

RÉÉCRITURE ALGÈBRIQUE


Yves Guiraud
INRIA – Institut Camille Jordan

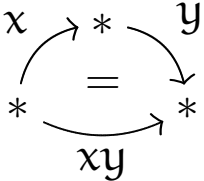
Colloquium AGL
29 novembre 2010

1. Introduction

1.1. Motivation

Problème : Monoïde M , vu en tant qu'objet cellulaire

– 1-cellules :  pour tout x de M

– Quotient :  pour tous x, y de M

Question : Construire un « modèle cellulaire complet » de M


i.e., un objet cellulaire libre avec le même type d'homotopie

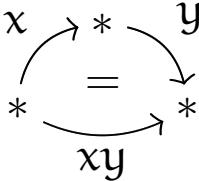
i.e., un remplacement cofibrant (dans une certaine catégorie de modèles)

i.e., une résolution

1.1. Motivation

Problème : Monoïde M , vu en tant qu'objet cellulaire

– 1-cellules :  pour tout x de M

– Quotient :  pour tous x, y de M


Question : Construire un « modèle cellulaire complet » de M

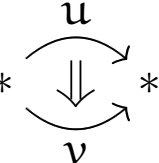
i.e., un objet cellulaire libre avec le même type d'homotopie

i.e., un remplacement cofibrant (dans une certaine catégorie de modèles)

i.e., une résolution

Premières dimensions : Présentation $M = \langle X \mid R \rangle$

– 1-cellules :  pour tout x de X

– 2-cellules :  pour toute $u = v$ de R

Au-delà :

– 3-cellules : relations entre relations

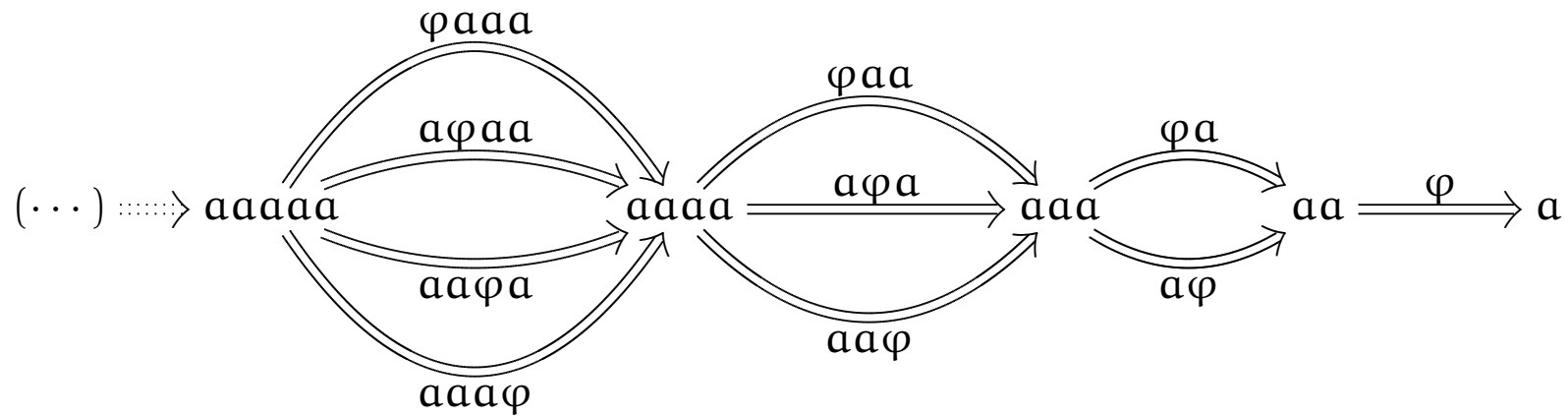
– 4-cellules : relations entre relations entre relations

\rightsquigarrow Construction effective par des méthodes de *réécriture*

1.2. Théorie de la réécriture

Réécriture : Théorie des propriétés calculatoires des présentations [Thue 14, Newman 42]

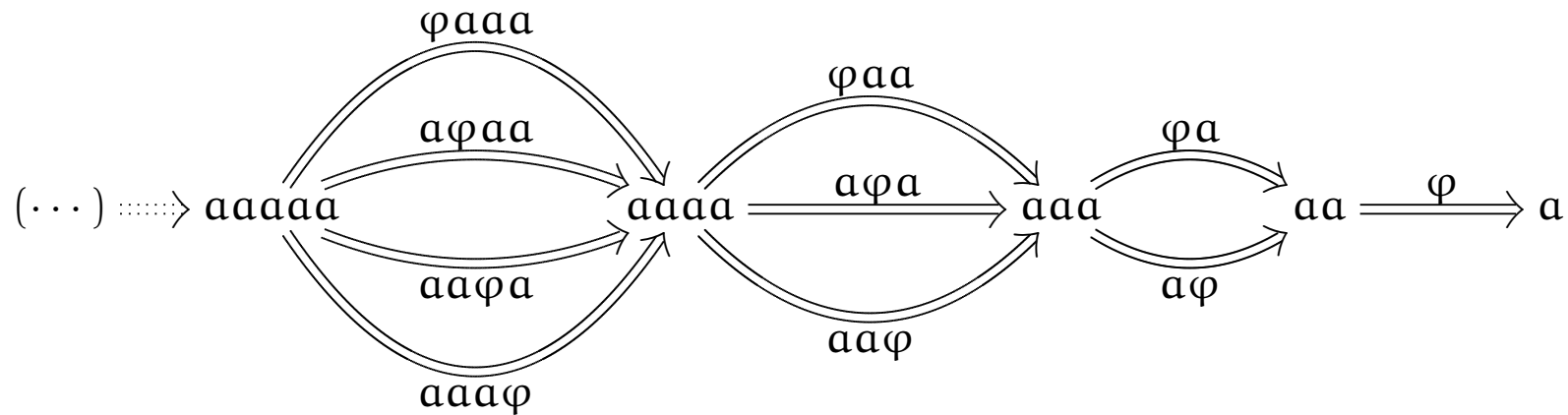
Exemple : $\Lambda = \langle a \mid aa = a \rangle \rightsquigarrow \Lambda = \langle a \mid aa \xrightarrow{\varphi} a \rangle$



1.2. Théorie de la réécriture

Réécriture : Théorie des propriétés calculatoires des présentations [Thue 14, Newman 42]

Exemple : $\Lambda = \langle a \mid aa = a \rangle \rightsquigarrow \Lambda = \langle a \mid aa \xrightarrow{\varphi} a \rangle$



« **Bonnes** » propriétés calculatoires :

