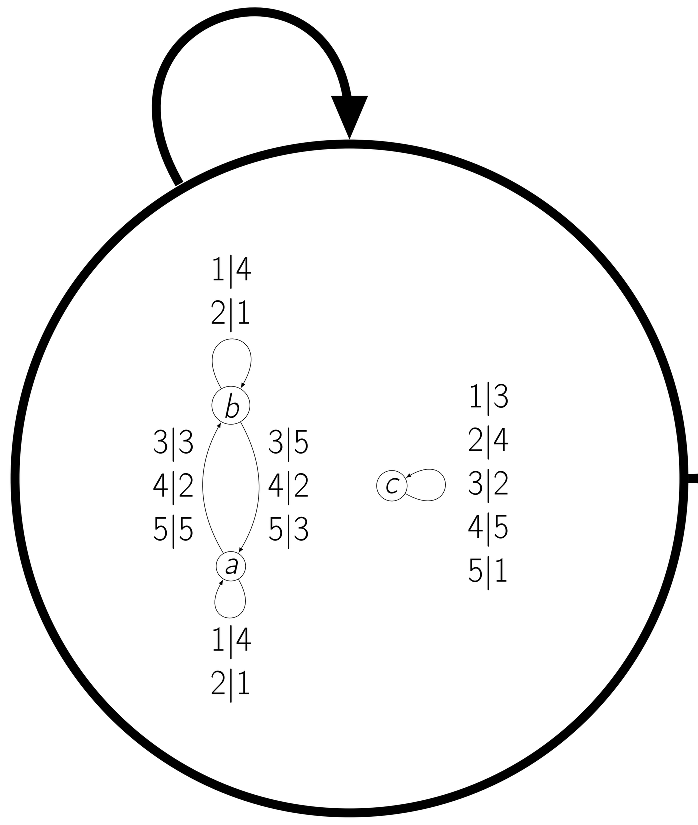
Automates de Mealy Réversibles et Problème de Burnside

