

# Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

Académie des sciences (France). Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 1984-2001.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

\*La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

\*La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

Cliquer [ici pour accéder aux tarifs et à la licence](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

\*des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

\*des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter [reutilisation@bnf.fr](mailto:reutilisation@bnf.fr).

## Lambda-opérations et homologie des matrices

Philippe GAUCHER

**Résumé** – On étend les  $\lambda$ -opérations sur l'homologie cyclique de  $A$  à l'homologie de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}_\infty(A)$  à l'aide des puissances extérieures de matrices. On exhibe une formule exprimant le comportement de celles-ci par rapport à la somme directe des matrices. Cette formule fait intervenir le coproduit ainsi que le surproduit induit par le produit tensoriel de matrices [3].

### Lambda-operations and homology of matrices

**Abstract** – One extends  $\lambda$ -operations from the cyclic homology of  $A$  to the homology of the Lie algebra  $\mathfrak{gl}_\infty(A)$  using exterior powers of matrices. One shows a formula giving their behavior with respect to the direct sum of matrices. It uses the coproduct and the "overproduct" induced by the tensor product of matrices [3].

0. INTRODUCTION. – Les  $\lambda$ -opérations de l'homologie cyclique d'une  $k$ -algèbre commutative et unitaire  $A$  ( $k$  un corps de caractéristique 0) [7] s'étendent à l'algèbre de Hopf  $\mathcal{L} = H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A), k)$ , le produit étant induit par la somme directe des matrices. On a montré dans [3] que le produit de Loday-Quillen s'étend en le surproduit induit par le produit tensoriel de matrices. On va donner des formules exprimant le comportement de ces  $\lambda$ -opérations avec le produit et le surproduit. Dans la quatrième partie, on montre le lien avec les formules classiques sur les  $\lambda$ -opérations. On notera  $\binom{n}{k} = n!/(k!(n-k)!)$  le coefficient binomial.

1. ALGÈBRE DE HOPF AVEC SURPRODUIT (AHS). – Une algèbre de Hopf avec surproduit  $\mathcal{H}$  est une algèbre de Hopf ((co)unitaire et (co)commutative) munie d'un produit supplémentaire noté  $\tilde{\otimes}$  compatible avec le coproduit et tel que

$$\begin{aligned}x \tilde{\otimes} (yz) &= \sum_{(x)} (x_{(1)} \tilde{\otimes} y) (x_{(2)} \tilde{\otimes} z), \\x \tilde{\otimes} y &= S(x) \tilde{\otimes} S(y), \\x \tilde{\otimes} 1 &= 1 \tilde{\otimes} x = uc(x),\end{aligned}$$

où  $\Delta(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$  est le coproduit,  $u$  l'unité,  $c$  la coïunité et  $S$  l'antipode. On posera  $\mu(x \otimes y) = xy$  (le produit de  $x$  et  $y$ ). L'AHS sera dite unitaire si son surproduit l'est. On sait que le produit tensoriel de matrices induit sur  $\mathcal{L}$  un surproduit non unitaire [3] étendant le produit de Loday-Quillen de  $HC_{*-1}(A)$ . Deux autres exemples d'AHS sont donnés par les algèbres de Hopf  $k[(\mathbb{R}, +)]$  et  $k[(\mathbb{R}, +)]^\wedge$  (complété par l'idéal d'augmentation) où le surproduit est induit par le produit de  $\mathbb{R}$  qui est ici un anneau commutatif. Si  $f$  et  $g$  sont dans  $\text{End}_{k\text{-lin}}(\mathcal{H})$  (i.e. les endomorphismes  $k$ -linéaires d'une AHS  $\mathcal{H}$ ), on note  $f \oplus g = \mu(f \otimes g) \Delta$  et  $f \otimes g = \tilde{\otimes} (f \otimes g) \Delta$ . On rappelle que  $(\text{End}_{k\text{-lin}}(\mathcal{H}), +, \oplus)$  est une  $k$ -algèbre de neutre  $uc$  et que  $(\text{End}_{k\text{-Cbre}}(\mathcal{H}), \oplus, \otimes)$  (i.e. les endomorphismes de cogèbres) est un anneau [3].

2. LES  $\lambda$ -OPÉRATIONS SUR  $\mathcal{L}$ . – Sur l'homologie de  $\mathfrak{gl}_\infty(A)$  à coefficients triviaux [1], on définit des  $\lambda$ -opérations de la façon suivante. Le foncteur algèbre extérieure  $k$  fois, noté  $\Lambda^k$ , permet de construire des morphismes d'algèbres de Lie  $\Lambda_n^k$  de  $\mathfrak{gl}_n(A)$  dans  $\mathfrak{gl}_\infty(A)$  en associant à  $\alpha$  de  $\mathfrak{gl}_n(A)$  l'élément de  $\mathfrak{gl}(\Lambda^k A^n)$  qui envoie  $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$  sur

Note présentée par Alain CONNES.

