

UNE INTRODUCTION À LA THÉORIE DE SQUIER

Yves Guiraud

INRIA πr^2

**Laboratoire Preuves, Programmes et Systèmes
Université Paris 7**

Séminaire LCR

**Laboratoire d'Informatique de Paris-Nord
Université Paris 13**

30 janvier 2015

1. Le théorème homotopique de Squier

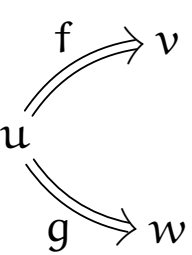
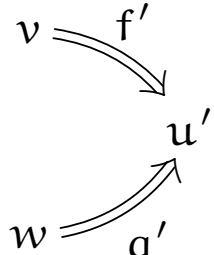
1.1. Présentations convergentes et problème du mot

Fait : pour tout monoïde M ,

M admet une présentation convergente finie (PCF) $\implies M$ a un problème du mot décidable

Présentation convergente : système de réécriture de mots (X, R) qui

- présente M : $M \simeq X^*/R$
- termine : il n'existe pas de $u_1 \Rightarrow u_2 \Rightarrow (\dots) \Rightarrow u_n \Rightarrow u_{n+1} \Rightarrow (\dots)$

- est confluent : pour tout u  v w il existe  u'

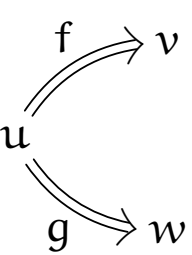
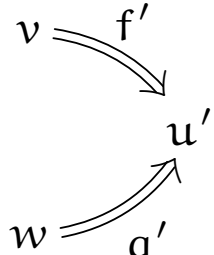
1.1. Présentations convergentes et problème du mot

Fait : pour tout monoïde M ,

M admet une présentation convergente finie (PCF) $\implies M$ a un problème du mot décidable

Présentation convergente : système de réécriture de mots (X, R) qui

- présente M : $M \simeq X^*/R$
- termine : il n'existe pas de $u_1 \Rightarrow u_2 \Rightarrow (\dots) \Rightarrow u_n \Rightarrow u_{n+1} \Rightarrow (\dots)$

- est confluent : pour tout u  il existe 

Conséquences :

- tout $u \in X^*$ a une unique forme normale \hat{u}
- pour tous $u, v \in X^*$, on a $u \equiv_M v$ ssi $\hat{u} = \hat{v}$
- si R fini : on peut décider si un mot de X^* est irréductible

\rightsquigarrow Solution au problème du mot : u \quad v

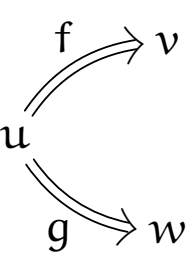
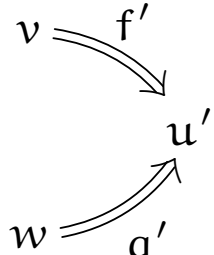
1.1. Présentations convergentes et problème du mot

Fait : pour tout monoïde M ,

M admet une présentation convergente finie (PCF) $\implies M$ a un problème du mot décidable

Présentation convergente : système de réécriture de mots (X, R) qui

- présente M : $M \simeq X^*/R$
- termine : il n'existe pas de $u_1 \Rightarrow u_2 \Rightarrow (\dots) \Rightarrow u_n \Rightarrow u_{n+1} \Rightarrow (\dots)$

- est confluent : pour tout u  il existe 

Conséquences :

- tout $u \in X^*$ a une unique forme normale \hat{u}
- pour tous $u, v \in X^*$, on a $u \equiv_M v$ ssi $\hat{u} = \hat{v}$
- si R fini : on peut décider si un mot de X^* est irréductible

\rightsquigarrow Solution au problème du mot : $u \Rightarrow \hat{u} \stackrel{?}{=} \hat{v} \Leftarrow v$

1.2. Le problème de Jantzen

Question [Jantzen 82, 85] : si M monoïde de type fini (= nb. fini de générateurs),

M décidable $\stackrel{?}{\implies}$ M admet une PCF

1.2. Le problème de Jantzen

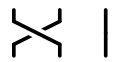
Question [Jantzen 82, 85] : si M monoïde de type fini (= nb. fini de générateurs),

M décidable $\stackrel{?}{\implies} M$ admet une PCF

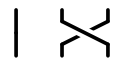
Exemple : monoïde $B_3^+ = \langle s, t \mid sts \Rightarrow tst \rangle$ des tresses sur trois brins



1



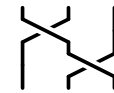
s



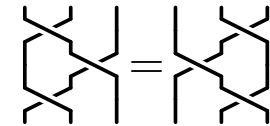
t



ss



st



sts = tst

Théorème [Garside 69] : B_3^+ est décidable

1.2. Le problème de Jantzen

Question [Jantzen 82, 85] : si M monoïde de type fini (= nb. fini de générateurs),

M décidable $\stackrel{?}{\implies} M$ admet une PCF

Exemple : monoïde $B_3^+ = \langle s, t \mid sts \Rightarrow tst \rangle$ des tresses sur trois brins



Théorème [Garside 69] : B_3^+ est décidable

Théorème [Kapur-Narendran 85] : $\begin{cases} B_3^+ \text{ n'admet aucune PCF } (X, R) \text{ avec } X = \{s, t\} \\ B_3^+ \text{ admet une PCF (avec d'autres générateurs)} \end{cases}$

- toute PC $(\{s, t\}, R)$ doit contenir $stsst^n \Leftrightarrow ts^{n+1}ts$ pour tout $n \geq 1$
- la présentation $B_3^+ \simeq \langle s, t, a \mid as \Rightarrow ta, st \Rightarrow a \rangle$ se complète (Knuth-Bendix) en une PCF

1.2. Le problème de Jantzen

Question [Jantzen 82, 85] : si M monoïde de type fini (= nb. fini de générateurs),

M décidable $\stackrel{?}{\implies}$ M admet une PCF

Exemple : monoïde $B_3^+ = \langle s, t \mid sts \Rightarrow tst \rangle$ des tresses sur trois brins



Théorème [Garside 69] : B_3^+ est décidable

Théorème [Kapur-Narendran 85] : $\begin{cases} B_3^+ \text{ n'admet aucune PCF } (X, R) \text{ avec } X = \{s, t\} \\ B_3^+ \text{ admet une PCF (avec d'autres générateurs)} \end{cases}$

- toute PC $(\{s, t\}, R)$ doit contenir $stsst^n \Leftrightarrow ts^{n+1}ts$ pour tout $n \geq 1$
- la présentation $B_3^+ \simeq \langle s, t, a \mid as \Rightarrow ta, st \Rightarrow a \rangle$ se complète (Knuth-Bendix) en une PCF

Conclusion : l'existence ou non d'une PCF (X, R) dépend de X ... et pas uniquement de M !

Idée de Squier : montrer PCF \implies une propriété indépendante de la présentation (*invariant de M*)

1.3. Complexe d'une présentation

Complexe d'une présentation $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2)$:

- Graphe des dérivations de Σ
 - sommets (1-cellules) : éléments du monoïde libre Σ_1^*
 - arêtes (2-cellules) : étapes de réduction $wuw' \xrightarrow{w\alpha w'} wvw'$ pour $u \xrightarrow{\alpha} v$ dans Σ_2
- \rightsquigarrow On a $u \equiv_M v$ ssi il existe un chemin non orienté (zigzag) $u \xleftrightarrow{f} v$
- \rightsquigarrow Zigzags entre u et v = preuves algébriques de $u \equiv_M v$

1.3. Complexe d'une présentation

Complexe d'une présentation $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2)$:

- Graphe des dérivations de Σ
 - sommets (1-cellules) : éléments du monoïde libre Σ_1^*
 - arêtes (2-cellules) : étapes de réduction $wuw' \xrightarrow{w\alpha w'} wvw'$ pour $u \xrightarrow{\alpha} v$ dans Σ_2
- ↪ On a $u \equiv_M v$ ssi il existe un chemin non orienté (zigzag) $u \xleftrightarrow{f} v$
- ↪ Zigzags entre u et v = preuves algébriques de $u \equiv_M v$
- Plus des 3-cellules pour les applications orthogonales de règles

$$\begin{array}{ccccc}
 w\alpha_1 w' u_2 w'' & \xrightarrow{\quad} & wv_1 w' u_2 w'' & \xrightarrow{wv_1 w' \alpha_2 w''} & \\
 \swarrow & & \equiv & & \searrow \\
 wu_1 w' u_2 w'' & & & & wv_1 w' v_2 w'' \\
 \searrow & & & & \swarrow \\
 wu_1 w' \alpha_2 w'' & \xrightarrow{\quad} & wu_1 w' v_2 w'' & \xrightarrow{w\alpha_1 w' v_2 w''} &
 \end{array}$$

- ↪ On ne distingue pas les preuves qui ne diffèrent que par l'ordre d'application des relations
- ↪ Il peut rester des « trous », *i.e.* des preuves différentes d'une même égalité

1.4. Le théorème homotopique de Squier

Base d'homotopie de $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2)$: ensemble Σ_3 de 3-cellules supplémentaires tq

« toutes les preuves de $u \equiv_{\mathcal{M}} v$ sont égales modulo Σ_3 »

i.e. pour tous zigzags $u \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} v$ il existe un pavage $u \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \boxed{\Sigma_3} \\ \xleftarrow{g} \end{array} v$ par des 3-cellules de Σ_3

Type de dérivation fini : Σ finie est *TDF* si elle admet une base d'homotopie *finie*

Présentation cohérente : présentation + base d'homotopie

1.4. Le théorème homotopique de Squier

Base d'homotopie de $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2)$: ensemble Σ_3 de 3-cellules supplémentaires tq

« toutes les preuves de $u \equiv_M v$ sont égales modulo Σ_3 »

i.e. pour tous zigzags $u \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} v$ il existe un pavage $u \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \boxed{\Sigma_3} \\ \xleftarrow{g} \end{array} v$ par des 3-cellules de Σ_3

Type de dérivation fini : Σ finie est *TDF* si elle admet une base d'homotopie *finie*

Présentation cohérente : présentation + base d'homotopie

Théorème [Squier 94]:

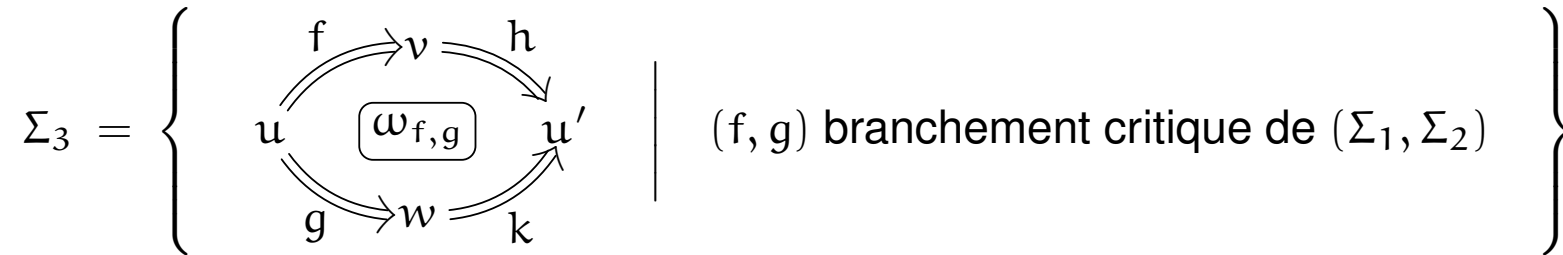
- Si Σ est convergente et finie, alors Σ est TDF
- Si Σ et Υ sont deux présentations finies d'un monoïde M , alors Σ TDF ssi Υ TDF
- Il existe M décidable avec une présentation finie non TDF

Corollaire : décidable $\not\Rightarrow$ PCF

Réf. : G.-Malbos, *Polygraphs of finite derivation type*, 2014

1.5. Démonstration de convergent fini \Rightarrow TDF

La base d'homotopie : (Σ_1, Σ_2) convergent $\rightsquigarrow \Sigma_3$ base d'homotopie de (Σ_1, Σ_2)



1.5. Démonstration de convergent fini \Rightarrow TDF

La base d'homotopie : (Σ_1, Σ_2) convergent $\rightsquigarrow \Sigma_3$ base d'homotopie de (Σ_1, Σ_2)