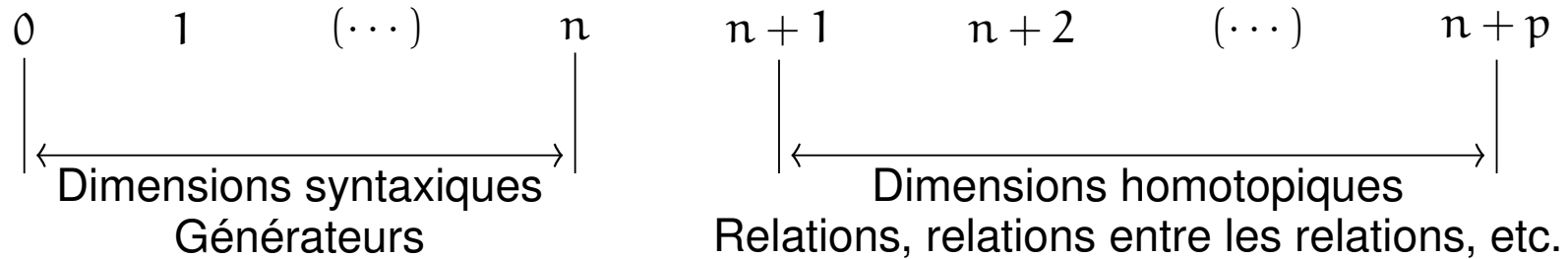
– **Terminaison** \rightsquigarrow Tout calcul donne un résultat

– **Confluence** \rightsquigarrow Les résultats sont cohérents

– **Convergence** (= terminaison + confluence) \rightsquigarrow $\left\{ \begin{array}{l} \text{Solution effective du problème du mot} \\ \text{Construction effective de résolutions} \end{array} \right.$

1.3. Les dimensions de la réécriture

Dimensions de la résolution :



Dimensions syntaxiques :

Polygraphes [Burroni, Métayer] – Computades [Street, Batanin, Makkai]

Réécriture en dimension supérieure [G.–Malbos]

Dimensions homotopiques :

Lien entre propriétés homotopiques, homologiques, calculatoires [Squier, Kobayashi, Otto]

Application 1 : Preuve de théorèmes de cohérence [G.–Malbos]

Application 2 : Construction de résolutions par polygraphes de traces [G.–Malbos]

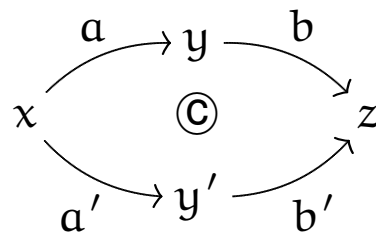
2. Les dimensions syntaxiques de la réécriture

2.1. Présentations de catégories par 2-polygraphes

Monoïde : catégorie avec une 0-cellule

Présentation d'une catégorie \mathcal{C} :

– Objets et morphismes générateurs, *i.e.*, un (1-poly)graphe X

– Diagrammes commutatifs  (relations R dans la catégorie libre X^*)

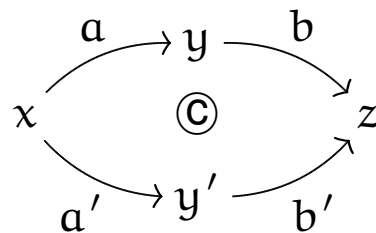
tels que $\mathcal{C} \simeq X^*/R$

2.1. Présentations de catégories par 2-polygraphes

Monoïde : catégorie avec une 0-cellule

Présentation d'une catégorie \mathcal{C} :

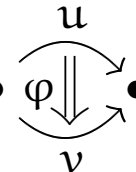
– Objets et morphismes générateurs, *i.e.*, un (1-poly)graphe X

– Diagrammes commutatifs  (relations R dans la catégorie libre X^*)

tels que $\mathcal{C} \simeq X^*/R$

2-Polygraphe Σ : présentation par réécriture d'une catégorie

– (1-Poly)graphe $\Sigma_1 \rightsquigarrow$ Catégorie libre Σ_1^*

– *Extension cellulaire* Σ_2 de Σ_1^* = Ensemble de 2-cellules  avec $u, v \in \Sigma_1^*$

Catégorie présentée : $\bar{\Sigma} = \Sigma_1^*/\Sigma_2$

Exemple : Le 2-polygraphe $As_2 = (*, a, aa \xrightarrow{\varphi} a)$ est une présentation de $A = \langle a \mid aa = a \rangle$

2.2. Réécriture I : formes normales et terminaison

Soit Σ un 2-polygraphe

Étape de réduction : $vuw \xrightarrow{v\varphi w} vu'w$ avec $\varphi : u \Rightarrow u'$ dans Σ_2

Forme normale : 1-cellule $u \in \Sigma_1^*$ t.q. $\nexists u \xrightarrow{f} v$

Intuition : Formes normales = représentants de $\bar{\Sigma}$ dans Σ_1^*

Condition : $\forall u \in \Sigma_1^* \quad \exists !$ forme normale *calculable* dans $\bar{u} \in \bar{\Sigma}$

2.2. Réécriture I : formes normales et terminaison

Soit Σ un 2-polygraphe

Étape de réduction : $vuw \xrightarrow{v\varphi w} vu'w$ avec $\varphi : u \Rightarrow u'$ dans Σ_2

Forme normale : 1-cellule $u \in \Sigma_1^*$ t.q. $\nexists u \xrightarrow{f} v$

Intuition : Formes normales = représentants de $\bar{\Sigma}$ dans Σ_1^*

Condition : $\forall u \in \Sigma_1^* \quad \exists !$ forme normale *calculable* dans $\bar{u} \in \bar{\Sigma}$

Terminaison : \nexists suite infinie d'étapes de réécriture

$$u_1 \xrightarrow{f_1} u_2 \xrightarrow{f_2} u_3 \xrightarrow{f_3} (\dots) \xrightarrow{f_{n-1}} u_n \xrightarrow{f_n} (\dots)$$

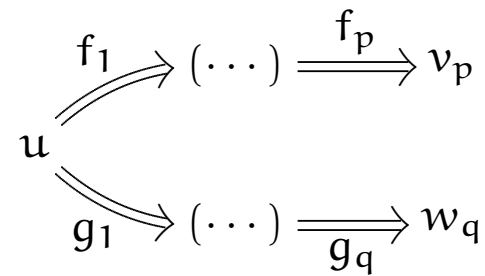
Conséquence : Terminaison \Rightarrow Existence de formes normales

Exemple : $As_2 = (a, aa \xrightarrow{\mathcal{Q}} a)$ termine

$$a^n \Rightarrow a^{n-1} \Rightarrow (\dots) \Rightarrow a^3 \Rightarrow a^2 \Rightarrow a$$

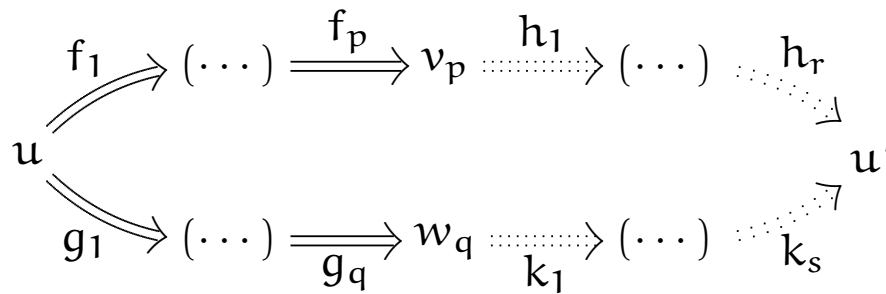
2.3. Réécriture II : branchements et confluence