Thibault Godin, Ines Klimann, and Matthieu Picantin

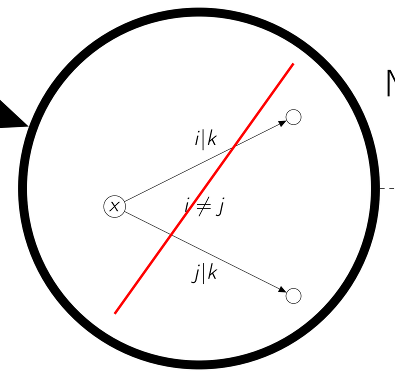
IRIF, Université Paris 7 Diderot

ANR-JJC-12-JS02-012-01

1955 | Mealy
1960 | Glushkov

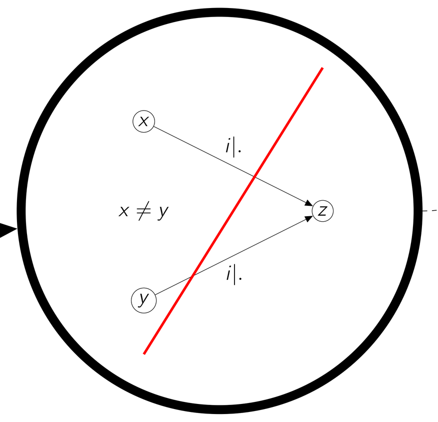


Structure | Invertibilité

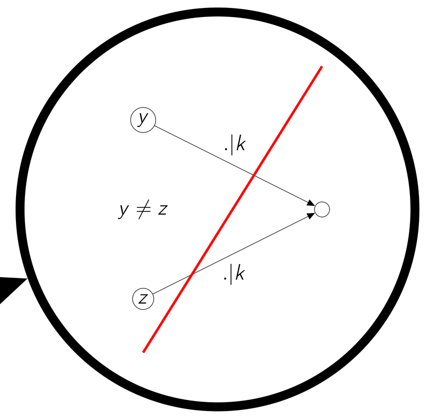


Nécessaire pour | engendrer un groupe

Structure | Reversibilité

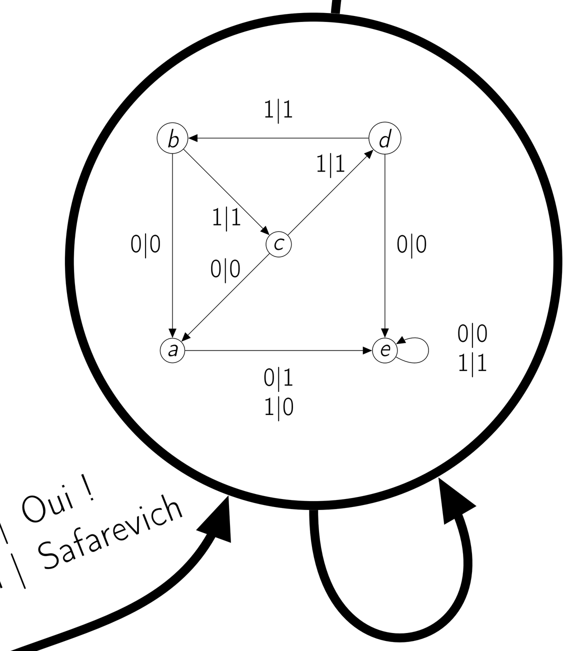


Structure | Coreversibilité



Conjecture :
Un automate réversible ne peut pas engendrer un groupe de Burnside infini