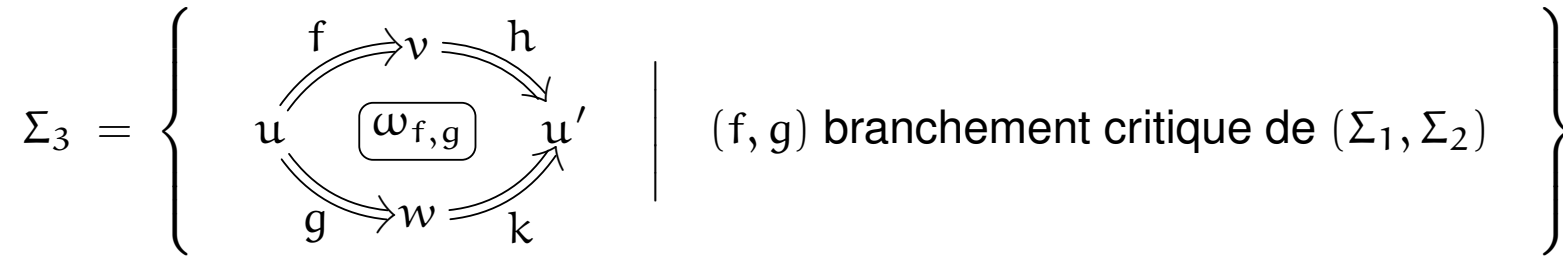
$$\Sigma_3 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & f & \rightarrow & v & & h & & \\ & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & & & \\ u & & & & & & & & u' \\ & & \omega_{f,g} & & & & & & \\ & & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & & & & \\ & & g & \rightarrow & w & & k & & \end{array} & \Bigg| & (f, g) \text{ branchement critique de } (\Sigma_1, \Sigma_2) & \Bigg\}$$

Étape 1. Théorème des paires critiques – version homotopique :

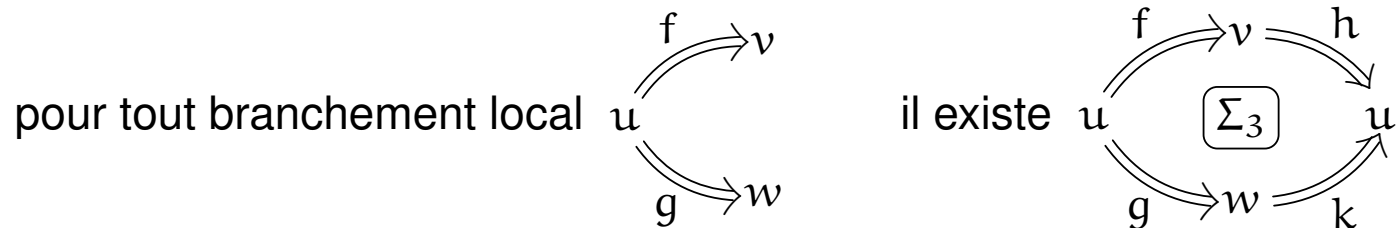
pour tout branchement local $\begin{array}{ccccc} & & f & \rightarrow & v \\ & & \curvearrowright & & \\ u & & & & \\ & & \curvearrowleft & & \\ & & g & \rightarrow & w \end{array}$ il existe $\begin{array}{ccccc} & & f & \rightarrow & v & & h & & \\ & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & & & \\ u & & & & & & & & u' \\ & & \Sigma_3 & & & & & & \\ & & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & & & & \\ & & g & \rightarrow & w & & k & & \end{array}$

1.5. Démonstration de convergent fini \Rightarrow TDF

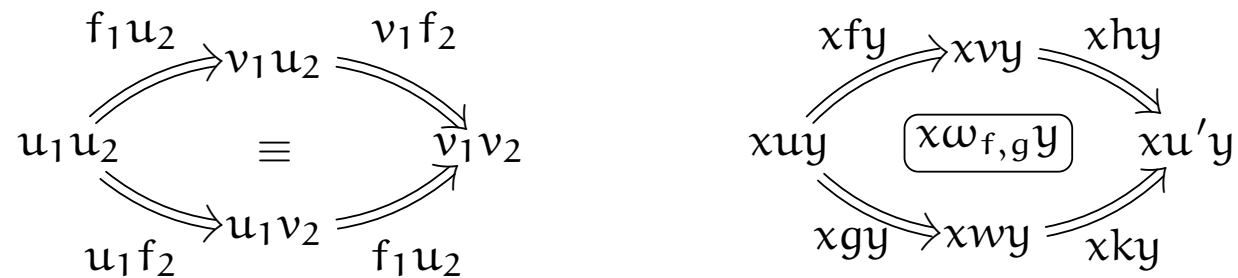
La base d'homotopie : (Σ_1, Σ_2) convergent $\rightsquigarrow \Sigma_3$ base d'homotopie de (Σ_1, Σ_2)



Étape 1. Théorème des paires critiques – version homotopique :



Deux cas :



1.5. Démonstration de convergent fini \Rightarrow TDF

La base d'homotopie : (Σ_1, Σ_2) convergent $\rightsquigarrow \Sigma_3$ base d'homotopie de (Σ_1, Σ_2)

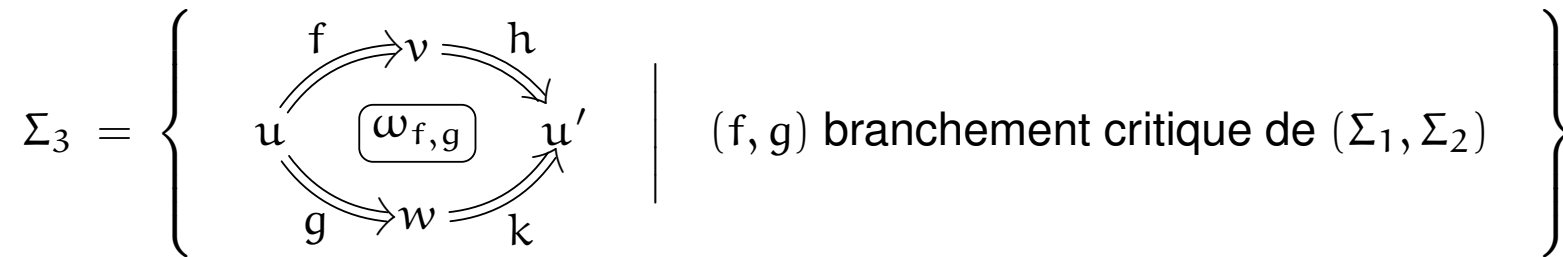
$$\Sigma_3 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & f & \\ u & \xrightarrow{\quad} & v \\ & \omega_{f,g} & \\ & g & \\ & w & \\ & \xrightarrow{\quad} & u' \\ & k & \end{array} & \left| \right. & (f, g) \text{ branchement critique de } (\Sigma_1, \Sigma_2) \end{array} \right\}$$

Étape 2. Lemme de Newman – version homotopique :

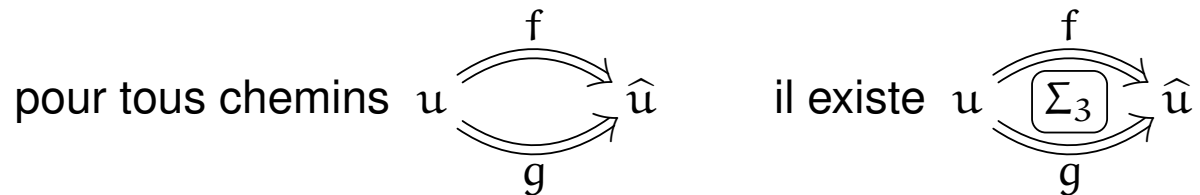
pour tous chemins $u \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} \hat{u}$ il existe $u \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{\Sigma_3} \\ \xrightarrow{g} \end{array} \hat{u}$

1.5. Démonstration de convergent fini \Rightarrow TDF

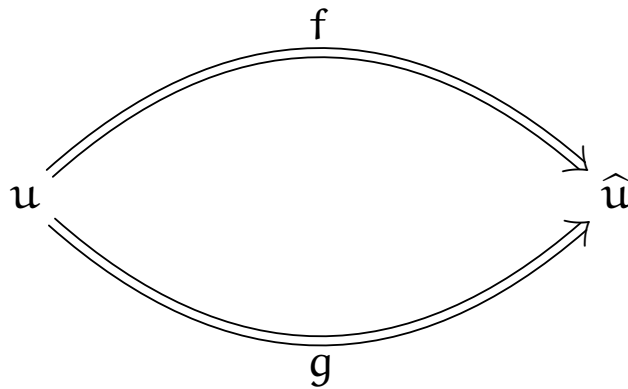
La base d'homotopie : (Σ_1, Σ_2) convergent $\rightsquigarrow \Sigma_3$ base d'homotopie de (Σ_1, Σ_2)



Étape 2. Lemme de Newman – version homotopique :

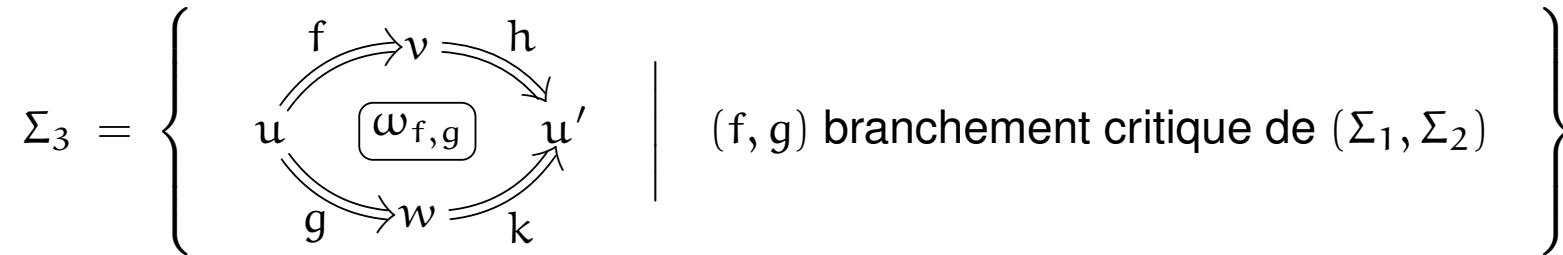


Récurrence noëthérienne :

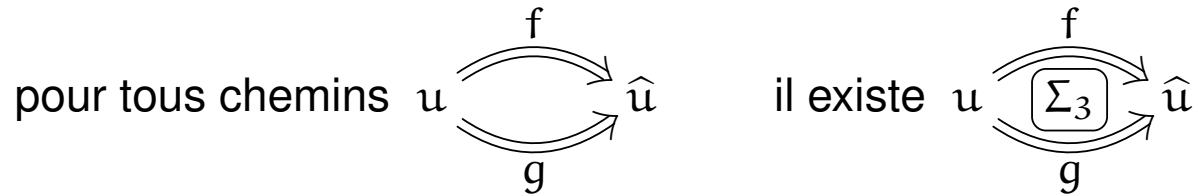


1.5. Démonstration de convergent fini \Rightarrow TDF

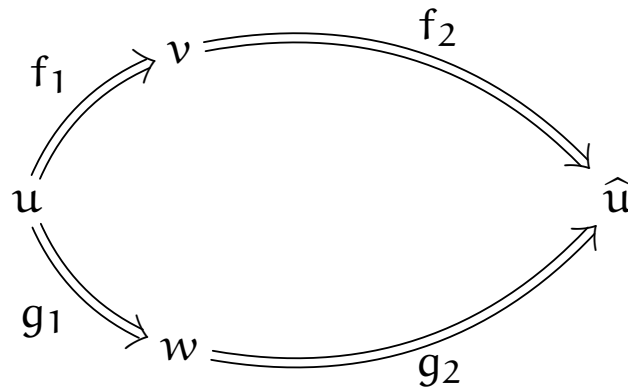
La base d'homotopie : (Σ_1, Σ_2) convergent $\rightsquigarrow \Sigma_3$ base d'homotopie de (Σ_1, Σ_2)



Étape 2. Lemme de Newman – version homotopique :

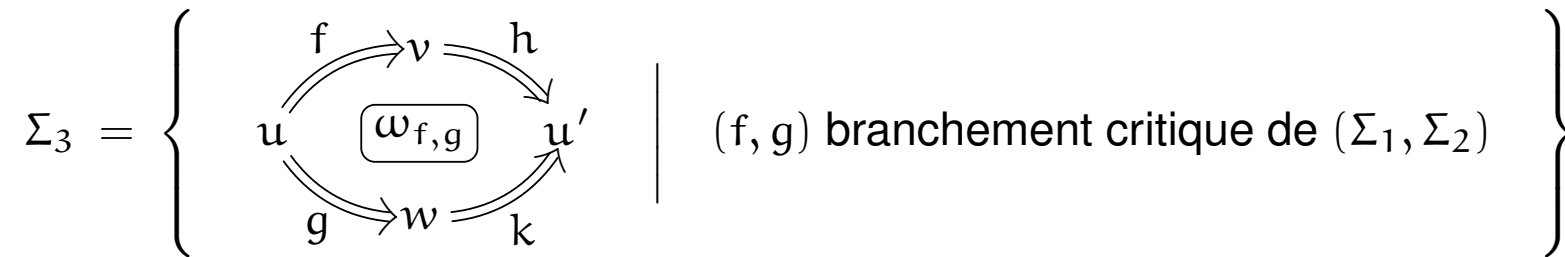


Récurrence noëthérienne :