Branchement : couple de suites de réductions



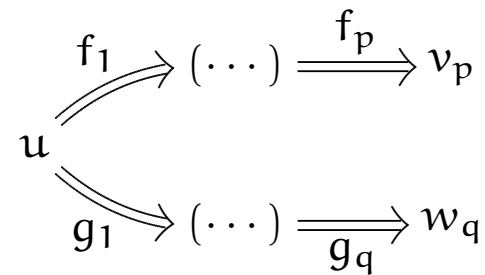
– **Local** : $p = q = 1$

– **Confluent** :



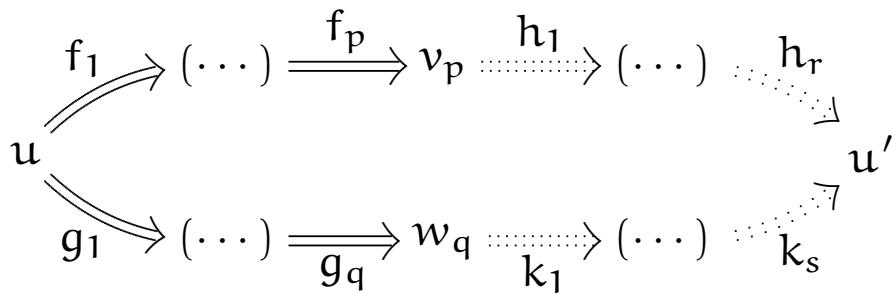
2.3. Réécriture II : branchements et confluence

Branchement : couple de suites de réductions

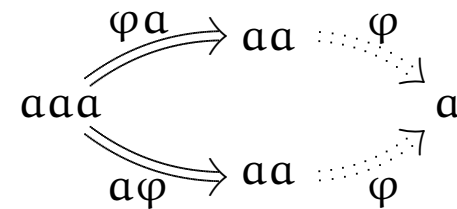


– **Local** : $p = q = 1$

– **Confluent** :



Exemple : un branchement local et confluent de As_2



Confluence (locale) : tout branchement (local) est confluent

Conséquence : Confluence \Rightarrow Unicité des formes normales

2.4. Réécriture III : convergence

Convergence : terminaison + confluence

- Convergence \implies Existence et unicité des formes normales
- Convergence + finitude \implies *idem* + calculabilité

Classe FCP : Catégories admettant une présentation convergente finie

2.4. Réécriture III : convergence

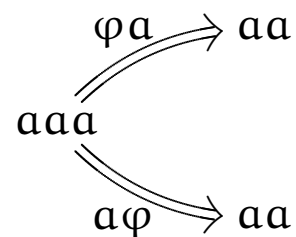
Convergence : terminaison + confluence

- Convergence \implies Existence et unicité des formes normales
- Convergence + finitude \implies *idem* + calculabilité

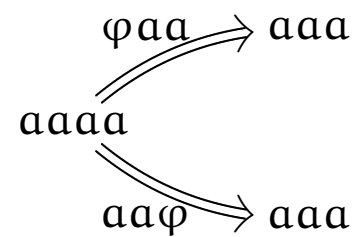
Classe FCP : Catégories admettant une présentation convergente finie

Théorème [Lemme de Newman]. Terminaison + Confluence locale \implies convergence

Branchements critiques : branchement local avec un « chevauchement minimal » de 2-cellules



Critique



Non critique

Théorème. Terminaison + Confluence des branchements critiques \implies Convergence

2.5. 2-Catégories

2-catégorie : catégorie enrichie en catégories.

– **1-cellules** : $x \xrightarrow{u} y$ avec une composition $u \star_0 v = x \xrightarrow{u} y \xrightarrow{v} z$

– **2-cellules** : $x \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \Downarrow f \\ \xrightarrow{v} \end{array} y$ avec deux compositions $f \star_0 g = x \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \Downarrow f \\ \xrightarrow{u'} \end{array} y \begin{array}{c} \xrightarrow{v} \\ \Downarrow g \\ \xrightarrow{v'} \end{array} z$ et $f \star_1 g = x \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \Downarrow f \\ \xrightarrow{v} \\ \Downarrow g \\ \xrightarrow{w} \end{array} y$

Relation d'échange : $(f \star_1 g) \star_0 (h \star_1 k) = (f \star_0 h) \star_1 (g \star_0 k)$ pour $\begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{g} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{k} \end{array}$

2.5. 2-Catégories

2-catégorie : catégorie enrichie en catégories.

– **1-cellules** : $x \xrightarrow{u} y$ avec une composition $u \star_0 v = x \xrightarrow{u} y \xrightarrow{v} z$

– **2-cellules** : $x \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \Downarrow f \\ \xrightarrow{v} \end{array} y$ avec deux compositions $f \star_0 g = x \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \Downarrow f \\ \xrightarrow{u'} \end{array} y \begin{array}{c} \xrightarrow{v} \\ \Downarrow g \\ \xrightarrow{v'} \end{array} z$ et $f \star_1 g = x \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \Downarrow f \\ \xrightarrow{v} \\ \Downarrow g \\ \xrightarrow{w} \end{array} y$

Relation d'échange : $(f \star_1 g) \star_0 (h \star_1 k) = (f \star_0 h) \star_1 (g \star_0 k)$ pour $\cdot \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{g} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{k} \end{array} \cdot$

Exemple : La 2-catégorie Σ^* librement engendrée par un 2-polygraphe Σ

Exemple : un PRO(P) de Mac Lane

– une 0-cellule $*$

– 1-cellules : entiers naturels avec composition $m \star_0 n = m + n$

– 2-cellules : morphismes de P avec compositions

$$f \star_0 g = f \otimes g$$

$$f \star_1 g = g \circ f$$

2.6. Présentations de 2-catégories par 3-polygraphes

3-Polygraphes :

– 2-polygraphe $\Sigma_2 \rightsquigarrow$ 2-catégorie libre Σ_2^*

– *Extension cellulaire* Σ_3 de Σ_2^* = Ens. de 3-cellules $x \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \Downarrow f \\ \xrightarrow{v} \end{array} y \xrightarrow{\alpha} x \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \Downarrow g \\ \xrightarrow{v} \end{array} y$ avec $f, g \in \Sigma_2^*$

2-Catégorie présentée : $\bar{\Sigma} = \Sigma_2^*/\Sigma_3$

2.6. Présentations de 2-catégories par 3-polygraphes

3-Polygraphes :

– 2-polygraphe $\Sigma_2 \rightsquigarrow$ 2-catégorie libre Σ_2^*

– Extension cellulaire Σ_3 de Σ_2^* = Ens. de 3-cellules $x \begin{array}{c} \curvearrowright \\ f \Downarrow \\ \curvearrowleft \\ y \end{array} \begin{array}{c} u \\ \Downarrow \\ v \end{array} \xrightarrow{\alpha} x \begin{array}{c} \curvearrowright \\ g \Downarrow \\ \curvearrowleft \\ y \end{array} \begin{array}{c} u \\ \Downarrow \\ v \end{array}$ avec $f, g \in \Sigma_2^*$