Grigorchuk | non-réversible



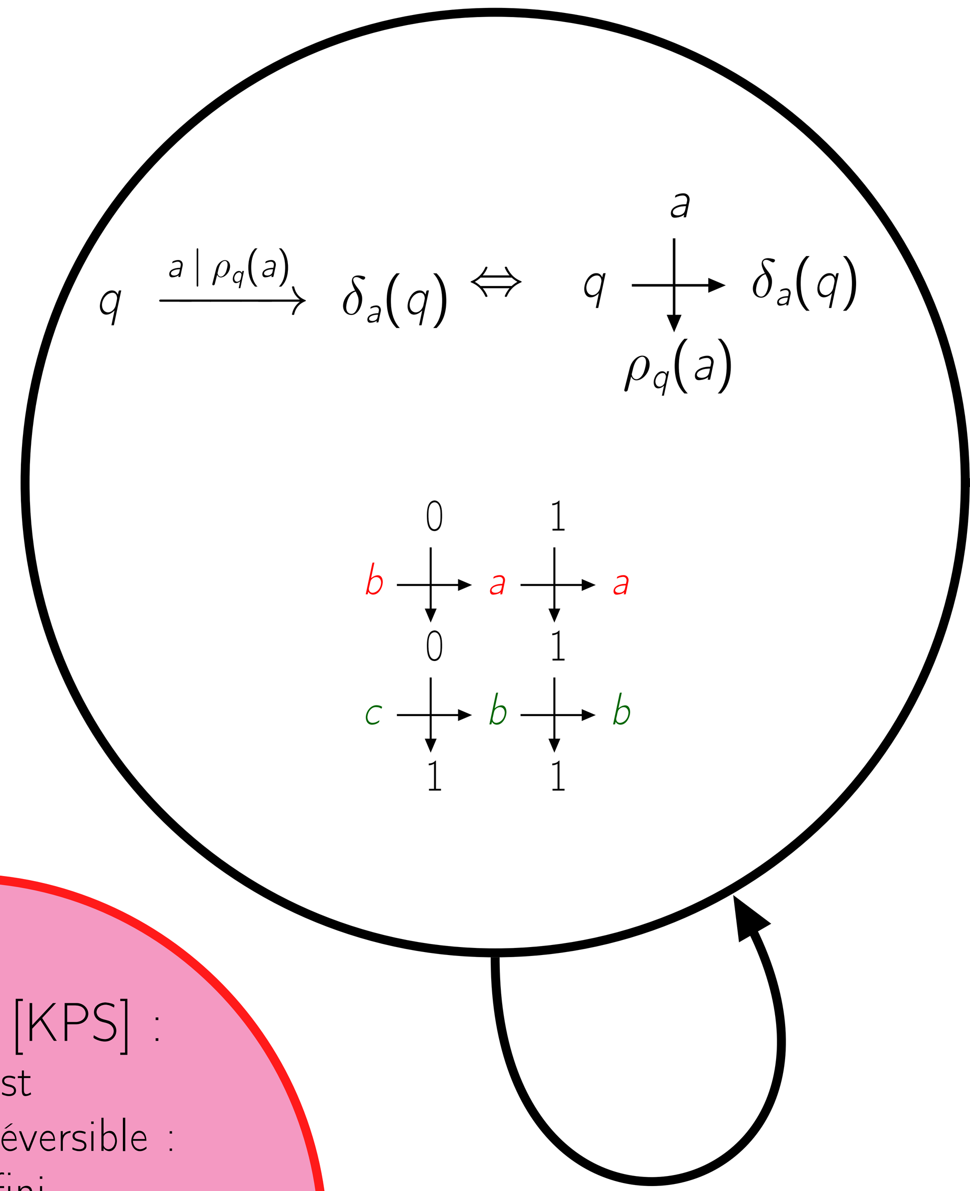
1964 | Oui !
Golod | Safarevich

Grigorchuk | 1980
Groupe de Burnside | Infini

Un groupe peut-il être infini et de torsion ?

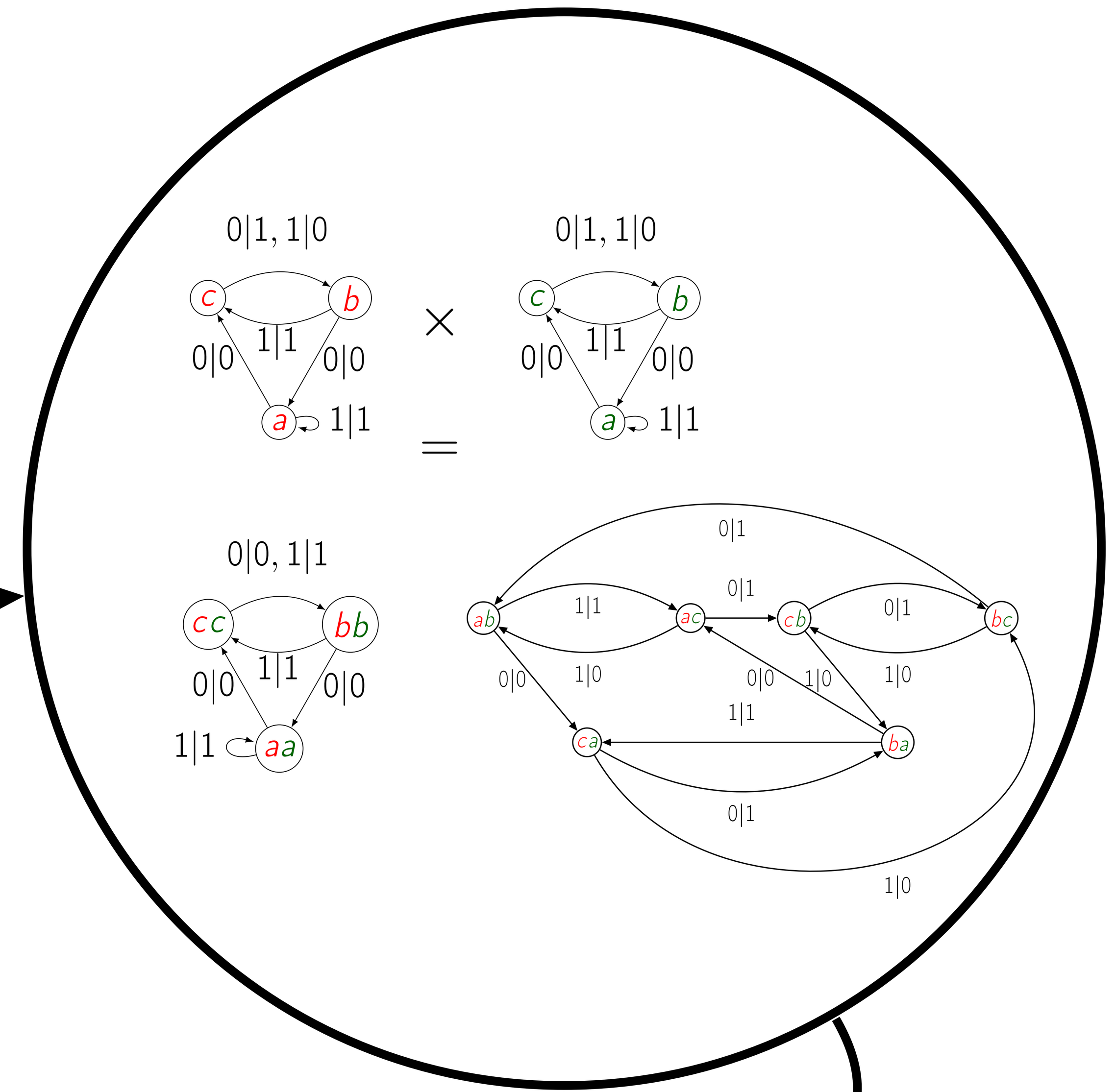
torsion : $\forall g, \exists n > 0$, t.q. $g^n = e$