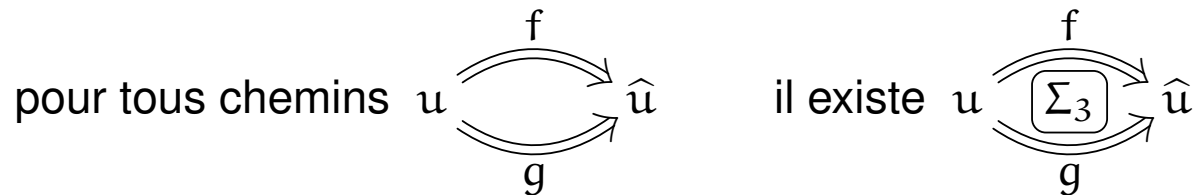


1.5. Démonstration de convergent fini \Rightarrow TDF

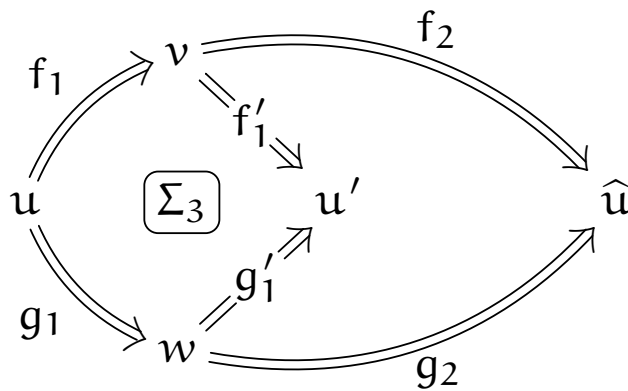
La base d'homotopie : (Σ_1, Σ_2) convergent $\rightsquigarrow \Sigma_3$ base d'homotopie de (Σ_1, Σ_2)



Étape 2. Lemme de Newman – version homotopique :

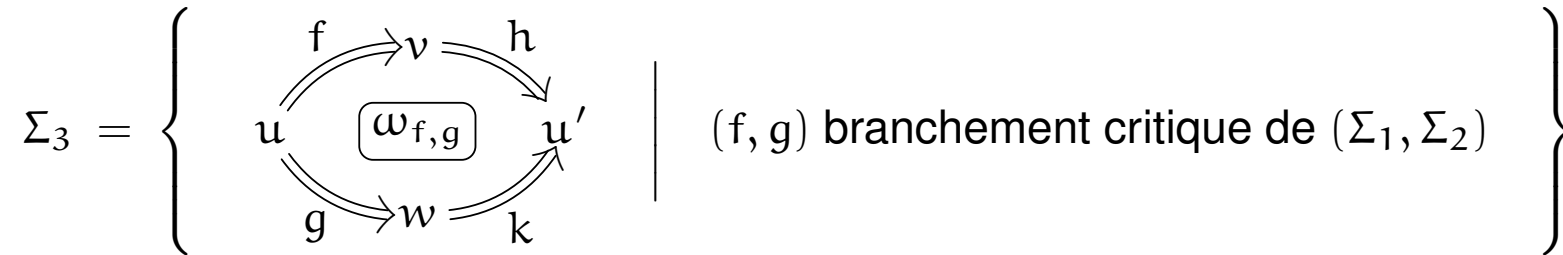


Récurrence noëthérienne :

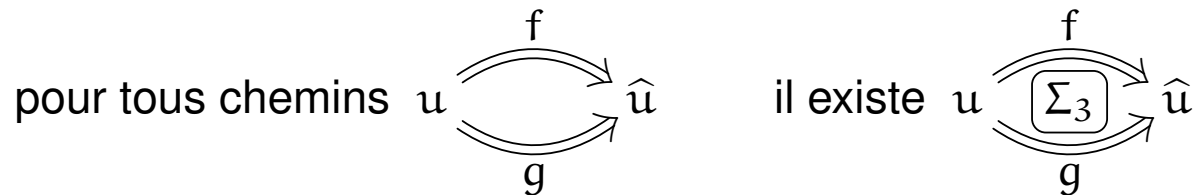


1.5. Démonstration de convergent fini \Rightarrow TDF

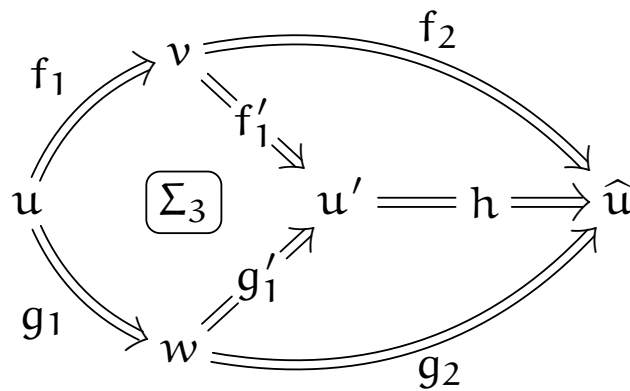
La base d'homotopie : (Σ_1, Σ_2) convergent $\rightsquigarrow \Sigma_3$ base d'homotopie de (Σ_1, Σ_2)



Étape 2. Lemme de Newman – version homotopique :

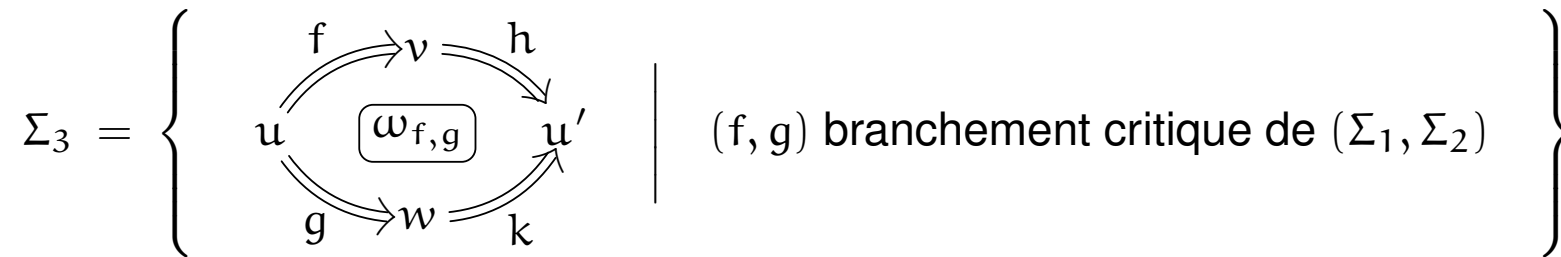


Récurrence noëthérienne :

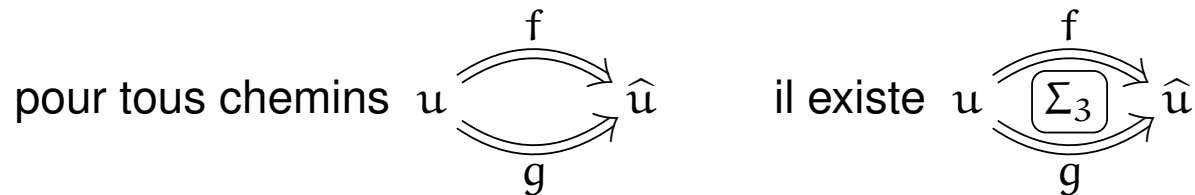


1.5. Démonstration de convergent fini \Rightarrow TDF

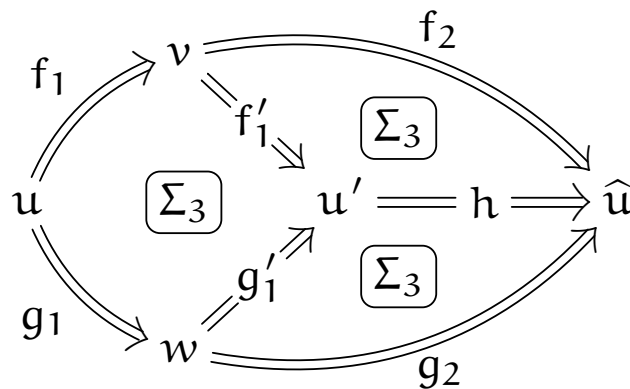
La base d'homotopie : (Σ_1, Σ_2) convergent $\rightsquigarrow \Sigma_3$ base d'homotopie de (Σ_1, Σ_2)



Étape 2. Lemme de Newman – version homotopique :



Récurrence noëthérienne :

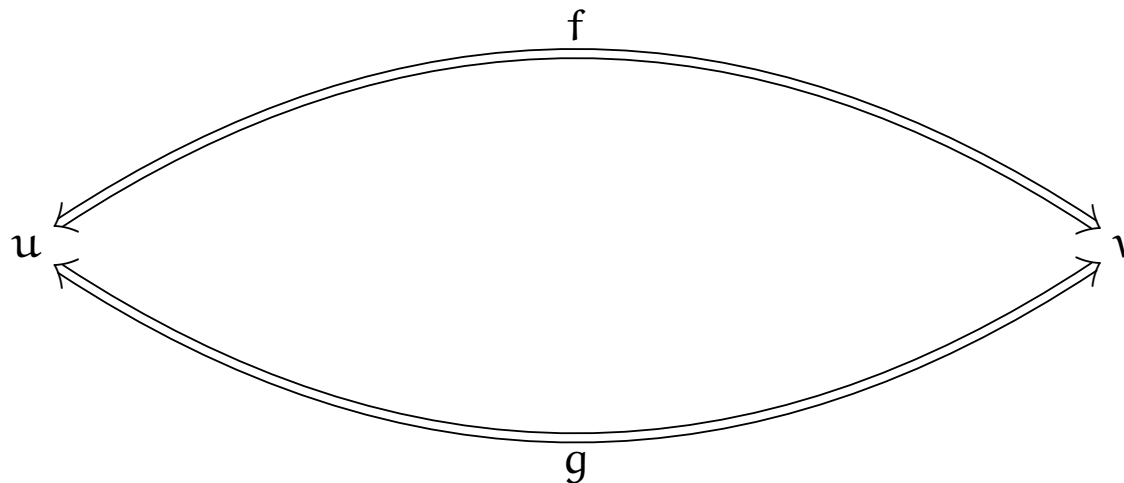


1.5. Démonstration de convergent fini \Rightarrow TDF

La base d'homotopie : (Σ_1, Σ_2) convergent $\rightsquigarrow \Sigma_3$ base d'homotopie de (Σ_1, Σ_2)

$$\Sigma_3 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & f & \\ u & \xrightarrow{\quad} & v \\ & g & \\ & w & \\ & & u' \end{array} & \left| \right. & (f, g) \text{ branchement critique de } (\Sigma_1, \Sigma_2) \\ \begin{array}{ccc} & h & \\ & \searrow & \\ & & u' \\ & \nearrow & \\ & k & \end{array} & & \end{array} \right\}$$

Étape 3. Fin de la démonstration :

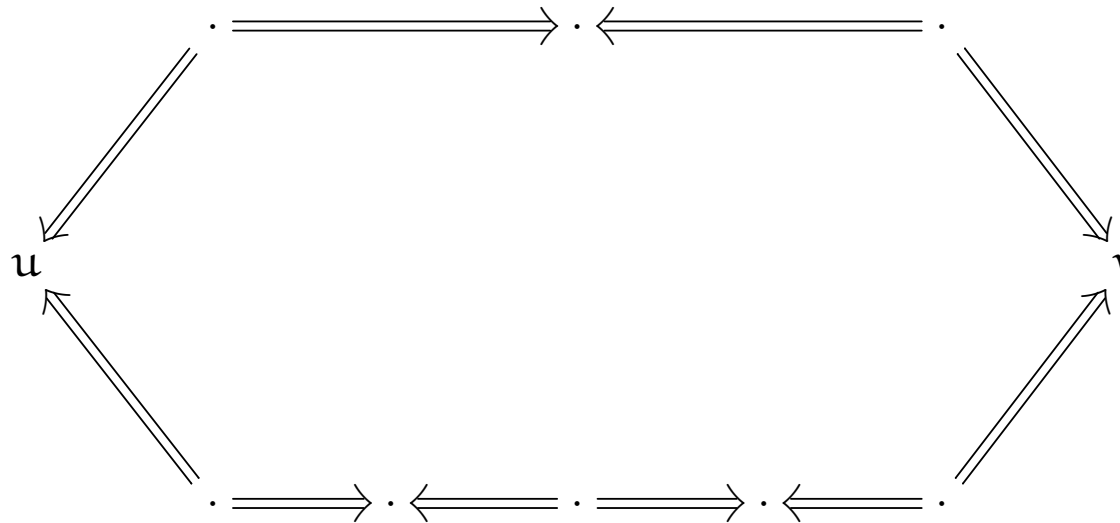


1.5. Démonstration de convergent fini \Rightarrow TDF

La base d'homotopie : (Σ_1, Σ_2) convergent $\rightsquigarrow \Sigma_3$ base d'homotopie de (Σ_1, Σ_2)

$$\Sigma_3 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & f & \\ u & \xrightarrow{\quad} & v \\ & g & \\ & w & \\ & & u' \end{array} & \left| \right. & (f, g) \text{ branchement critique de } (\Sigma_1, \Sigma_2) \\ \begin{array}{ccc} & h & \\ & \xrightarrow{\quad} & \\ & k & \\ & & \end{array} \end{array} \right\}$$