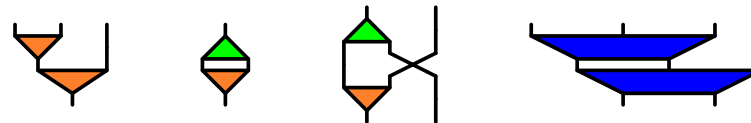
2-Catégorie présentée : $\bar{\Sigma} = \Sigma_2^*/\Sigma_3$

Représentations graphiques :

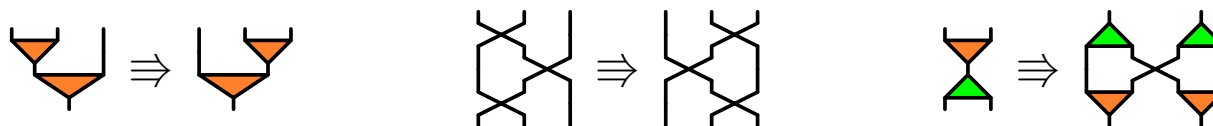
– 2-cellules génératrices (Σ_2) :



– 2-cellules composées (Σ_2^*) :



– 3-cellules génératrices (Σ_3) :



2.7. Exemples de 3-polygraphes : présentations de PRO

Algèbres associatives : présentation As_3 du PRO As (\rightsquigarrow FCP)

0-cellule : *

1-cellule : |

2-cellule : 

3-cellule : 

2.7. Exemples de 3-polygraphes : présentations de PRO

Algèbres associatives : présentation As_3 du PRO As (\rightsquigarrow FCP)

0-cellule : *

1-cellule : |

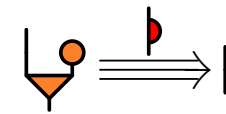
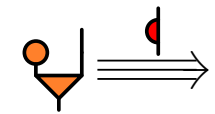
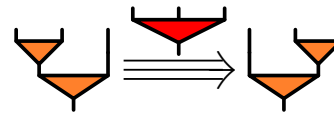
2-cellule : 

3-cellule : 

Monoïdes : présentation Mon_3 du PRO Mon (\rightsquigarrow FCP)

2-cellules : 

3-cellules :



2.7. Exemples de 3-polygraphes : présentations de PRO

Algèbres associatives : présentation As_3 du PRO As (\rightsquigarrow FCP)

0-cellule : *

1-cellule : |

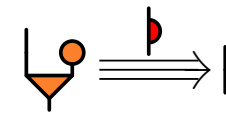
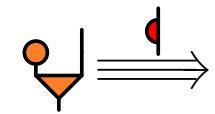
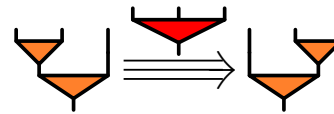
2-cellule : 

3-cellule : 

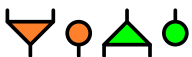
Monoïdes : présentation Mon_3 du PRO Mon (\rightsquigarrow FCP)

2-cellules : 

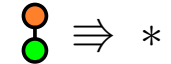
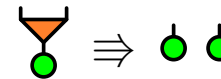
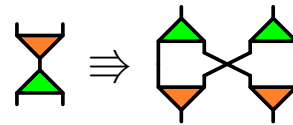
3-cellules :



Bigèbres : présentation du PRO des bigèbres (\rightsquigarrow FCP)

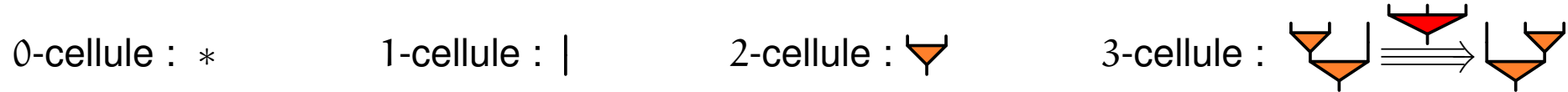
2-cellules : 

3-cellules :

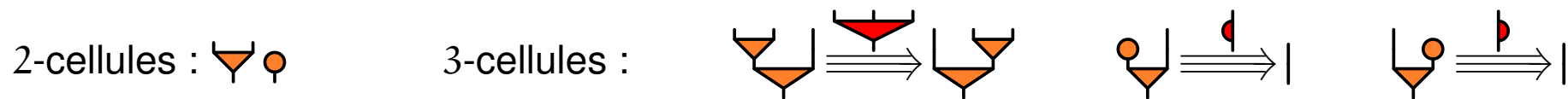


2.7. Exemples de 3-polygraphes : présentations de PRO

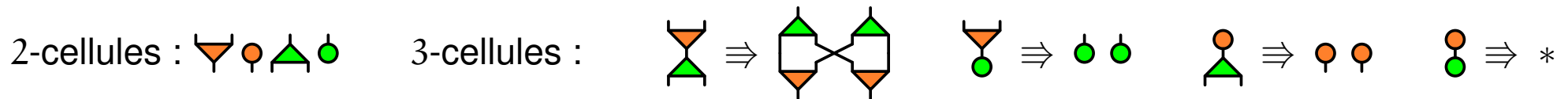
Algèbres associatives : présentation As_3 du PRO As (\rightsquigarrow FCP)



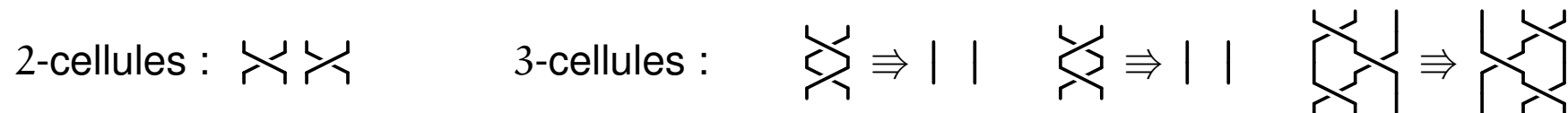
Monoïdes : présentation Mon_3 du PRO Mon (\rightsquigarrow FCP)



Bigèbres : présentation du PRO des bigèbres (\rightsquigarrow FCP)



Tresses : présentation du PRO des tresses (FCP : problème ouvert)



2.8. Exemples de 3-polygraphes informatique théorique

Programmes fonctionnels du premier ordre :

```
type nat = 0 | S(nat)
```

```
fonction plus : nat * nat -> nat  
  | plus(0, n) -> n  
  | plus(S(m), n) -> S(plus(m, n))
```


2.8. Exemples de 3-polygraphes informatique théorique

Programmes fonctionnels du premier ordre :

```
type nat = 0 | S(nat)
```

```
fonction plus : nat * nat -> nat  
  | plus(0, n) -> n  
  | plus(S(m), n) -> S(plus(m, n))
```

Version 3-polygraphique :

– 2-cellules :   

– 3-cellules :  \Rightarrow |  \Rightarrow 

\rightsquigarrow Analyse de programmes : terminaison [G.], classes de complexité [Bonfante–G.]