1902 | Problème de Burnside



Composition | de Transitions

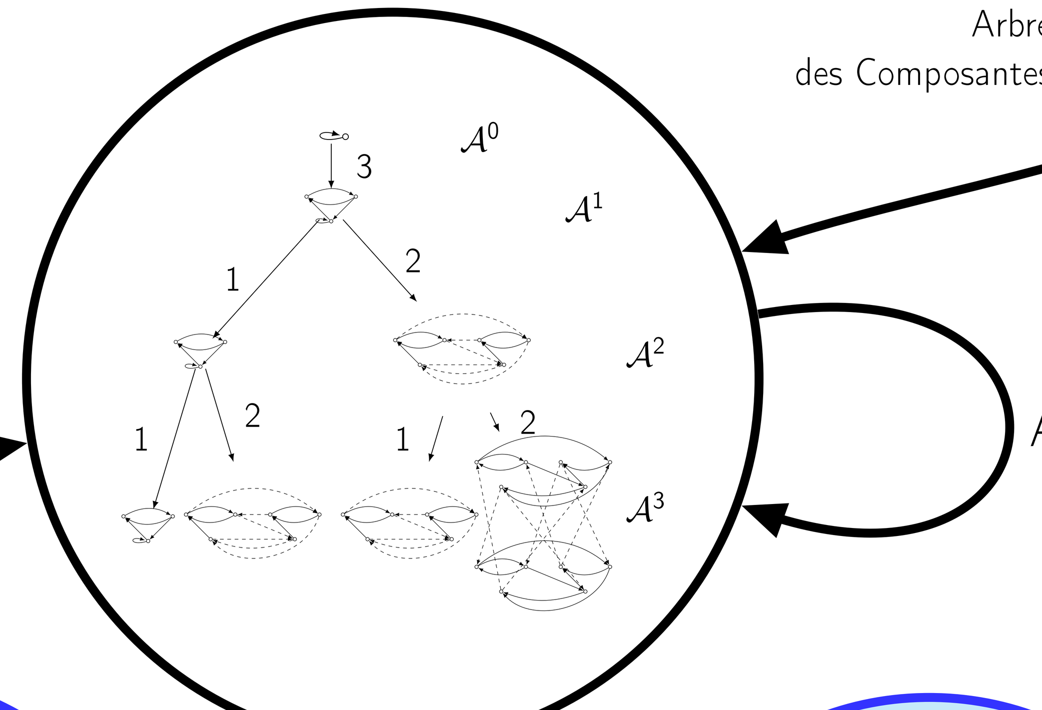
Produit | d'Automates



Proposition [KPS] :
si $\mathcal{A}$ est Inversible et Réversible :
$\langle\mathcal{A}\rangle$ infini
$\Leftrightarrow$
Les tailles des composantes connexes de $\mathcal{A}^n$ ne sont pas bornées

Descendant/Parent | Ratio de Taille

Arbre | Infini
des Composantes | Connexes



Arbres des | Orbites

Ratio de Taille entre Composantes Connexes

Si $\mathcal{A}$ est réversible, alors le rapport entre la taille d'une composante connexe et celle d'un de ses ancêtre dans l'arbre est toujours un entier.