Étape 3. Fin de la démonstration :

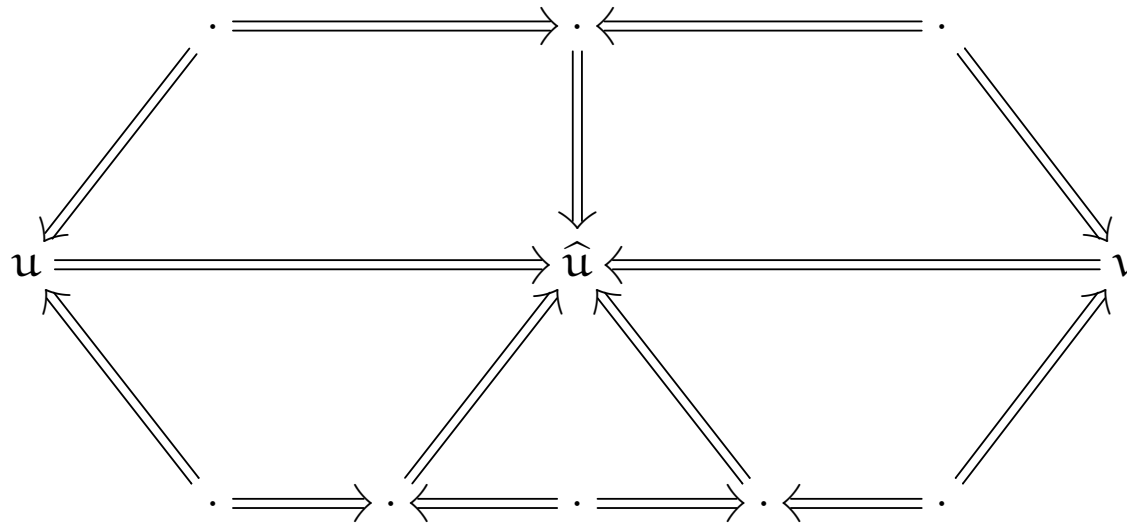


1.5. Démonstration de convergent fini \Rightarrow TDF

La base d'homotopie : (Σ_1, Σ_2) convergent $\rightsquigarrow \Sigma_3$ base d'homotopie de (Σ_1, Σ_2)

$$\Sigma_3 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & f & \\ u & \xrightarrow{\quad} & v \\ & \omega_{f,g} & \\ & g & \\ & w & \\ & & u' \end{array} & \Big| & (f, g) \text{ branchement critique de } (\Sigma_1, \Sigma_2) \end{array} \right\}$$

Étape 3. Fin de la démonstration :

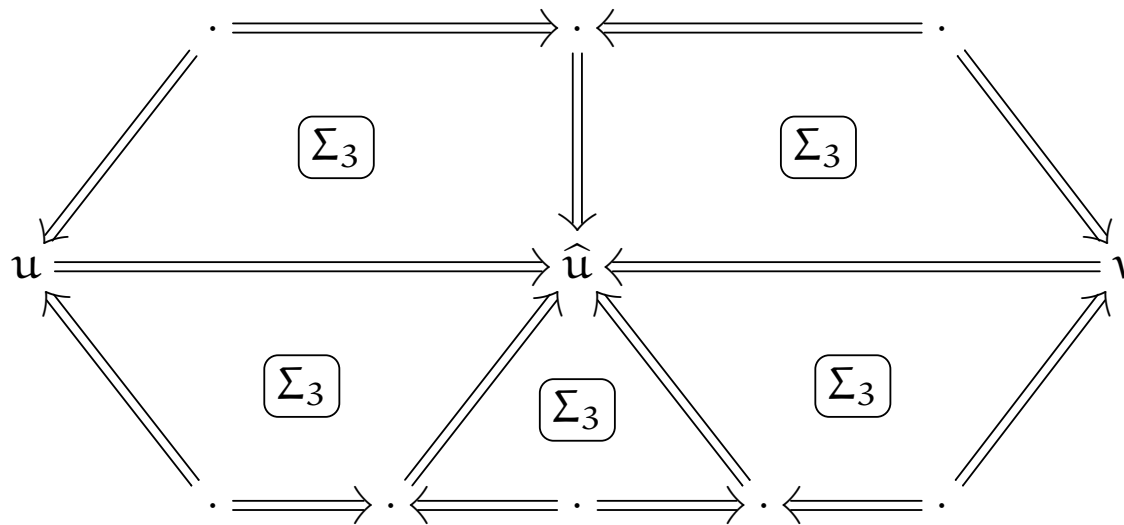


1.5. Démonstration de convergent fini \Rightarrow TDF

La base d'homotopie : (Σ_1, Σ_2) convergent $\rightsquigarrow \Sigma_3$ base d'homotopie de (Σ_1, Σ_2)

$$\Sigma_3 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & f & \\ u & \xrightarrow{\quad} & v \\ & \omega_{f,g} & \\ & g & \\ & w & \\ & & u' \end{array} & \Big| & (f, g) \text{ branchement critique de } (\Sigma_1, \Sigma_2) \end{array} \right\}$$

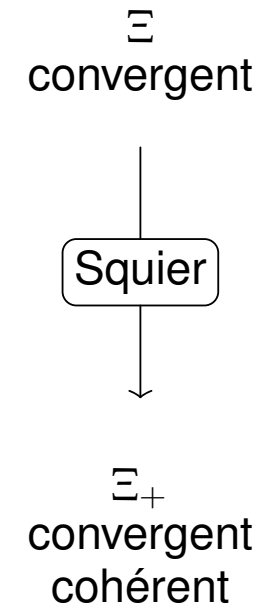
Étape 3. Fin de la démonstration :



2. Calcul de présentations cohérentes

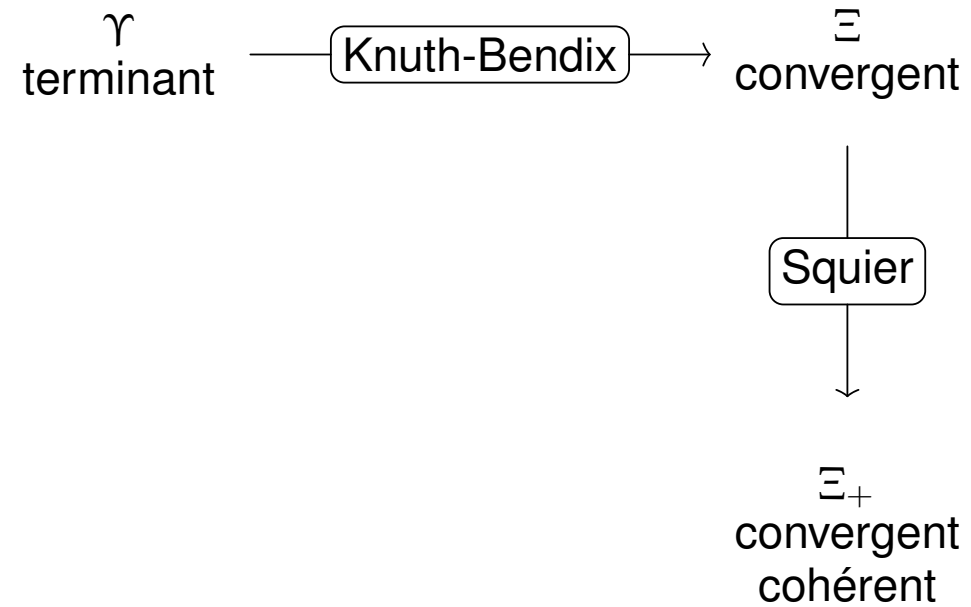
2.1. La procédure de complétion-réduction homotopique

Schéma de fonctionnement général :



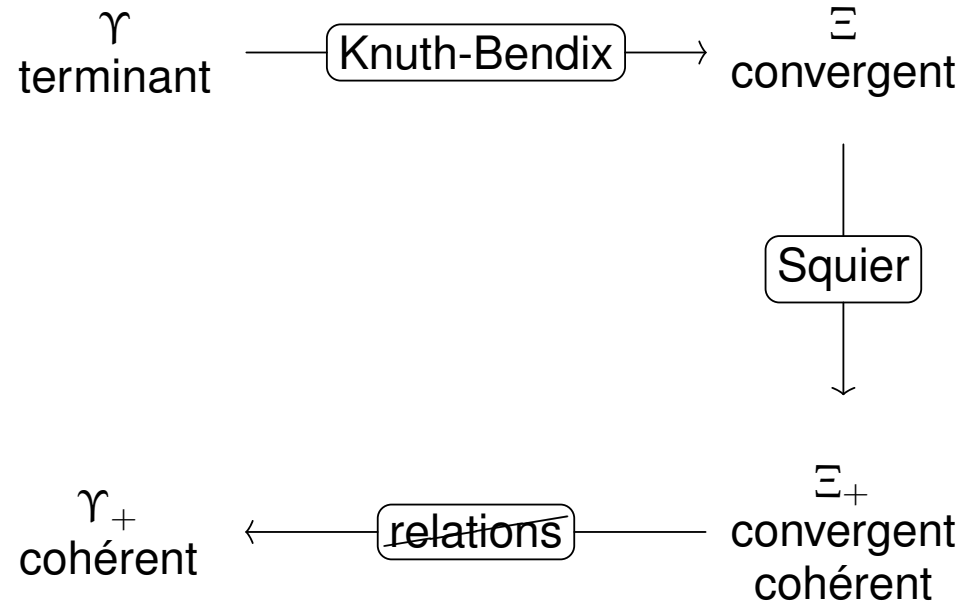
2.1. La procédure de complétion-réduction homotopique

Schéma de fonctionnement général :



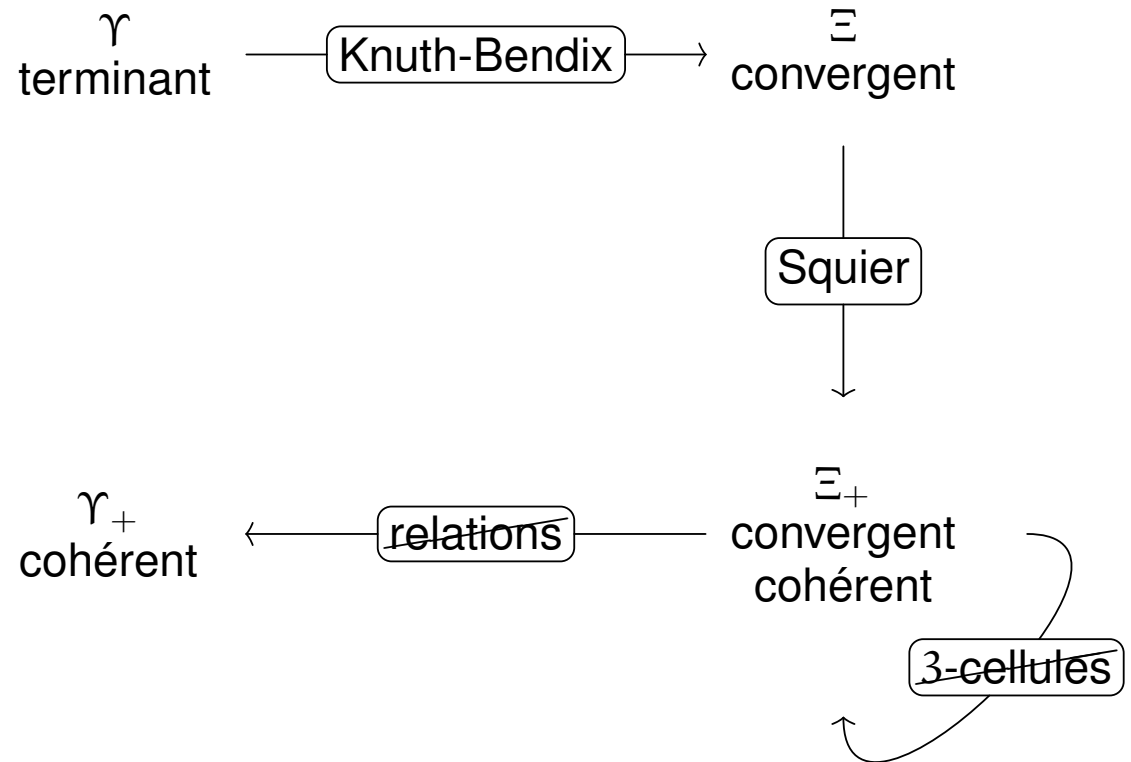
2.1. La procédure de complétion-réduction homotopique

Schéma de fonctionnement général :