2.8. Exemples de 3-polygraphes informatique théorique

Programmes fonctionnels du premier ordre :

```
type nat = 0 | S(nat)
```

```
fonction plus : nat * nat -> nat  
  | plus(0, n) -> n  
  | plus(S(m), n) -> S(plus(m, n))
```

Version 3-polygraphique :

– 2-cellules :   

– 3-cellules :  \Rightarrow |  \Rightarrow 

\rightsquigarrow Analyse de programmes : terminaison [G.], classes de complexité [Bonfante–G.]

Machines de Turing [Burroni, Bonfante–G.]

Réseaux de Petri [G.]

3. Les dimensions homotopiques de la réécriture

3.1. Résolutions par polygraphes de traces : idée informelle

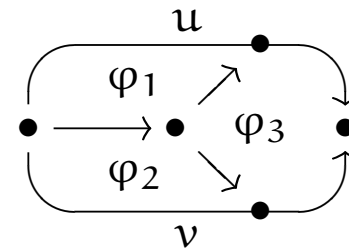
Problème : catégorie $\mathcal{C} \mapsto n$ -catégorie libre Σ^* et « homotopiquement équivalente »

Présentation de \mathcal{C} : 2-polygraphe Σ

– (1-Poly)graphe Σ_1

– Extension cellulaire Σ_2 de Σ_1^* t.q. $\mathcal{C} \simeq \Sigma_1^*/\Sigma_2$

$\bar{u} = \bar{v} \iff \exists$ pavage entre u et v , par ex. :



avec φ_i dans Σ_2

3.1. Résolutions par polygraphes de traces : idée informelle

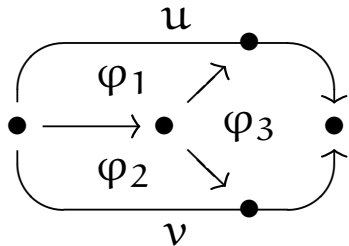
Problème : catégorie $\mathcal{C} \mapsto n$ -catégorie libre Σ^* et « homotopiquement équivalente »

Présentation de \mathcal{C} : 2-polygraphe Σ

– (1-Poly)graphe Σ_1

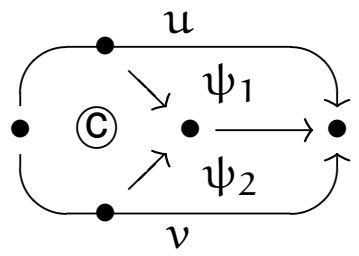
– Extension cellulaire Σ_2 de Σ_1^* t.q. $\mathcal{C} \simeq \Sigma_1^*/\Sigma_2$

$\bar{u} = \bar{v} \iff \exists$ pavage entre u et v , par ex. :



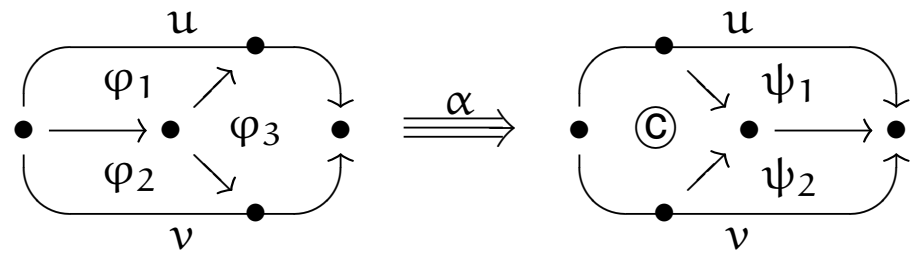
avec φ_i dans Σ_2

Problème : autre pavage entre u et v , par ex. :



avec ψ_j dans Σ_2

Solution : Remplir la 2-sphère avec une 3-cellule

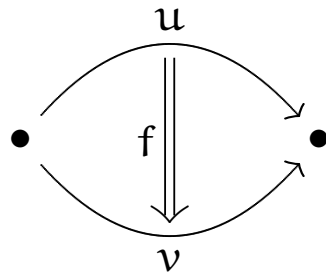


3.2. Résolutions par polygraphes de traces : basses dimensions

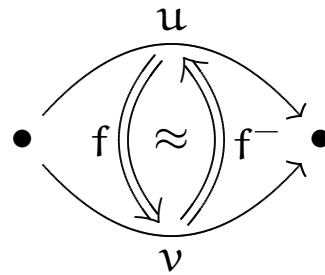
Résolution de \mathcal{C} de longueur 0 : 1-polygraphe Σ qui engendre \mathcal{C}

Résolution de \mathcal{C} de longueur 1 : 2-polygraphe Σ qui présente \mathcal{C}

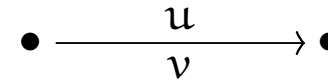
2-catégorie libre Σ_2^*



(1, 1)-catégorie de traces Σ_2^\top



1-catégorie présentée $\bar{\Sigma}$

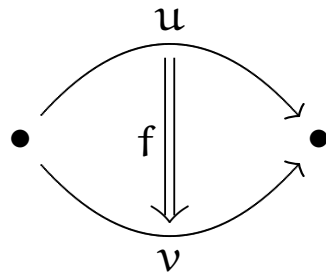


3.2. Résolutions par polygraphes de traces : basses dimensions

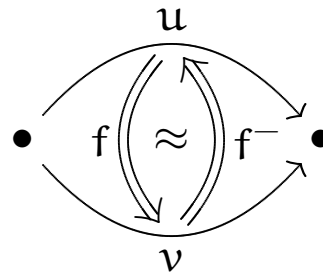
Résolution de \mathcal{C} de longueur 0 : 1-polygraphe Σ qui engendre \mathcal{C}

Résolution de \mathcal{C} de longueur 1 : 2-polygraphe Σ qui présente \mathcal{C}

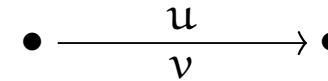
2-catégorie libre Σ_2^*



(1, 1)-catégorie de traces Σ_2^T



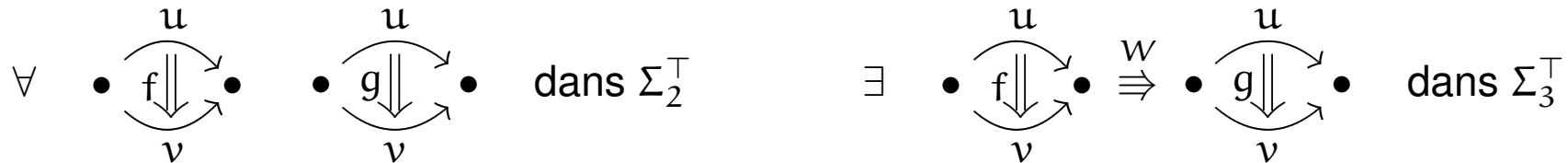
1-catégorie présentée $\bar{\Sigma}$



Résolution de \mathcal{C} de longueur 2 : (1, 2)-polygraphe de traces Σ

– 2-polygraphe Σ_2 qui présente \mathcal{C}

– Base d'homotopie Σ_3 de Σ_2^T = Extension cellulaire de Σ_2^T t.q.