$\sum_{i=1, \dots, k} v_1 \wedge \dots \wedge \alpha v_i \wedge \dots \wedge v_k$  et en plongeant  $\mathfrak{gl}(\Lambda^k A^n)$  dans  $\mathfrak{gl}_\infty(A)$  par choix d'une base. Le morphisme de cogèbres induit  $(\Lambda_n^k)_*$  de  $H_*(\mathfrak{gl}_n(A), k)$  dans  $H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A), k)$  est indépendant de ce choix. A partir de [7] et en utilisant la construction  $\underline{\theta}$  de [3], on montre :

PROPOSITION 2.1. — On considère les morphismes de cogèbres de  $H_*(\mathfrak{gl}_n(A), k)$  dans  $\mathcal{L} = H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A), k)$

$$a_n^k = \bigoplus_{i \text{ impair} < k} (\Lambda_n^{k-i})_*^{\oplus \binom{n-1+i}{i}} \text{ et } b_n^k = \bigoplus_{i \text{ pair} < k} (\Lambda_n^{k-i})_*^{\oplus \binom{n-1+i}{i}}$$

( $f^{\oplus n}$  désignant  $f \oplus \dots \oplus f$  ( $n$  fois)). Alors  $a_n^k \underline{\theta} b_n^k$  est compatible avec le système inductif convergeant vers  $\mathcal{L}$ . En passant à la limite inductive, on obtient un morphisme de cogèbres noté  $\lambda^k$ . ■

Remarque. — La restriction à la partie primitive redonne les  $\lambda$ -opérations sur l'homologie cyclique [7].

3. COMPORTEMENT DES  $\lambda$ -OPÉRATIONS SUR  $\mathcal{L}$ . — On va élucider maintenant le comportement de ces  $\lambda$ -opérations avec le produit et le surproduit ainsi que la façon dont elles se composent entre elles. On fera le lien avec les  $\lambda$ -anneaux au paragraphe suivant.

THÉORÈME 3.1. — Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $\mathcal{L} = H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A), k)$ ,  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\text{End}_{k\text{-cogbre}}(\mathcal{L})$ . Alors on a :

$$\begin{aligned} \lambda^k(xy) &= \Sigma_{(x)(y)} (\lambda^1(x_{(1)}) \tilde{\otimes} \lambda^{k-1}(y_{(1)})) \dots (\lambda^{k-1}(x_{(k-1)}) \tilde{\otimes} \lambda^1(y_{(k-1)})) \lambda^k(x_{(k)}) \lambda^k(y_{(k)}), \\ \lambda^k(f \oplus g) &= \lambda^k f \oplus \lambda^k g \oplus \bigoplus_{i+j=k, i \neq 0, j \neq 0} \lambda^i f \otimes \lambda^j g. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

THÉORÈME 3.2. — Avec les mêmes hypothèses, on a :

$$\begin{aligned} \lambda^k(x \tilde{\otimes} y) &= P_k(\lambda^1 i_1, \dots, \lambda^k i_1; \lambda^1 i_2, \dots, \lambda^k i_2)(x \otimes y), \\ \lambda^k(f \otimes g) &= P_k(\lambda^1 f, \dots, \lambda^k f, \lambda^1 g, \dots, \lambda^k g), \end{aligned}$$

où  $P_k$  est le polynôme universel classique apparaissant dans la définition des  $\lambda$ -anneaux [5] et où  $i_1(x \otimes y_1 \dots y_q) = 0$  (les  $y_i$  étant primitifs et  $q \geq 1$ ),  $i_1(x \otimes 1) = x$ ,  $i_2(x \otimes y) = i_1(y \otimes x)$  et où, dans  $P_k$ , la somme est remplacée par  $\oplus$  et le produit par  $\otimes$  (des produits de convolution de fonctions allant de  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$  dans  $\mathcal{L}$ ). ■

THÉORÈME 3.3. — Avec les mêmes hypothèses, on a :

$$\begin{aligned} \lambda^k(\lambda^{k'}(x)) &= P_{k, k'}(\lambda^1, \dots, \lambda^{kk'})(x), \\ \lambda^k \lambda^{k'} f &= P_{k, k'}(\lambda^1 f, \dots, \lambda^{kk'} f), \end{aligned}$$

où  $P_{k, k'}$  est le polynôme universel apparaissant dans la définition des  $\lambda$ -anneaux [5] et où, dans  $P_{k, k'}$ , la somme est remplacée par  $\oplus$  et le produit par  $\otimes$ . ■