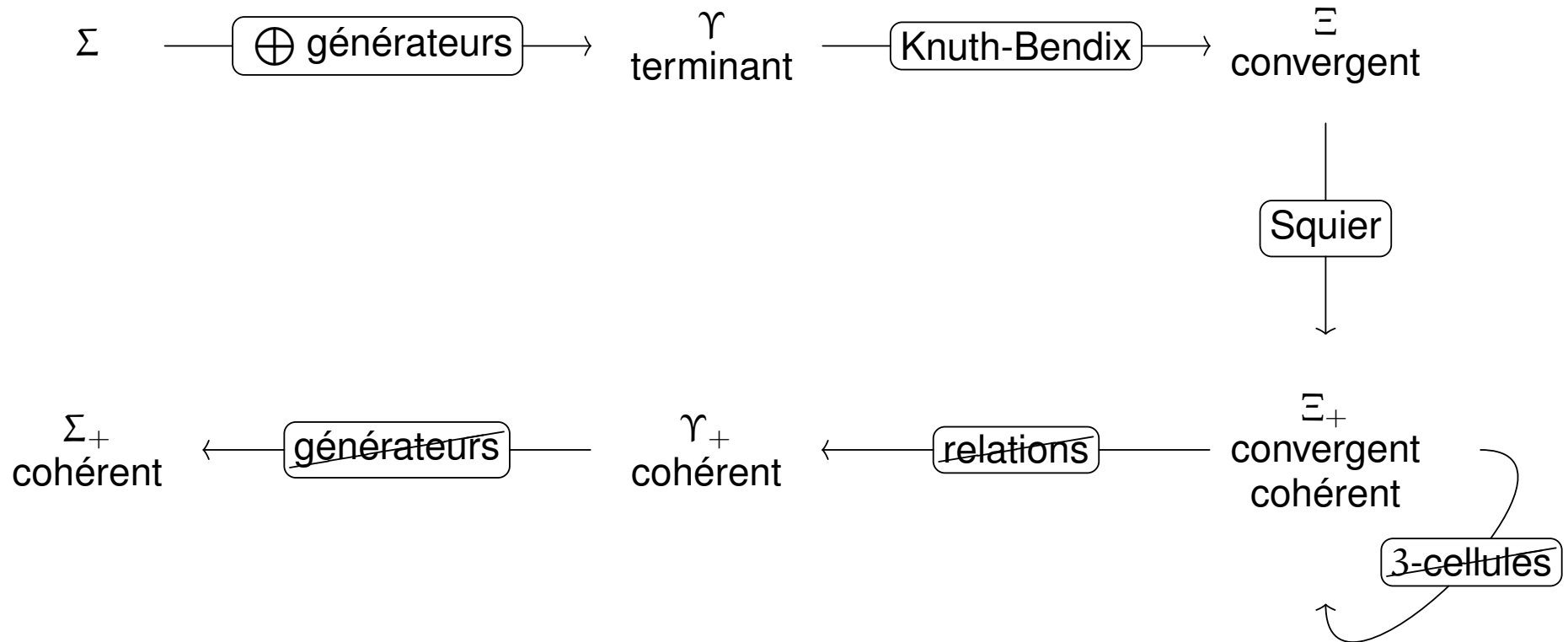
2.1. La procédure de complétion-réduction homotopique

Schéma de fonctionnement général :



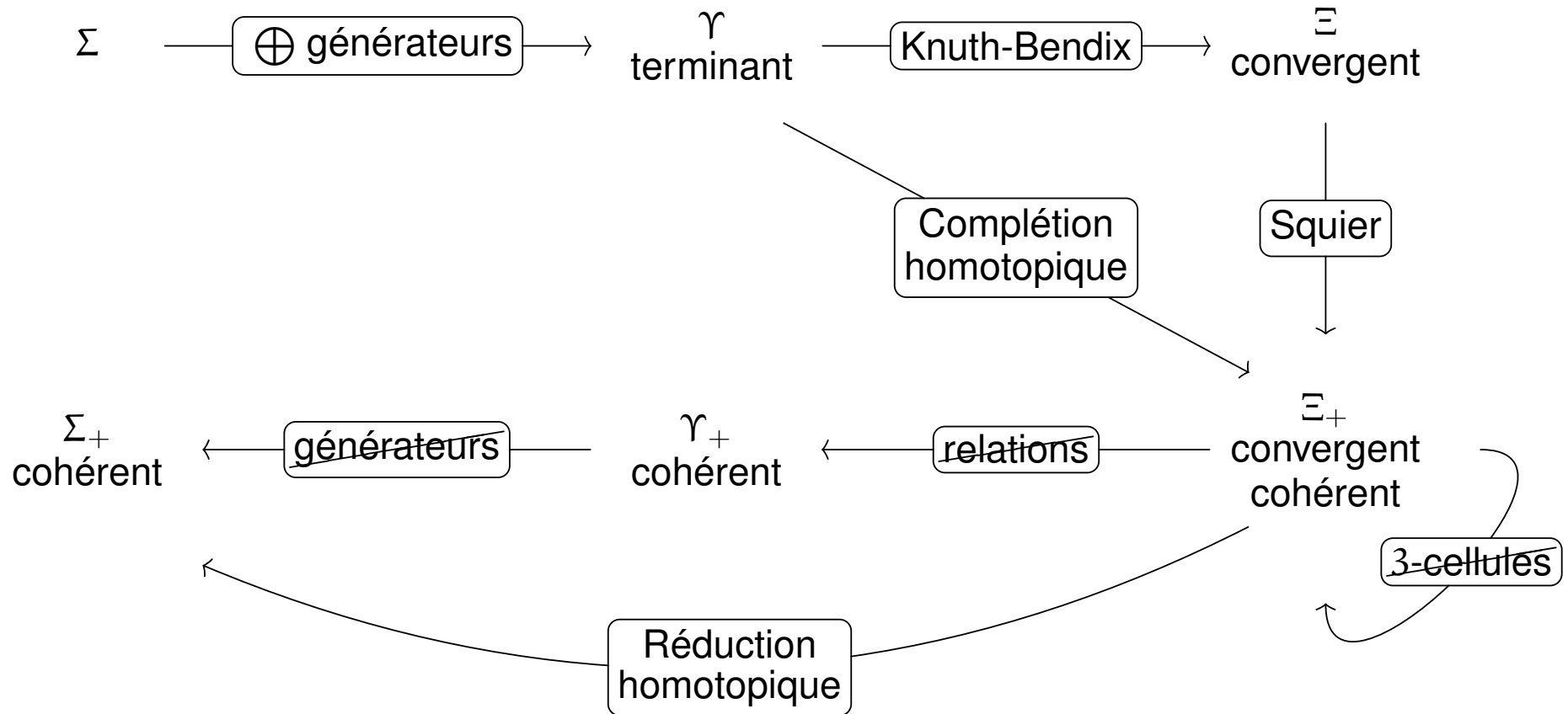
2.1. La procédure de complétion-réduction homotopique

Schéma de fonctionnement général :



2.1. La procédure de complétion-réduction homotopique

Schéma de fonctionnement général :



Réf. : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Gaussent-G.-Malbos, } \textit{Coherent presentations of Artin monoids}, 2014 \\ \text{G.-Malbos-Mimram, } \textit{A homotopical completion procedure}, 2013 \end{array} \right.$

2.2. Complétion homotopique

Complétion homotopique : Σ terminant \longrightarrow Knuth-Bendix
+
Squier \longrightarrow $\mathcal{S}(\Sigma)$ convergent et cohérent

Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $\Sigma = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

2.2. Complétion homotopique

Complétion homotopique : Σ terminant \longrightarrow Knuth-Bendix
+
Squier \longrightarrow $\mathcal{S}(\Sigma)$ convergent et cohérent

Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $\Sigma = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

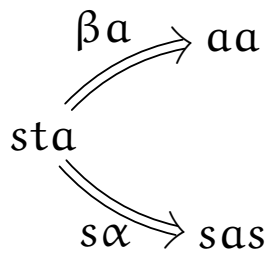
$$\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$$

2.2. Complétion homotopique

Complétion homotopique : Σ terminant \longrightarrow Knuth-Bendix
+
Squier \longrightarrow $\mathcal{S}(\Sigma)$ convergent et cohérent

Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $\Sigma = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$$

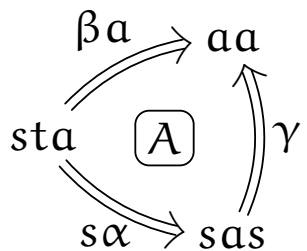


2.2. Complétion homotopique

Complétion homotopique : Σ terminant \longrightarrow Knuth-Bendix
+
Squier \longrightarrow $\mathcal{S}(\Sigma)$ convergent et cohérent

Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $\Sigma = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa \mid A \rangle$$

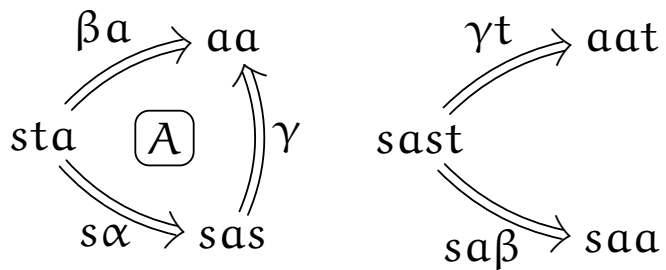


2.2. Complétion homotopique

Complétion homotopique : Σ terminant \longrightarrow Knuth-Bendix
+
Squier \longrightarrow $\mathcal{S}(\Sigma)$ convergent et cohérent

Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $\Sigma = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa \mid A \rangle$$

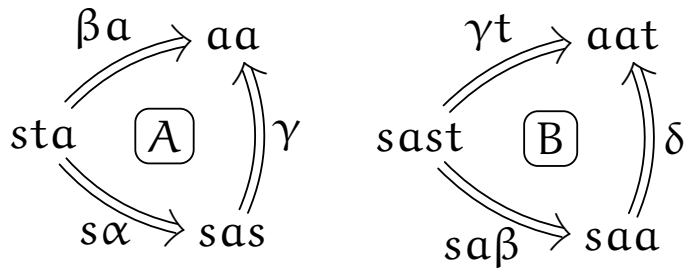


2.2. Complétion homotopique

Complétion homotopique : Σ terminant \longrightarrow Knuth-Bendix
+
Squier \longrightarrow $\mathcal{S}(\Sigma)$ convergent et cohérent

Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $\Sigma = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B \rangle$$

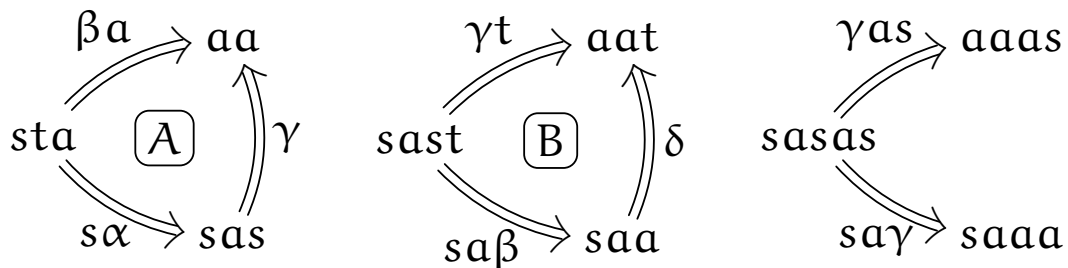


2.2. Complétion homotopique

Complétion homotopique : Σ terminant \longrightarrow Knuth-Bendix
+
Squier \longrightarrow $\mathcal{S}(\Sigma)$ convergent et cohérent

Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $\Sigma = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B \rangle$$

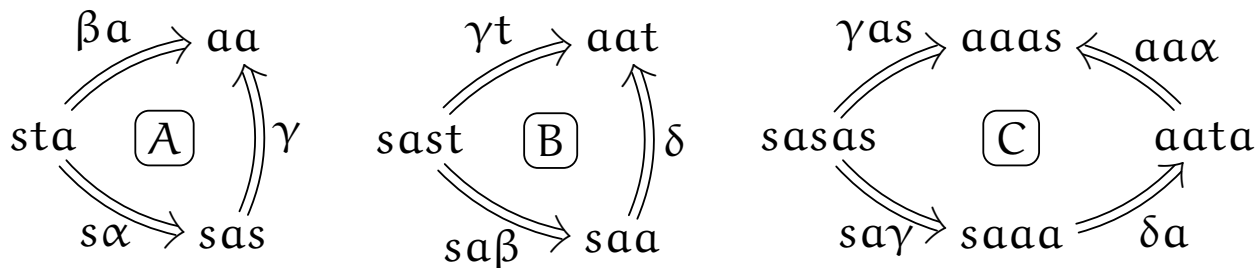


2.2. Complétion homotopique

Complétion homotopique : Σ terminant \longrightarrow Knuth-Bendix
+
Squier \longrightarrow $\mathcal{S}(\Sigma)$ convergent et cohérent

Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $\Sigma = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C \rangle$$

