Master 2 - LP Année 2019

TD de Typage n° 4

Types polymorphes

I) Le polymorphisme à la Girard

Exercice 1 Donner un environnement Γ_i et un type A_i t.q. $\Gamma_i \vdash E_i : A_i$ soit vrai pour les expressions E_i suivantes :

- $E_0 \equiv (\Lambda\alpha.(x[\alpha \to \alpha])\ (\lambda y : \alpha.y))[int \times bool]$
- $E_1 \equiv \mathbf{cons}[\alpha]\langle f(\mathbf{hd}[\beta](l)), m[\beta][\alpha]\langle f, \mathbf{tl}[\beta](l)\rangle\rangle.$
- $E_2 \equiv \lambda m : \forall\gamma\forall\delta.(\gamma \to \delta \times \mathbf{liste}(\gamma) \to \mathbf{liste}(\delta)).\Lambda\beta.\Lambda\alpha.\lambda f : \beta \to \alpha.\lambda l : \mathbf{liste}(\beta).E_1$
- $E_3 \equiv map[int][int](\lambda x : int.x + 1, \mathbf{cons}[int]\langle 1, \mathbf{cons}[int]\langle 2, \mathbf{nil}[int]\rangle\rangle)$
- $E_4 \equiv \mathbf{let}\ map : \beta \to \alpha \times \mathbf{liste}(\beta) \to \mathbf{liste}(\alpha) = fix[A](E_2)\ \mathbf{in}\ E_3$

où nous supposons l'existence d'un type $\mathbf{liste}(\alpha)$ et de constantes **nil**, **tl**(), **hd**() et :: avec les règles de typage suivantes :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{nil} : & \forall\alpha.\mathbf{liste}(\alpha) \\ \mathbf{cons} : & \forall\alpha.\alpha \times \mathbf{liste}(\alpha) \to \mathbf{liste}(\alpha) \\ \mathbf{hd} : & \forall\alpha.\mathbf{liste}(\alpha) \to \alpha \\ \mathbf{tl} : & \forall\alpha.\mathbf{liste}(\alpha) \to \mathbf{liste}(\alpha) \end{array}$$

Exercice 2

- Evaluer $(\Lambda\alpha.(x[\alpha \to \alpha])\ (\lambda y : \alpha.y))[int \times bool]$
- Evaluer $(\Lambda\beta.\lambda x : \beta \to \alpha.x\ y)[int \to int]\ (\lambda z : int \to int.h)$
- Soient U et V sont deux termes quelconques de type A. Soient T, F et $IfThenElse[A]\ M\ U\ V$ les termes suivants

$$\begin{array}{lcl} T & \equiv & \Lambda\alpha.\lambda x : \alpha.\lambda y : \alpha.x \\ F & \equiv & \Lambda\alpha.\lambda x : \alpha.\lambda y : \alpha.y \\ IfThenElse[A]\ M\ U\ V & \equiv & M[A]\ U\ V \end{array}$$

  Evaluer $IfThenElse[A]\ T\ U\ V$ et $IfThenElse[A]\ F\ U\ V$. Quels sont les types de T, F et $IfThenElse$?

- Soit M un terme de type A et N un terme de type B. Soient $P_1[A][B](L)$, $P_2[A][B](L)$ et $Pair[A][B]\ M\ N$ les termes suivants :

$$\begin{array}{lcl} P_1[A][B](L) & \equiv & L[A](\lambda x : A.\lambda y : B.x) \\ P_2[A][B](L) & \equiv & L[B](\lambda x : A.\lambda y : B.y) \\ Pair[A][B]\ M\ N & \equiv & \Lambda\alpha.(\lambda x : A \to B \to \alpha.xMN) \end{array}$$

  Evaluer $P_1[A][B](Pair[A][B]\ M\ N)$ et $P_2[A][B](Pair[A][B]\ M\ N)$. Quels sont les types de P_1, P_2 et $Pair$?