3.3. Branchements critiques et bases d'homotopie

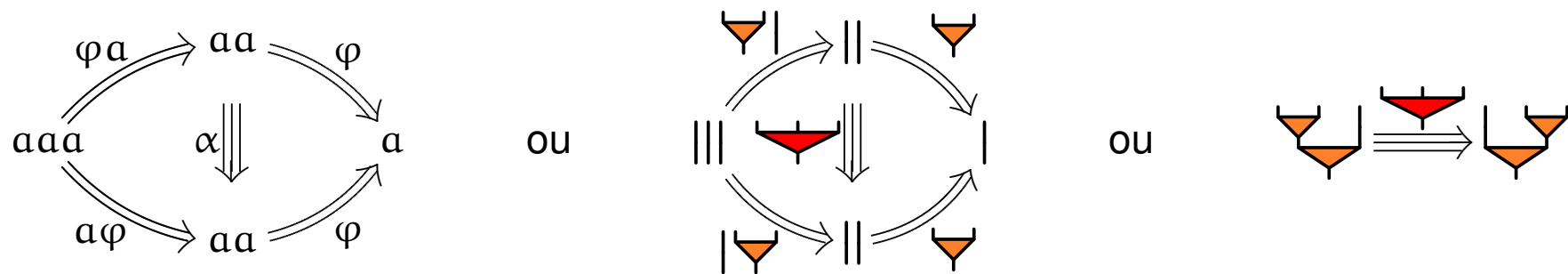
Théorème [Squier 94, G.–Malbos 08]: Si Σ est un n -polygraphe convergent, alors ses branchements critiques engendrent une base d'homotopie $\text{Crit}_2(\Sigma)$ de Σ^\top

3.3. Branchements critiques et bases d'homotopie

Théorème [Squier 94, G.–Malbos 08]: Si Σ est un n -polygraphe convergent,

alors ses branchements critiques engendrent une base d'homotopie $\text{Crit}_2(\Sigma)$ de Σ^\top

Exemple 1 : $\text{As}_2 = (a, aa \xrightarrow{\varphi} a) = (|, \nabla)$ a un branchement critique (confluent) :

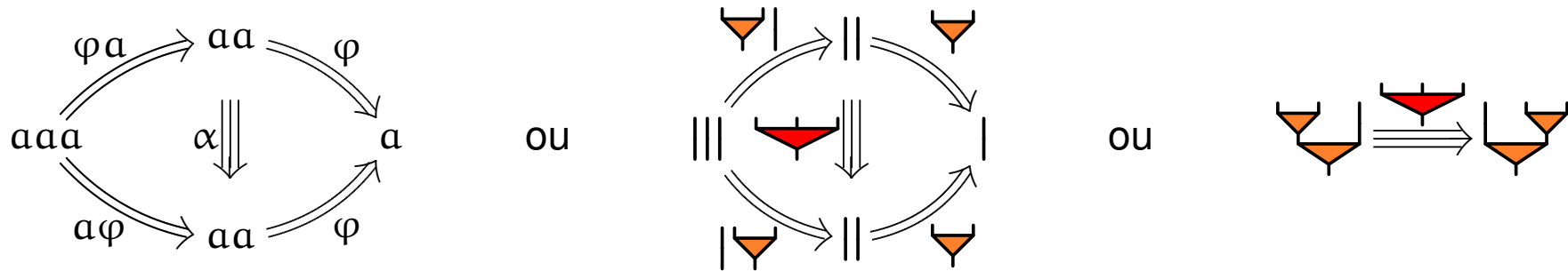


3.3. Branchements critiques et bases d'homotopie

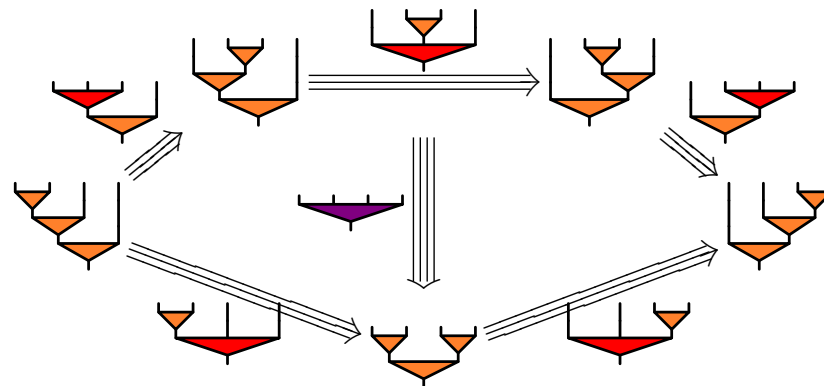
Théorème [Squier 94, G.–Malbos 08]: Si Σ est un n -polygraphe convergent,

alors ses branchements critiques engendrent une base d'homotopie $\text{Crit}_2(\Sigma)$ de Σ^\top

Exemple 1 : $As_2 = (a, aa \xrightarrow{\varphi} a) = (|, \nabla)$ a un branchement critique (confluent) :



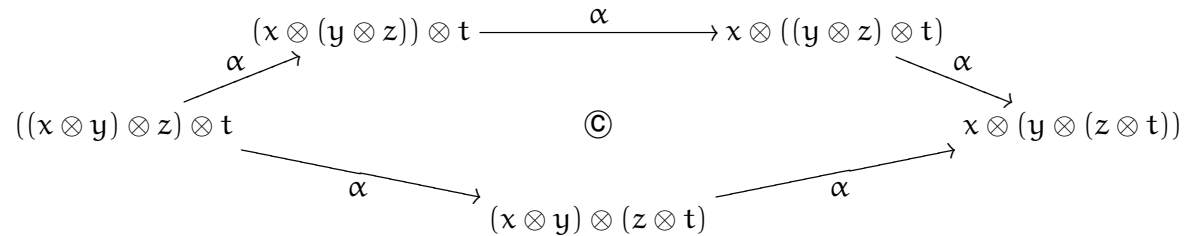
Exemple 2 : $As_3 = (|, \nabla, \nabla)$ a un branchement critique confluent :



3.4. Application : théorèmes de cohérence

Catégorie associative $(\mathcal{C}, \otimes, \alpha)$:

catégorie \mathcal{C} , foncteur $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\otimes} \mathcal{C}$, isomorphisme naturel $(x \otimes y) \otimes z \xrightarrow{\alpha} x \otimes (y \otimes z)$ t.q. :



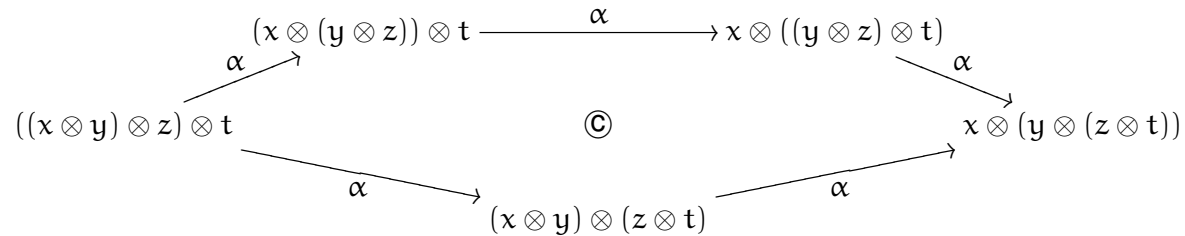
Théorème de cohérence pour les catégories associatives.