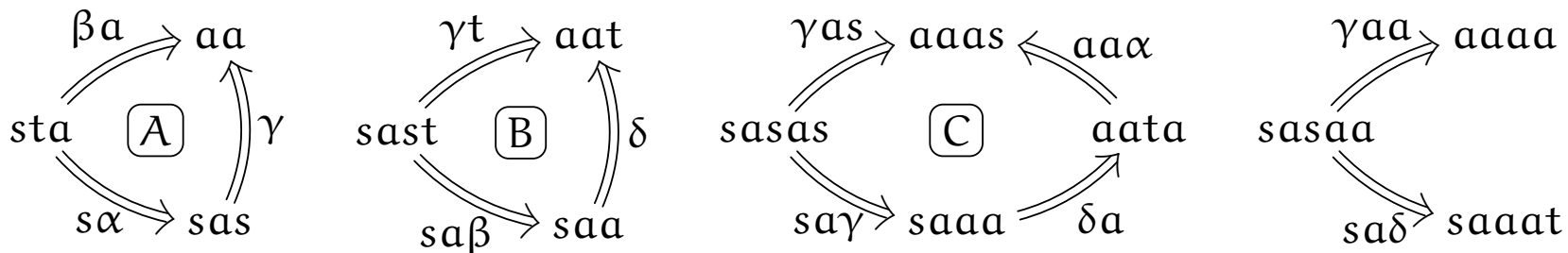


2.2. Complétion homotopique

Complétion homotopique : Σ terminant $\xrightarrow{\text{Knuth-Bendix} + \text{Squier}}$ $\mathcal{S}(\Sigma)$ convergent et cohérent

Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $\Sigma = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C$

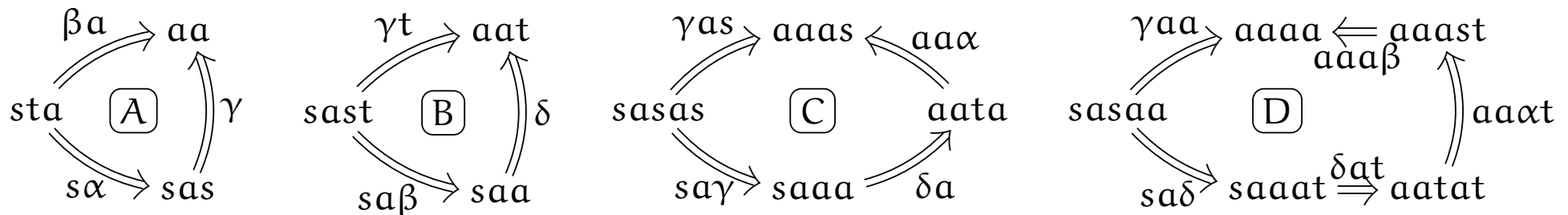


2.2. Complétion homotopique

Complétion homotopique : Σ terminant $\xrightarrow{\text{Knuth-Bendix} + \text{Squier}}$ $\mathcal{S}(\Sigma)$ convergent et cohérent

Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $\Sigma = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C, D$

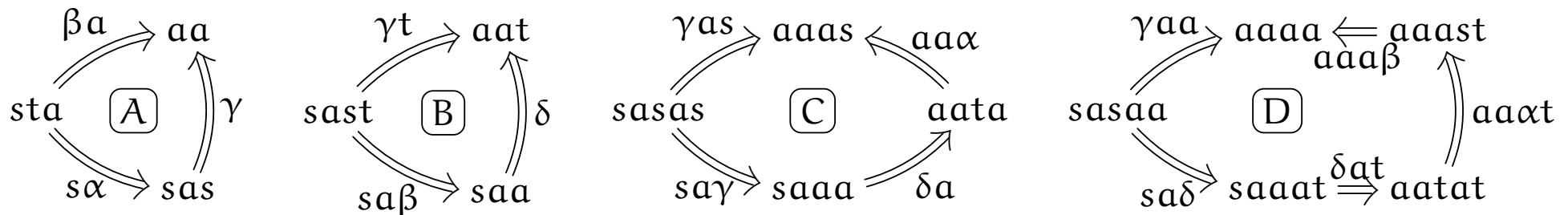


2.2. Complétion homotopique

Complétion homotopique : Σ terminant $\xrightarrow{\text{Knuth-Bendix} + \text{Squier}}$ $\mathcal{S}(\Sigma)$ convergent et cohérent

Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $\Sigma = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C, D \rangle$$



Proposition [G.-Malbos-Mimram 13] : $\mathcal{S}(\Sigma)$ est une présentation cohérente de B_3^+ .

2.3. Réduction homotopique (1)

Réduction homotopique en dimension 3 :

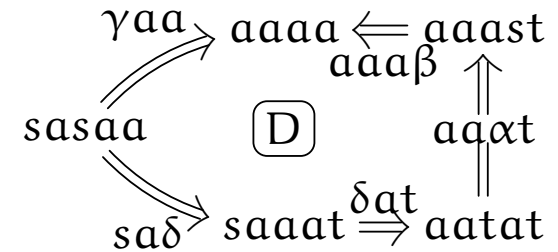
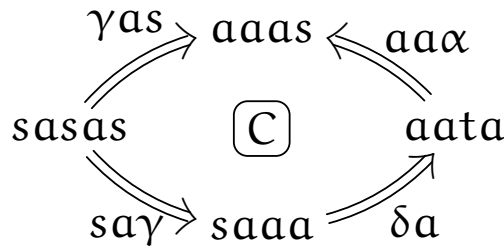
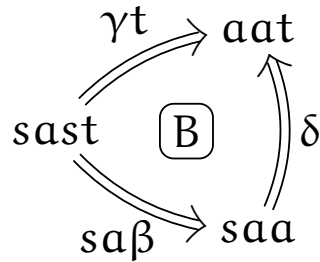
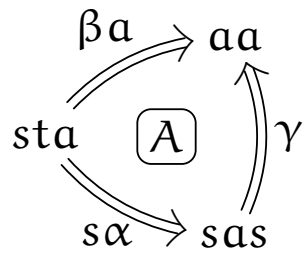
triples branchements critiques \rightsquigarrow relations entre les 3-cellules

2.3. Réduction homotopique (1)

Réduction homotopique en dimension 3 :

triples branchements critiques \rightsquigarrow relations entre les 3-cellules

Exemple : $\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C, D \rangle$

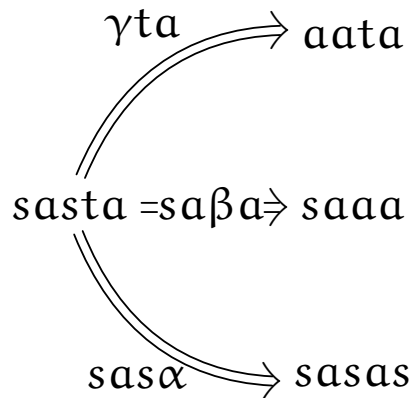
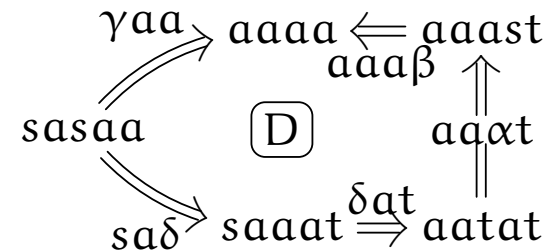
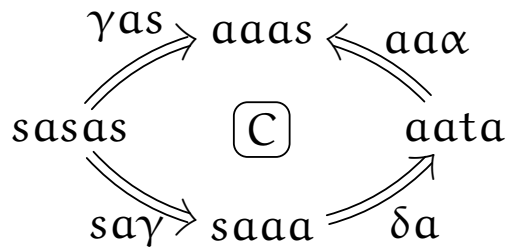
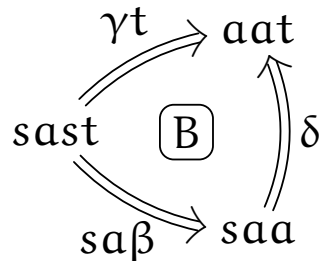
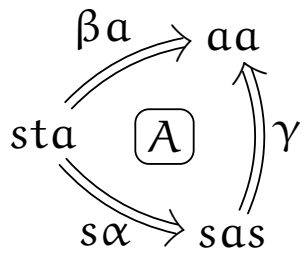


2.3. Réduction homotopique (1)

Réduction homotopique en dimension 3 :

triples branchements critiques \rightsquigarrow relations entre les 3-cellules

Exemple : $\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C, D \rangle$

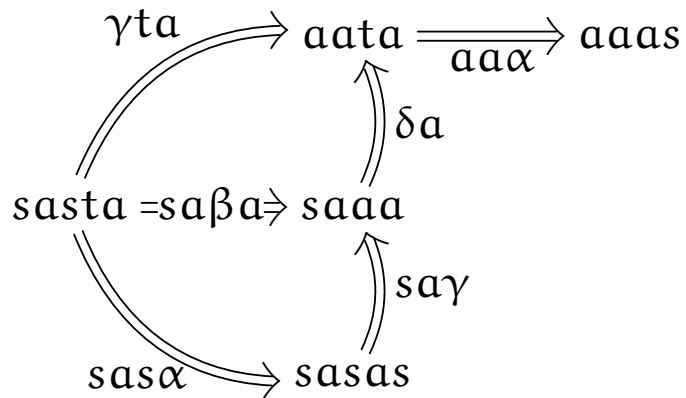
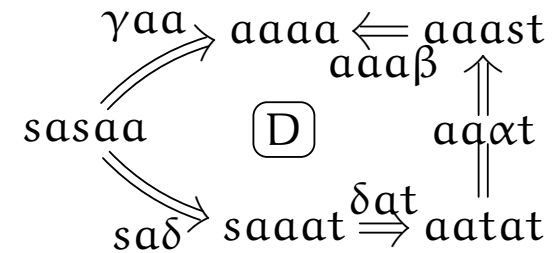
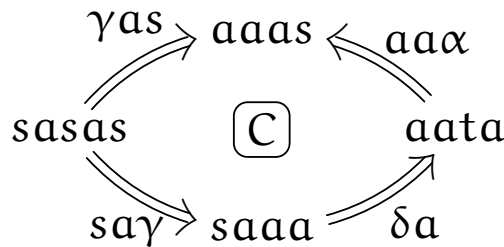
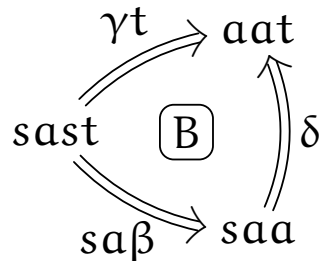
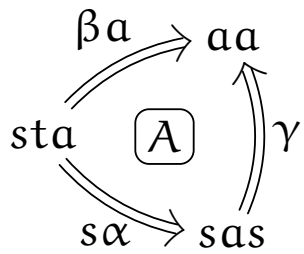


2.3. Réduction homotopique (1)

Réduction homotopique en dimension 3 :

triples branchements critiques \rightsquigarrow relations entre les 3-cellules

Exemple : $\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C, D \rangle$

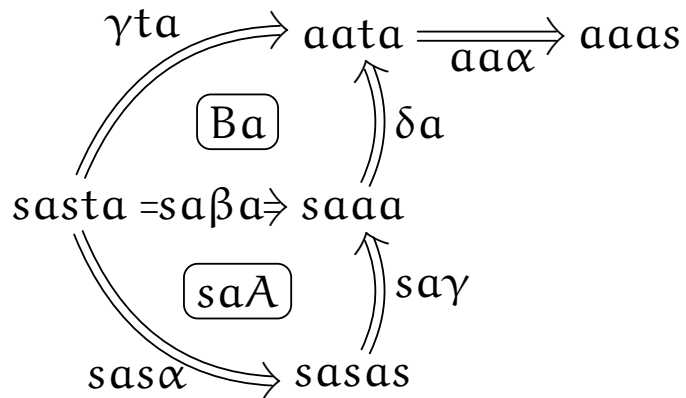
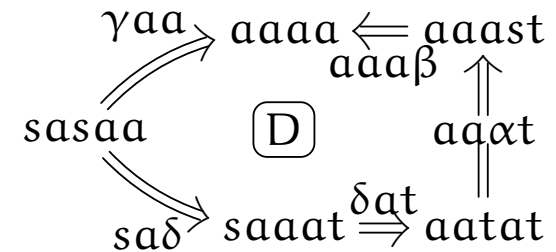
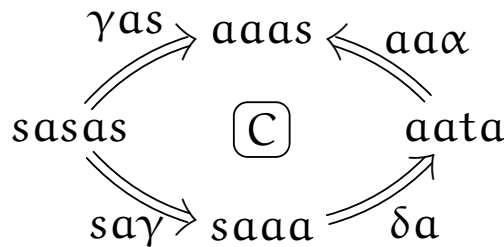
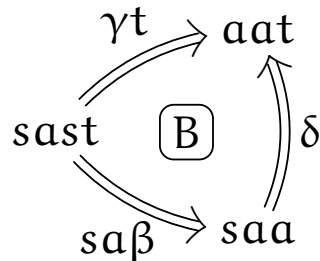
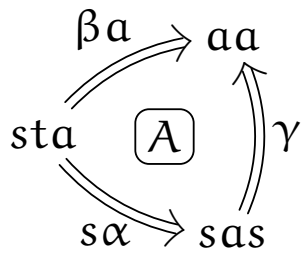