- Soient M et N deux termes quelconques de type C. B. Soient $Case[A][B][C]\ L\ (\lambda x : A.M)\ (\lambda y : B.N))$, $I_1[A][B]\ L_1$ et $I_2[A][B]\ L_2$ les termes suivants :

$$\begin{array}{lcl} I_1[A][B](L_1) & \equiv & \Lambda\alpha.\lambda x : A \to \alpha.\lambda y : B \to \alpha.xL_1 \\ I_2[A][B](L_2) & \equiv & \Lambda\alpha.\lambda x : A \to \alpha.\lambda y : B \to \alpha.yL_2 \\ Case[A][B][C]\ L\ (\lambda x : A.M)\ (\lambda y : B.N) & \equiv & L[C](\lambda x : A.M)(\lambda y : B.N) \end{array}$$

  Evaluer $Case[A][B][C]\ I_1[A][B](L_1)\ (\lambda x : A.M)\ (\lambda y : B.N)$ et $Case[A][B][C]\ I_2[A][B](L_2)\ (\lambda x : A.M)\ (\lambda y : B.N)$. Quels sont les types de I_1, I_2 et $Case$?

II) Le polymorphisme à la ML

Exercice 3 Calculer le schéma $Gen(A, \Gamma)$ dans tous les cas suivants:

- $A = \alpha \times (\alpha \to \beta)$ et $\Gamma = x : \gamma, y : \forall\alpha.\alpha$.
- $A = \alpha \times (\alpha \to \beta)$ et $\Gamma = x : \alpha, y : \forall\alpha.\alpha$.
- $A = \alpha \times (\alpha \to \beta)$ et $\Gamma = x : \alpha, y : \forall\alpha.\alpha \to \beta$.
- $A = \alpha \times (\alpha \to \beta)$ et $\Gamma = x : \alpha \to \beta, y : \forall\alpha.\alpha$.
- $A = \forall\alpha.\alpha \times (\beta \to \gamma)$ et $\Gamma = x : \alpha, y : \alpha$.
- $A = \forall\alpha.\alpha \times (\beta \to \gamma)$ et $\Gamma = x : \alpha, y : \beta \to \alpha$.
- $A = \forall\alpha.\alpha \times (\beta \to \gamma)$ et $\Gamma = x : \alpha, y : \beta \to \gamma$.

Exercice 4 Donner de dérivations de types pour les termes suivants :

1. **let** $f = \lambda y.y$ **in** $f\ (f\ 1)$
2. **let** $f = \lambda y.y$ **in** $(f\ f)\ 1$
3. **let** $x = 2$ **in** (**let** $y = x + 1$ **in** $(2 * x) + y$)
4. **let** $f = \lambda y.y$ **in** (**if** f *true* **then** f 4 **else** f 5)

Exercice 5 Calculer $W(\Delta, M)$ dans le cas suivants :

- $\Delta = \emptyset$ et $M = \lambda x.\lambda y.xy$

- $\Delta = \emptyset$ et $M = fix(\lambda f.\lambda x.\lambda y.fxy)$
- $\Delta = f : \alpha, g : \gamma, z : \beta$ et $M = \textbf{let } x = fz \textbf{ in } gxx$
- $\Delta = f : \alpha, g : \gamma, z : \beta$ et $M = \textbf{let } x = fz \textbf{ in } (\textbf{let } y = fx \textbf{ in } gxy)$

Exercice 6

1. Donner une extension de l'algorithme de typage à la ML aux cas des listes.
2. Donner une dérivation de types pour le terme $\lambda f.\lambda l.f(\mathbf{hd}(l)) :: map(f, \mathbf{tl}(l))$
3. Calculer $W(\Delta, M)$:
   $\Delta = \emptyset$ et $M = fix(\lambda m.\lambda f.\lambda l.\textbf{if } l \textbf{ then } l \textbf{ else } \mathbf{hd}(l) :: m\ f\ \mathbf{tl}(l))$