Dans une catégorie associative, tous les diagrammes construits avec \otimes et α commutent.

3.4. Application : théorèmes de cohérence

Catégorie associative $(\mathcal{C}, \otimes, \alpha)$:

catégorie \mathcal{C} , foncteur $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\otimes} \mathcal{C}$, isomorphisme naturel $(x \otimes y) \otimes z \xrightarrow{\alpha} x \otimes (y \otimes z)$ t.q. :



Théorème de cohérence pour les catégories associatives.

Dans une catégorie associative, tous les diagrammes construits avec \otimes et α commutent.

Preuve. Isomorphisme : catégories associatives \simeq 3-foncteurs $\Phi : \text{As}_3^\top / \text{As}_4 \rightarrow \mathbf{Cat}$

$$\Phi(|) = \mathcal{C}$$

$$\Phi(\text{triangle orange}) = \otimes$$

$$\Phi(\text{triangle rouge}) = \alpha$$

$$\Phi(\text{triangle violet}) = \text{©}$$

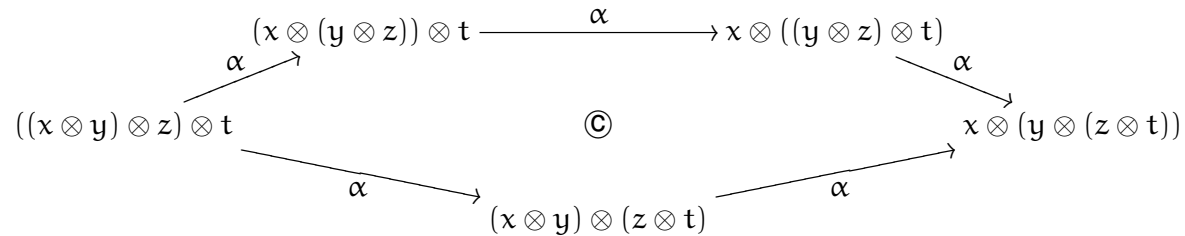
Diagramme = couple $(\Phi(A), \Phi(B))$ avec $A, B : f \Rightarrow g$ dans As_3^\top

$$\text{As}_4 = \{ \text{triangle violet} \} \text{ base d'homotopie de } \text{As}_3^\top \rightsquigarrow \exists W : A \Rightarrow B \text{ dans } \text{As}_4^\top \rightsquigarrow \Phi(W) = \text{©}$$

3.4. Application : théorèmes de cohérence

Catégorie associative $(\mathcal{C}, \otimes, \alpha)$:

catégorie \mathcal{C} , foncteur $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\otimes} \mathcal{C}$, isomorphisme naturel $(x \otimes y) \otimes z \xrightarrow{\alpha} x \otimes (y \otimes z)$ t.q. :



Théorème de cohérence pour les catégories associatives.

Dans une catégorie associative, tous les diagrammes construits avec \otimes et α commutent.

Preuve. Isomorphisme : catégories associatives \simeq 3-foncteurs $\Phi : \text{As}_3^\top / \text{As}_4 \rightarrow \mathbf{Cat}$

$$\Phi(|) = \mathcal{C} \quad \Phi(\text{triangle orange}) = \otimes \quad \Phi(\text{triangle rouge}) = \alpha \quad \Phi(\text{triangle violette}) = \text{©}$$

Diagramme = couple $(\Phi(A), \Phi(B))$ avec $A, B : f \Rightarrow g$ dans As_3^\top

$$\text{As}_4 = \{ \text{triangle violette} \} \text{ base d'homotopie de } \text{As}_3^\top \rightsquigarrow \exists W : A \Rrightarrow B \text{ dans } \text{As}_4^\top \rightsquigarrow \Phi(W) = \text{©}$$

Autres théorèmes [G.–Malbos 10] :

Catégories monoïdales, symétriques [Mac Lane], tressées [Joyal–Street]

3.5. Résolutions par polygraphes de traces : cas général

Résolution de \mathcal{C} de longueur p : $(1, p)$ -polygraphe de traces Σ

- résolution de \mathcal{C} par un $(1, p - 1)$ -polygraphe de traces Σ_p
- base d'homotopie Σ_{p+1} de Σ_p^T

Théorème [G.–Malbos 10].

Si une catégorie \mathcal{C} admet une présentation convergente Σ ,

alors \mathcal{C} admet une résolution par un $(1, p)$ -polygraphe de traces $\text{Crit}_p(\Sigma)$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

3.5. Résolutions par polygraphes de traces : cas général

Résolution de \mathcal{C} de longueur p : $(1, p)$ -polygraphe de traces Σ

- résolution de \mathcal{C} par un $(1, p - 1)$ -polygraphe de traces Σ_p
- base d'homotopie Σ_{p+1} de Σ_p^T

Théorème [G.–Malbos 10].

Si une catégorie \mathcal{C} admet une présentation convergente Σ ,

alors \mathcal{C} admet une résolution par un $(1, p)$ -polygraphe de traces $\text{Crit}_p(\Sigma)$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Classe FDT_p : Catégories admettant une résolution par un $(1, p)$ -polygraphe de traces *fini*

Corollaire. $\text{FCP} \implies \text{FDT}_p$

Corollaire [Squier 94]. Pour les monoïdes, $\text{FCP} \implies \text{FDT}_3$

3.6. Idée de la preuve : par récurrence

Branchements critiques p -uples : chevauchements minimaux de p étapes de réduction

Théorème [G.–Malbos 10]. Si Σ est un 2-polygraphe convergent,

alors ses branchements critiques p -uples engendrent une base d'homotopie $\text{Crit}_{p+1}(\Sigma)$ de $\text{Crit}_p(\Sigma)^\top$.

