2001.
- [Gau01b] P. Gaucher. Investigating The Algebraic Structure of Dihomotopy Types. to appear in *Electronic Notes in Computer Science*, 2001. arxiv :math.AT/0105049.
- [Gau01c] P. Gaucher. The branching nerve of HDA and the Kan condition, 2001. arxiv :math.AT/0103011.
- [Gau02] P. Gaucher. About the globular homology of higher dimensional automata. *to appear in Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique*, 2002.
- [GG01] P. Gaucher and E. Goubault. Topological Deformation of Higher Dimensional Automata, 2001. arXiv :math.AT/0107060.
- [Gou95] E. Goubault. *The Geometry of Concurrency*. PhD thesis, École Normale Supérieure, 1995.
- [Gun94] J. Gunawardena. Homotopy and concurrency. *Bull. EATCS*, 54 :184–193, 1994.
- [GW91] P. Godefroid and P. Wolper. Using partial orders for the efficient verification of deadlock freedom and safety properties. In *Proc. of the Third Workshop on Computer Aided Verification*, volume 575, pages 417–428. Springer-Verlag, Lecture Notes in Computer Science, July 1991.
- [Joh82] P. T. Johnstone. *Stone spaces*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [KV91] M. M. Kapranov and V. A. Voevodsky. Combinatorial-geometric aspects of polycategory theory : pasting schemes and higher Bruhat orders (list of results). *Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catégoriques*, 32(1) :11–27, 1991. International Category Theory Meeting (Bangor, 1989 and Cambridge, 1990).
- [MS89] Yu. I. Manin and V. V. Schechtman. Arrangements of hyperplanes, higher braid groups and higher Bruhat orders. In *Algebraic number theory*, pages 289–308. Academic Press, Boston, MA, 1989.
- [Nac65] L. Nachbin. *Topology and order*. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London, 1965.
- [Pra91] V. Pratt. Modeling concurrency with geometry. In ACM Press, editor, *Proc. of the 18th ACM Symposium on Principles of Programming Languages*, 1991.
- [Ste91] R. Steiner. Tensor products of infinity-categories. University of Glasgow, 1991.
- [Ste98] R. Steiner. Pasting in multiple categories. *Theory Appl. Categ.*, 4 :No. 1, 1–36 (electronic), 1998.
- [Str87] R. Street. The algebra of oriented simplexes. *J. Pure Appl. Algebra*, 49(3) :283–335, 1987.