4. COMPARAISON AVEC LES FORMULES CLASSIQUES SUR LES  $\lambda$ -OPÉRATIONS. — L'AHS  $\mathcal{L}$  considérée précédemment n'est pas unitaire. Introduisons l'AHS suivante notée  $\mathcal{L}_+$  : en tant qu'algèbre de Hopf c'est  $k[\mathbb{Z}] \otimes \mathcal{L}$ ; le surproduit de  $[m] \otimes x$  et  $[n] \otimes y$  vaut

$$\Sigma_{(x)(y)} [mn] \otimes (x_{(1)} \dots x_{(n)} y_{(1)} \dots y_{(m)} (x_{(n+1)} \tilde{\otimes} y_{(m+1)}))$$

pour  $m$  et  $n \geq 0$ ,

$$\Sigma_{(x)(y)} [mn] \otimes (x_{(1)} \dots x_{(n)} S(y_{(1)}) \dots S(y_{(-m)}) (x_{(n+1)} \tilde{\otimes} S(y_{(-m+1)})))$$

pour  $m < 0$  et  $n \geq 0$ ,

$$\Sigma_{(x)(y)} [mn] \otimes (S(x_{(1)}) \dots S(x_{(-n)}) y_{(1)} \dots y_{(m)} (S(x_{(-n+1)}) \tilde{\otimes} y_{(m+1)}))$$

pour  $m \geq 0$  et  $n < 0$ ,

$$\Sigma_{(x)(y)}[mn] \otimes (S(x_{(1)}) \dots S(x_{(-n)}) S(y_{(1)}) \dots S(y_{(-m)}) (S(x_{(-n+1)}) \tilde{\otimes} S(y_{(-m+1)})))$$

pour  $m$  et  $n < 0$ .

Soit  $\sigma$  la surjection canonique de  $\mathcal{L}_+$  dans  $\mathcal{L}$  qui à  $[m] \otimes x$  associe  $x$  et  $\tau$  l'injection canonique qui à  $x$  associe  $[0] \otimes x$  (morphisme d'algèbres de Hopf seulement). Alors  $\mathcal{L}_+$  est une AHS unitaire de neutre  $[1] \otimes 1 = e$  ( $[0] \otimes 1$  reste le neutre du produit). On est alors en mesure d'énoncer le

LEMME 4.1. — Soient  $(\mu^k)_{k \geq 0}$  et  $(\nu^k)_{k \geq 0}$  deux familles de morphismes de cogèbres définies respectivement sur  $\mathcal{L}$  et sur  $\mathcal{L}_+$  telles que

$$\begin{aligned} \nu^k(e^m) &= e^{\binom{m}{k}}, & \nu^k(e^m x) &= \Sigma_{(x)} \prod_{i+j=k} e^{\binom{m}{i}} \tilde{\otimes} \nu^j(x_{(i+1)}), \\ \nu^k(x) &= \tau \mu^k(x) \quad (k > 0), & \nu^0(x) &= [1] \otimes \mu^0(x) \end{aligned}$$

pour tout  $x$  dans  $\mathcal{L}$  de longueur  $\geq 1$ , et

$$\mu^k(x) = \sigma \nu^k \tau(x)$$

pour tout  $x$  dans  $\mathcal{L}$ .

Alors les  $(\mu^k)_{k \geq 0}$  vérifient les formules du théorème (3.1) si et seulement si

$$\nu^k(xy) = \Sigma_{(x)(y)} (\nu^0(x_{(1)}) \tilde{\otimes} \nu^k(y_{(1)})) \dots (\nu^k(x_{(k+1)}) \tilde{\otimes} \nu^0(y_{(k+1)}))$$

pour tout  $x$  et  $y$  dans  $\mathcal{L}_+$ . ■

THÉORÈME 4.2. — En prenant pour  $(\mu^k)_{k \geq 0}$  la famille des  $\lambda$ -opérations définies ci-dessus sur  $\mathcal{L}$ , et en posant  $\nu^k = \lambda^k$  on obtient que l'opération  $\lambda^k(f) = \lambda^k f$  munit l'anneau  $(\text{End}_{k\text{-Cbre}}(\mathcal{L}_+), \oplus, \otimes)$  d'une structure de  $\lambda$ -anneau spécial. Sur  $\mathcal{L}_+$ , on a de plus les formules suivantes :