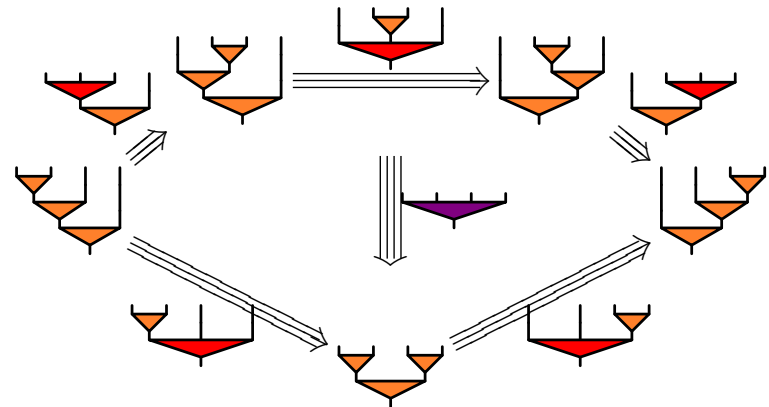
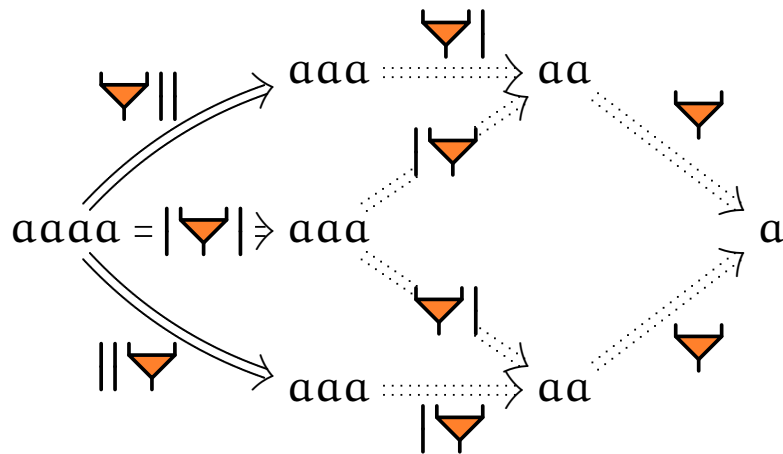
3.6. Idée de la preuve : par récurrence

Branchements critiques p-uples : chevauchements minimaux de p étapes de réduction

Théorème [G.–Malbos 10]. Si Σ est un 2-polygraphe convergent,

alors ses branchements critiques p-uples engendrent une base d'homotopie $\text{Crit}_{p+1}(\Sigma)$ de $\text{Crit}_p(\Sigma)^\top$.

Exemple: $As_2 = (|, \nabla)$ \rightsquigarrow $As_3 = (|, \nabla, \nabla)$ \rightsquigarrow $As_4 = (|, \nabla, \nabla, \nabla)$



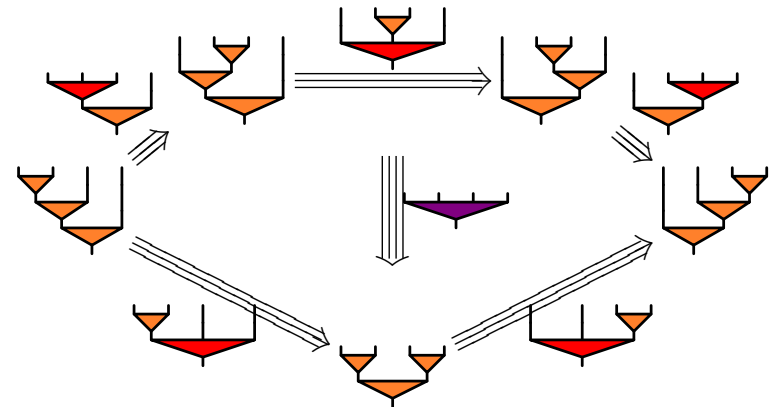
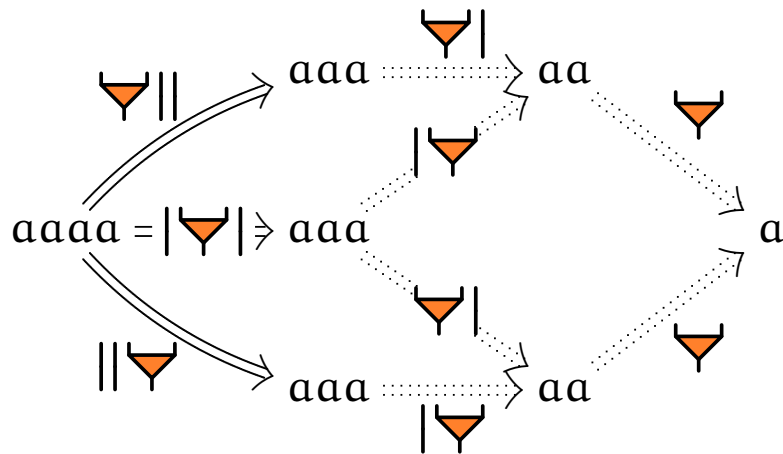
3.6. Idée de la preuve : par récurrence

Branchements critiques p-uples : chevauchements minimaux de p étapes de réduction

Théorème [G.–Malbos 10]. Si Σ est un 2-polygraphe convergent,

alors ses branchements critiques p -uples engendrent une base d'homotopie $\text{Crit}_{p+1}(\Sigma)$ de $\text{Crit}_p(\Sigma)^\top$.

Exemple: $As_2 = (|, \nabla)$ \rightsquigarrow $As_3 = (|, \nabla, \nabla)$ \rightsquigarrow $As_4 = (|, \nabla, \nabla, \nabla)$



Conclusion : Soit Σ une présentation convergente de \mathcal{C}

- Σ sans branchement critique p -uple $\implies \text{Crit}_p(\Sigma)$ modèle cellulaire complet de \mathcal{C}
- Σ avec branchements critiques p -uples pour tout p $\implies \text{Crit}_\infty(\Sigma)$ modèle cellulaire complet de \mathcal{C}

3.7. Abélianisation des résolutions par polygraphes de traces

Théorème [G.–Malbos 09].

Si une n -catégorie \mathcal{C} admet une résolution par un $(n, 2)$ -polygraphe de traces Σ ,
alors le \mathcal{C} -module des identités entre les relations de Σ_{n+1} est engendré par Σ_{n+2} .

Théorème [G.–Malbos 10].

Si \mathcal{C} admet une résolution par un $(1, p)$ -polygraphe de traces Σ ,
alors le \mathcal{C} -module trivial \mathbb{Z} admet une résolution libre de longueur p

$$\mathcal{C}[\Sigma_p] \longrightarrow \mathcal{C}[\Sigma_{p-1}] \longrightarrow (\dots) \longrightarrow \mathcal{C}[\Sigma_1] \longrightarrow \mathcal{C}[\Sigma_0] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

3.7. Abélianisation des résolutions par polygraphes de traces

Théorème [G.–Malbos 09].

Si une n -catégorie \mathcal{C} admet une résolution par un $(n, 2)$ -polygraphe de traces Σ ,
alors le \mathcal{C} -module des identités entre les relations de Σ_{n+1} est engendré par Σ_{n+2} .

Théorème [G.–Malbos 10].

Si \mathcal{C} admet une résolution par un $(1, p)$ -polygraphe de traces Σ ,
alors le \mathcal{C} -module trivial \mathbb{Z} admet une résolution libre de longueur p

$$\mathcal{C}[\Sigma_p] \longrightarrow \mathcal{C}[\Sigma_{p-1}] \longrightarrow (\cdots) \longrightarrow \mathcal{C}[\Sigma_1] \longrightarrow \mathcal{C}[\Sigma_0] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Classe FP_p : Catégories \mathcal{C} t.q. \mathbb{Z} admet une résolution projective de type fini et de longueur p

Corollaire. $FDT_p \implies FP_p$

Corollaire [Squier 87]. Pour les monoïdes, $FCP \implies FP_3$