2.3. Réduction homotopique (1)

Réduction homotopique en dimension 3 :

triples branchements critiques \rightsquigarrow relations entre les 3-cellules

Exemple : $\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C, D \rangle$

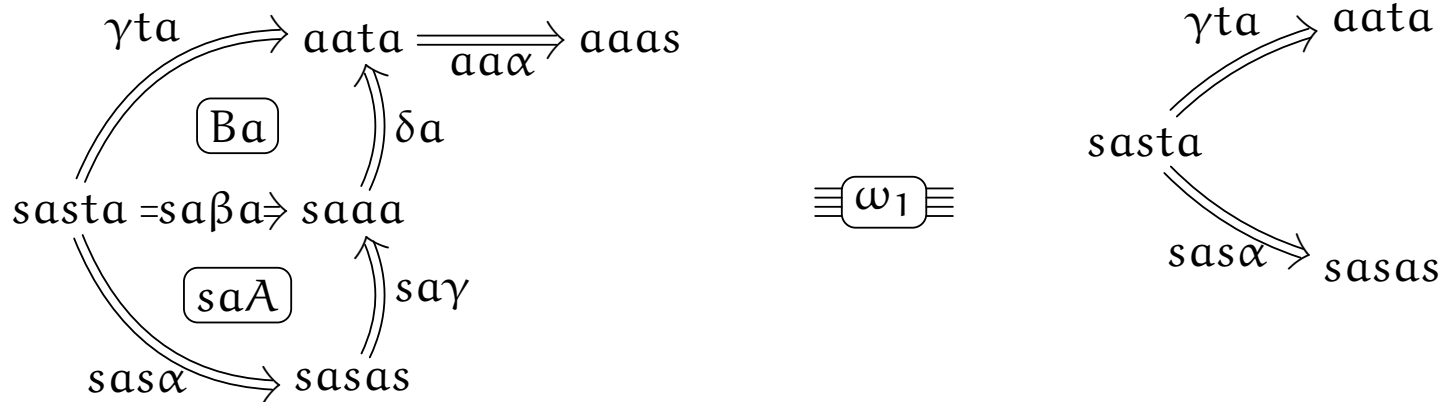
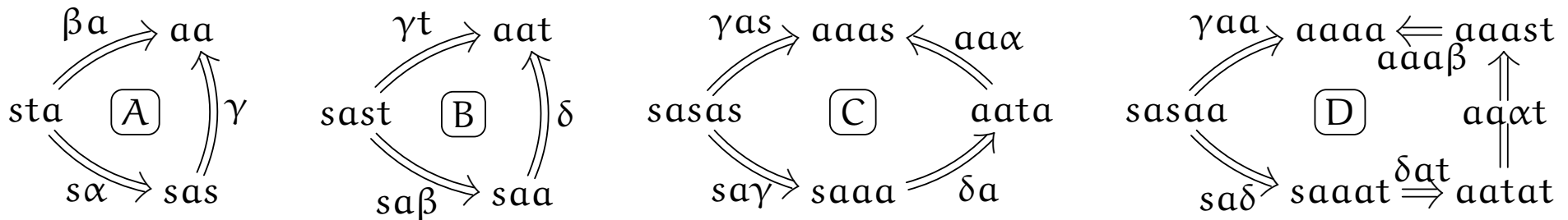


2.3. Réduction homotopique (1)

Réduction homotopique en dimension 3 :

triples branchements critiques \rightsquigarrow relations entre les 3-cellules

Exemple : $\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C, D \rangle$

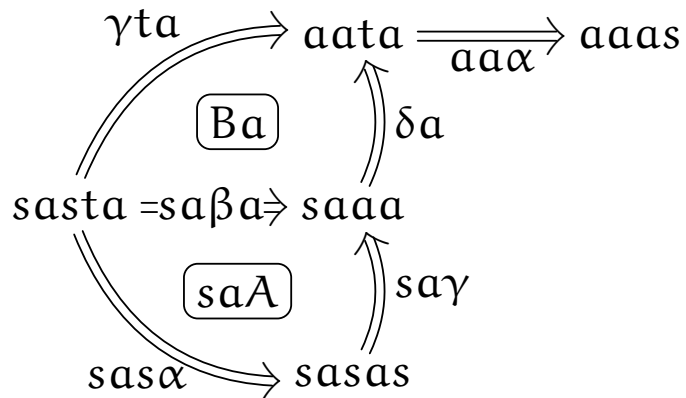
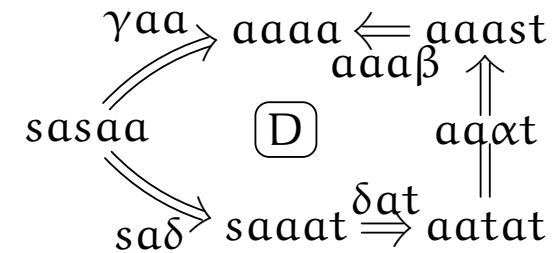
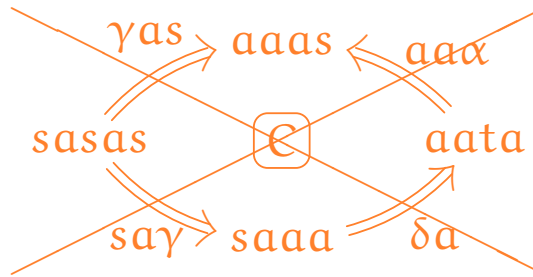
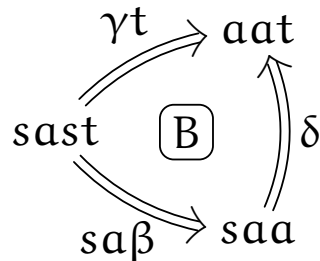
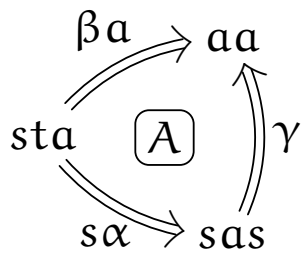


2.3. Réduction homotopique (1)

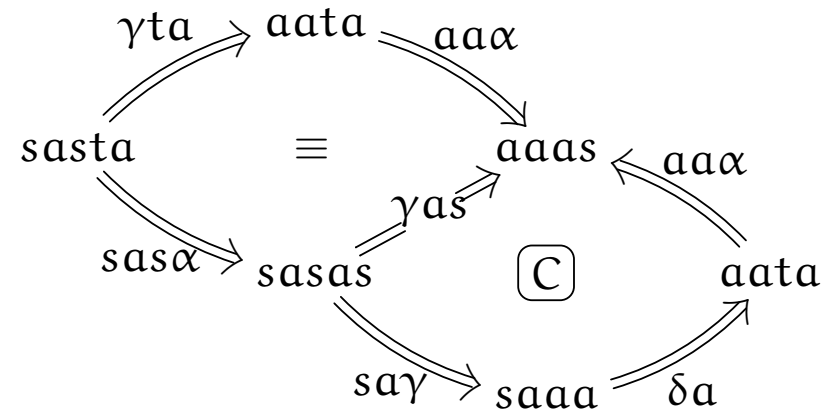
Réduction homotopique en dimension 3 :

triples branchements critiques \rightsquigarrow relations entre les 3-cellules

Exemple : $\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, \cancel{C}, D \rangle$



$\equiv \omega_1 \equiv$

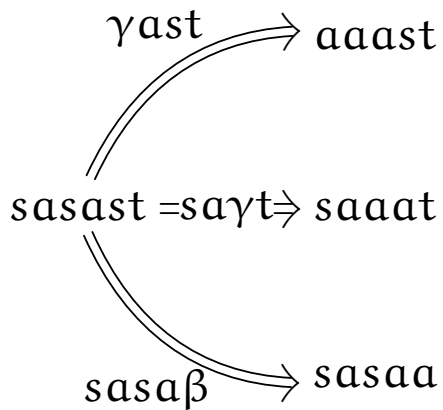
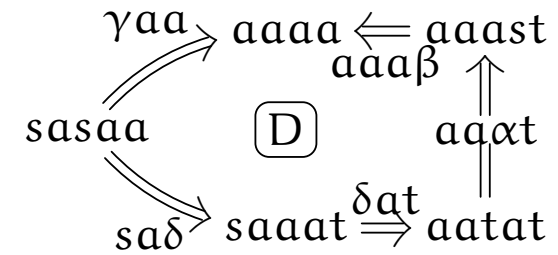
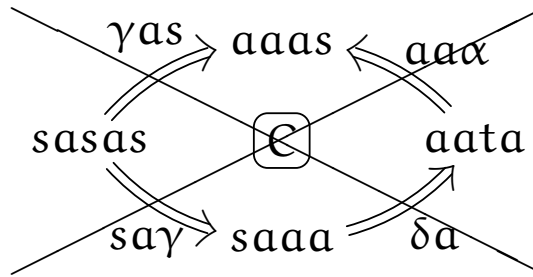
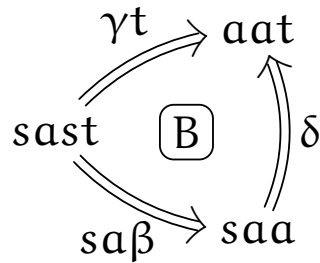
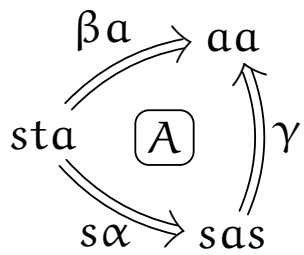


2.3. Réduction homotopique (1)

Réduction homotopique en dimension 3 :

triples branchements critiques \rightsquigarrow relations entre les 3-cellules

Exemple : $\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, \cancel{C}, D \rangle$

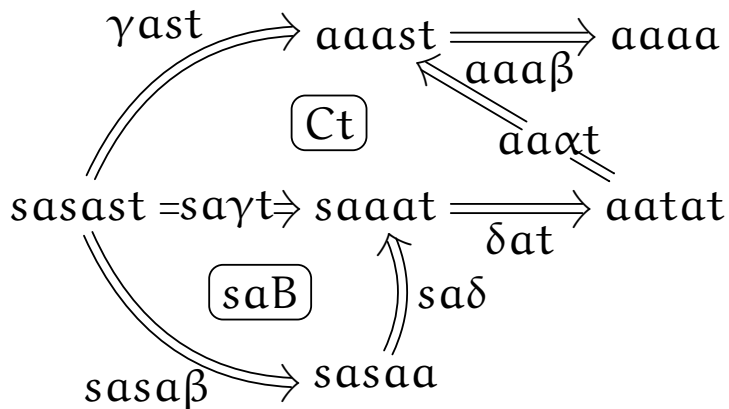
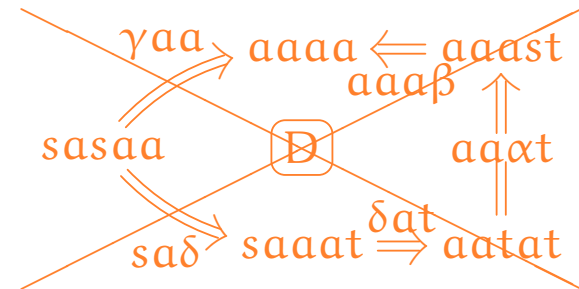
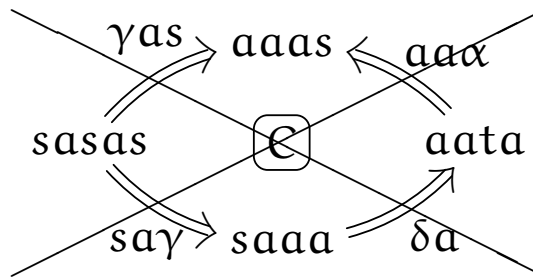
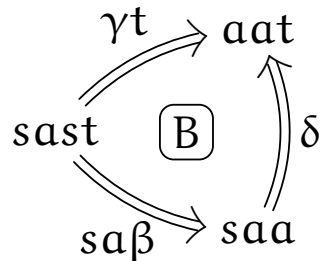
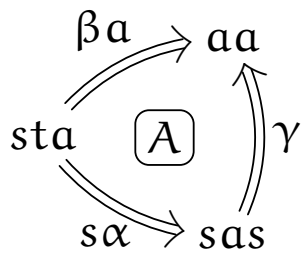


2.3. Réduction homotopique (1)

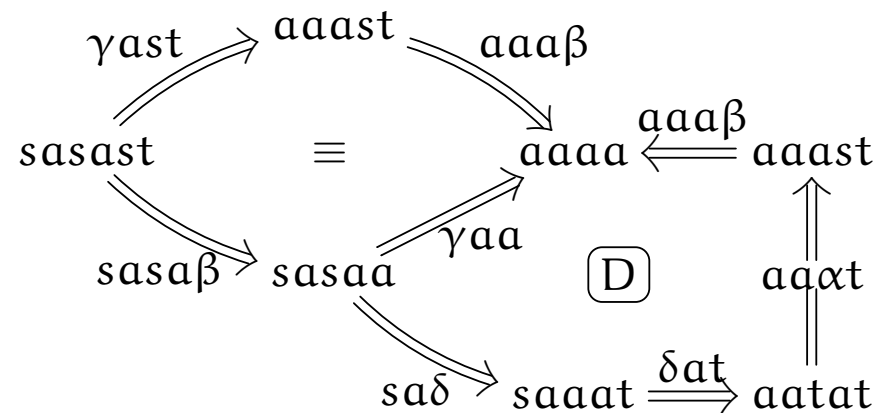
Réduction homotopique en dimension 3 :

triples branchements critiques \rightsquigarrow relations entre les 3-cellules

Exemple : $\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, \cancel{C}, \cancel{D} \rangle$