- (1)  $\lambda^k(xy) = \Sigma_{(x)(y)} (\lambda^0(x_{(1)}) \tilde{\otimes} \lambda^k(y_{(1)})) \dots (\lambda^k(x_{(k+1)}) \tilde{\otimes} \lambda^0(y_{(k+1)})),$
- (2)  $\lambda^k(x \tilde{\otimes} y) = P_k(\lambda^1 i_1, \dots, \lambda^k i_1; \lambda^1 i_2, \dots, \lambda^k i_2)(x \otimes y),$
- (3)  $\lambda^k(\lambda^{k'}(x)) = P_{k,k'}(\lambda^1, \dots, \lambda^{kk'})(x),$

$x$  et  $y$  étant dans  $\mathcal{L}_+$ . ■

L'AHS  $k[\mathbf{R}]$  introduite au paragraphe 1 est unitaire et on a le

THÉORÈME 4.3. — Si  $\mathbf{R}$  est un  $\lambda$ -anneau spécial,  $k[\mathbf{R}]$  est une AHS munie de  $\lambda$ -opérations de manière évidente et l'opération  $\lambda^k(f) = \lambda^k f$  fait de l'anneau  $(\text{End}_{k\text{-Cbre}}(k[\mathbf{R}]), \oplus, \otimes)$  un  $\lambda$ -anneau spécial. Les formules (1) (2) et (3) sont également vraies sur  $k[\mathbf{R}]$ . ■

Remarque. — Les formules (1) (2) et (3) sur  $k[\mathbf{R}]$  appliquées à des éléments « group-like » (i.e. si  $\Delta(x) = x \otimes x$ ) redonnent les formules classiques sur les  $\lambda$ -anneaux. Par exemple (1) devient pour des éléments « group-like »  $x$  et  $y$  de  $k[\mathbf{R}]$  (qui sont dans  $\mathbf{R}$  car  $k$  est intègre) :

$$\lambda^k(xy) = (\lambda^0(x) \tilde{\otimes} \lambda^k(y)) \dots (\lambda^k(x) \tilde{\otimes} \lambda^0(y)).$$

On peut aussi remarquer que tout ce qui a été dit sur  $k[\mathbf{R}]$  peut être dit pour  $k[\mathbf{R}]^\wedge$  (le complété de  $k[\mathbf{R}]$  pour la topologie  $\mathfrak{m}$ -adique,  $\mathfrak{m}$  étant l'idéal d'augmentation). Il suffit pour cela de vérifier que les  $\lambda$ -opérations sont continues pour cette topologie.

5. EXTENSION DES THÉORÈMES PRÉCÉDENTS. — Tous les résultats ci-dessus sont encore valables si l'on remplace l'homologie de  $\text{gl}_\infty(\mathbf{A})$  par son homologie non-commutative [6]. L'homologie cyclique de  $\mathbf{A}$  est alors remplacée par l'homologie de Hochschild de  $\mathbf{A}$  [2]

et les  $\lambda$ -opérations induites coïncident avec celles déjà connues [6]. De même, on peut remplacer l'homologie de  $\mathfrak{gl}_\infty(A)$  par celle du groupe  $GL_\infty(A)$  et alors l'homologie cyclique de  $A$  devient la  $K$ -théorie algébrique de  $A$  munie de ses  $\lambda$ -opérations usuelles [4].

Note remise le 15 juin 1991, acceptée le 19 juillet 1991.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] H. CARTAN et S. EILENBERG, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.
- [2] C. CUVIER, Homologie de Leibniz et Homologie de Hochschild, *C. R. Acad. Sci. Paris* (à paraître).
- [3] P. GAUCHER, Produit Tensoriel de Matrices et Homologie Cyclique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 312, série I, 1991, p. 13-16.
- [4] C. KRATZER, Lambda-structure en  $K$ -théorie Algébrique, *Com. Math. Helv.*, 55, 1980, p. 233-254.
- [5] S. LANG et W. FULTON, *Riemann-Roch Algebra*, Springer, Berlin, 1985.
- [6] J.-L. LODAY, *Cyclic Homology* (à paraître).
- [7] J.-L. LODAY et C. PROCESI, Cyclic Homology and Lambda-Operations, in *Alg. K-theory: Connection with Geom. and Topology*, N.A.T.O. A.S.I. Series C, 279, 1989, p. 209-224.

---

*Institut de Recherche Mathématique avancée, Université Louis-Pasteur et C.N.R.S.,  
7, rue Descartes, 67084 Strasbourg.*