Taille des Composantes Connexes

Si $u \in Q^*$ alors ρ_u est de torsion ssi la suite des tailles des composantes connexes contenant u^i est bornée.

Théorème [GK] :
Un automate inversible et réversible ayant un nombre premier d'états ne peut engendrer un groupe de Burnside infini

Théorème [GKP] :
Un automate inversible, réversible mais non birévesible ne peut engendrer un groupe de Burnside infini

Automates de Mealy

Un Automate Mealy $\mathcal{A}$ est un quadruplé $(Q, \Sigma, \delta, \rho)$, où :
Q est un ensemble fini, l'ensemble des états
Σ est un ensemble fini, l'alphabet
$\delta = (\delta_i)_{i\in\Sigma}$ avec $\delta_i : Q \to Q$ une fonction, la fonction de transition
$\rho = (\rho_q)_{q\in Q}$ avec $\rho_q : \Sigma \to \Sigma$ une fonction, la fonction de production

Un automate est dit :
Inversible si ρ_q est une permutation $\forall q \in Q$
Réversible si δ_x est une permutation $\forall x \in \Sigma$
Coréversible si $\hat{\delta}_x$, associée à la lettre de sortie x, est une permutation $\forall x \in \Sigma$
Biréversible si il est simultanément : inversible, réversible et coréversible

Groupes d'Automate

Chaque état q d'un automate de Mealy inversible induit une fonction $\rho_q : \Sigma^* \to \Sigma^*$.
Le groupe engendré par l'automate $\mathcal{A}$ est $\langle\mathcal{A}\rangle = \langle \rho_q \mid q \in Q\rangle = \{\rho_u \mid u \in Q^*\}$. De nombreux groupes peuvent être engendrés ainsi : n'importe quel groupe fini, mais aussi de nombreux groupes "intéressants", qui ont été utilisés pour résoudre d'importants problèmes en théorie des groupes, tels que ceux de Day, de Gromov ou d'Atiyah.

Si on s'intéresse à un problème célèbre en théorie des groupes, le problème de Burnside (1902), qui demande si un groupe ayant un nombre fini de générateurs peut être infini et être de torsion (c-à-d que chaque élément a une puissance qui vaut l'identité). Ce problème à été résolu par Golod et Safarevich en 1964, mais Grigorchuk en a trouvé une solution bien plus simple en 1980 par le biais d'un groupe engendré par un automate de Mealy.
Il est naturel de se demander si l'on peut prédire des propriétés d'un groupe en regardant la structure de l'automate qui l'engendre, et quelle propriété structurelle de l'automate induit telle caractéristique pour le groupe engendré. C'est généralement une question difficile : par exemple Gillibert à montré qu'il est impossible de décider si le semi-groupe engendré par un automate donné est fini (ce problème reste ouvert dans le cas des groupes).

Jusqu'à présent, tous les automates qui engendrent des groupes de Burnside infinis sont inversibles mais pas réversibles, ce qui conduit à nous interroger sur le lien entre la réversibilité et le problème de Burnside. Notre travail donne des réponses partielles à ces questions en montrant que, dans un grand nombre de situations, la réversibilité interdit à un automate d'engendrer un groupe de Burnside infini.

Bibliographie

- P. Gillibert. *The finiteness problem for automaton semigroups is undecidable*, International Journal of Algebra and Computation, 2014.
- Th. Godin, and I. Klimann *Connected réversible Mealy automata of prime size cannot generate infinite Burnside groups*, MFCS 2016.
- Th. Godin, I. Klimann, and M. Picantin *On torsion-free semigroups generated by invertible réversible Mealy automata*, LATA 2015.
- E.S. Golod, and I. Shafarevich, *On the class field tower*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 1964.
- R. Grigorchuk. *On Burnside's problem on periodic groups*, Funktsional. Anal. i Prilozhen,1980.
- I. Klimann, M. Picantin, and D. Savchuk. *A connected 3-state réversible mealy automaton cannot generate an infinite Burnside group*, DLT 2015.
- I. Klimann, M. Picantin, and D. Savchuk. *Orbit automata as a new tool to attack the order problem in automaton groups*, Journal of Algebra 2016.
- V. Nekrashevych. *Self-similar groups. Mathematical Surveys and Monographs*, 2005.