$\equiv \omega_2 \equiv$



2.4. Réduction homotopique (2)

Réduction homotopique en

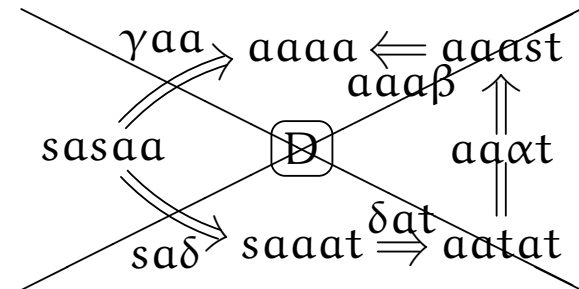
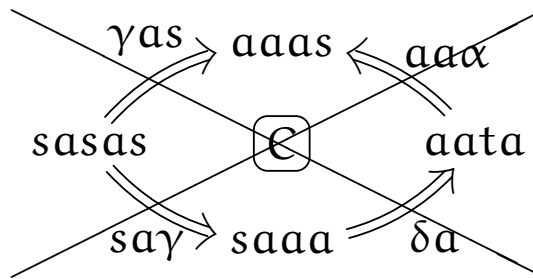
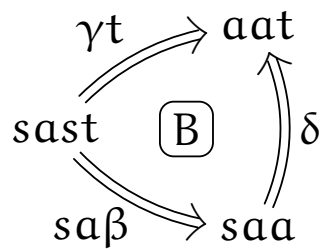
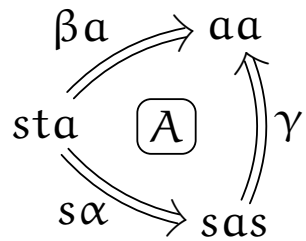
- dimension 2 : élimination des relations et 3-cellules ajoutées par la complétion
- dimension 1 : élimination des générateurs et relations redondants

2.4. Réduction homotopique (2)

Réduction homotopique en

- dimension 2 : élimination des relations et 3-cellules ajoutées par la complétion
- dimension 1 : élimination des générateurs et relations redondants

Exemple : $\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, \cancel{C}, \cancel{D} \rangle$

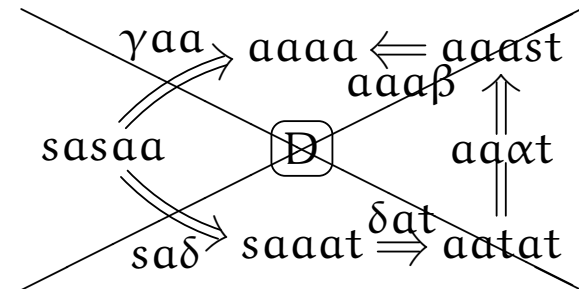
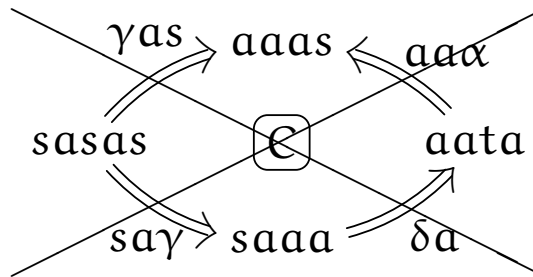
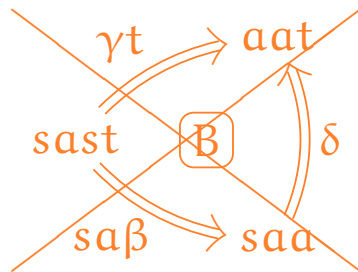
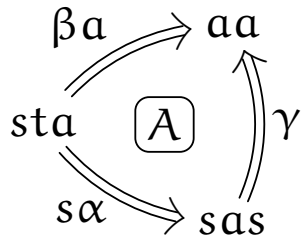


2.4. Réduction homotopique (2)

Réduction homotopique en

- dimension 2 : élimination des relations et 3-cellules ajoutées par la complétion
- dimension 1 : élimination des générateurs et relations redondants

Exemple : $\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, \cancel{saa \xrightarrow{\delta} aat} \mid A, \cancel{B}, \cancel{C}, \cancel{D} \rangle$

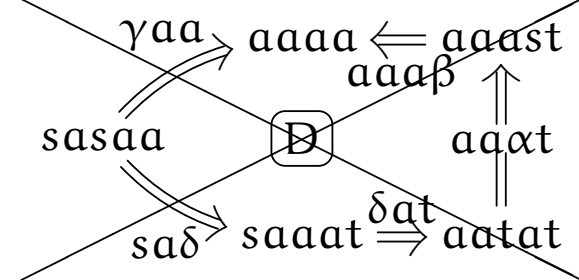
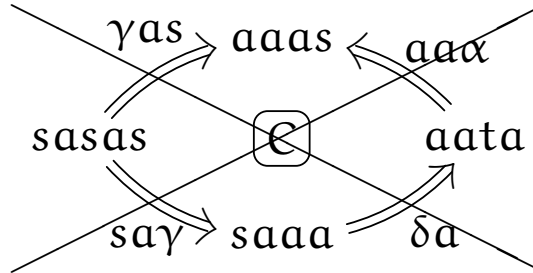
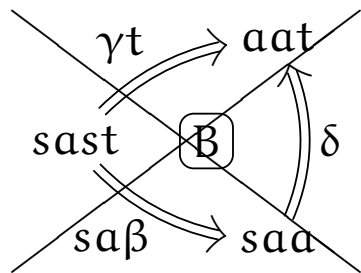
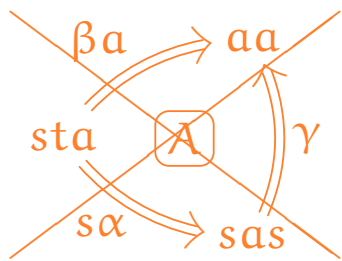


2.4. Réduction homotopique (2)

Réduction homotopique en

- dimension 2 : élimination des relations et 3-cellules ajoutées par la complétion
- dimension 1 : élimination des générateurs et relations redondants

Exemple : $\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, \cancel{sas \xrightarrow{\gamma} aa}, \cancel{saa \xrightarrow{\delta} aat} \mid \cancel{A}, \cancel{B}, \cancel{C}, \cancel{D} \rangle$

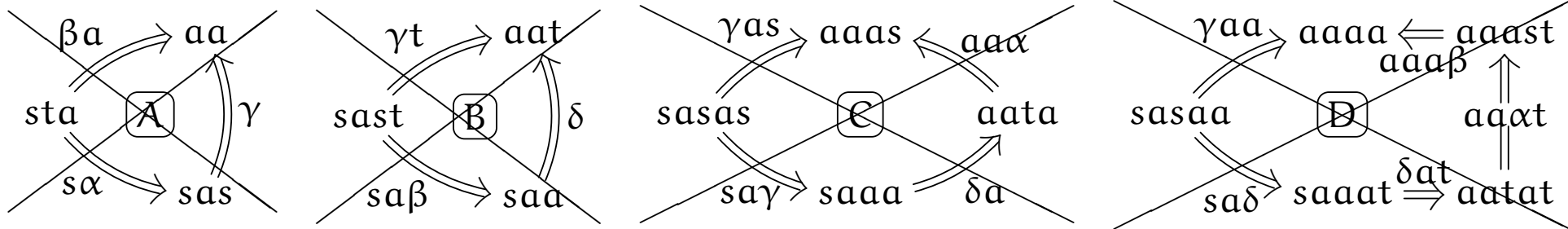


2.4. Réduction homotopique (2)

Réduction homotopique en

- dimension 2 : élimination des relations et 3-cellules ajoutées par la complétion
- dimension 1 : élimination des générateurs et relations redondants

Exemple : $S(\Sigma) = \langle s, t, \cancel{\alpha} \mid \text{tst} \xrightarrow{\alpha} \text{sts}, \text{st} \xrightarrow{\beta} \text{a}, \text{sas} \xrightarrow{\gamma} \text{aa}, \text{saa} \xrightarrow{\delta} \text{aat} \mid \cancel{\mathbb{A}}, \cancel{\mathbb{B}}, \cancel{\mathbb{C}}, \cancel{\mathbb{D}} \rangle$

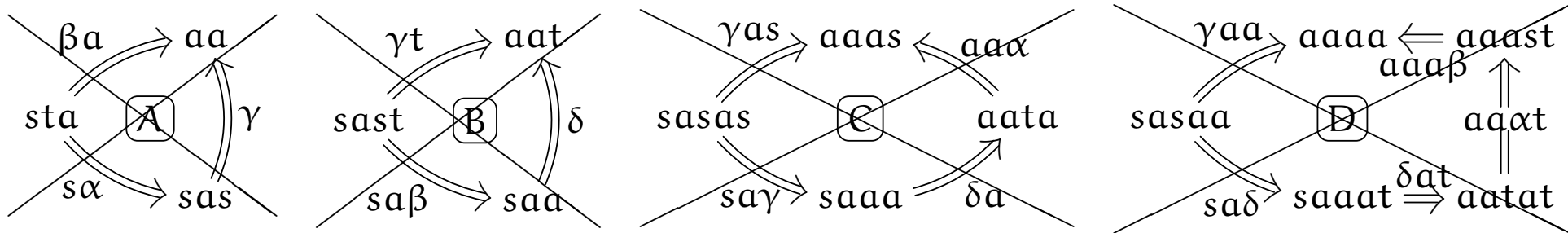


2.4. Réduction homotopique (2)

Réduction homotopique en

- dimension 2 : élimination des relations et 3-cellules ajoutées par la complétion
- dimension 1 : élimination des générateurs et relations redondants

Exemple : $S(\Sigma) = \langle s, t, \alpha \mid \text{tst} \xrightarrow{\alpha} \text{sts}, \text{st} \xrightarrow{\beta} a, \text{sas} \xrightarrow{\gamma} aa, \text{saa} \xrightarrow{\delta} aat \mid \cancel{A}, \cancel{B}, \cancel{C}, \cancel{D} \rangle$



Conclusion : $\text{Art}_+(B_3^+) = \langle s, t \mid \text{tst} \xrightarrow{\alpha} \text{sts} \mid \emptyset \rangle$ est une présentation cohérente de B_3^+

Rewr [Mimram-G.] : prototype (<http://www.pps.univ-paris-diderot.fr/~smimram/rewr>)

- complétion-réduction homotopique
- heuristiques d'ajout de générateurs en cours de complétion

3. Application : présentations cohérentes des monoïdes d'Artin

3.1. Monoïdes d'Artin

Monoïde d'Artin : monoïde A admettant une présentation

$$\text{Art}(A) = \langle S \text{ fini} \mid sts \cdots \xrightarrow{\gamma_{st}} tst \cdots \text{ pour certains } s, t \in S \rangle$$

3.1. Monoïdes d'Artin

Monoïde d'Artin : monoïde A admettant une présentation

$$\text{Art}(A) = \langle S \text{ fini} \mid sts \cdots \xrightarrow{\gamma_{st}} tst \cdots \text{ pour certains } s, t \in S \rangle$$

$$\text{Ex. : } \left\{ \begin{array}{ll} B_3^+ : tst \Rightarrow sts & \text{Libre } \mathbb{N}^{*n} : \text{pas de relation} \\ B_4^+ : srs \Rightarrow rsr, tst \Rightarrow sts, tr \Rightarrow rt & \text{Commutatif libre } \mathbb{N}^n : ts \Rightarrow st \text{ pour tous } s, t \\ \tilde{A}_2 : srs \Rightarrow rsr, tst \Rightarrow sts, trt \Rightarrow rtr & \end{array} \right.$$

3.1. Monoïdes d'Artin

Monoïde d'Artin : monoïde A admettant une présentation

$$\text{Art}(A) = \langle S \text{ fini} \mid sts \cdots \xrightarrow{\gamma_{st}} tst \cdots \text{ pour certains } s, t \in S \rangle$$

$$\text{Ex. : } \begin{cases} B_3^+ : tst \Rightarrow sts & \text{Libre } \mathbb{N}^{*n} : \text{pas de relation} \\ B_4^+ : srs \Rightarrow rsr, tst \Rightarrow sts, tr \Rightarrow rt & \text{Commutatif libre } \mathbb{N}^n : ts \Rightarrow st \text{ pour tous } s, t \\ \tilde{A}_2 : srs \Rightarrow rsr, tst \Rightarrow sts, trt \Rightarrow rtr \end{cases}$$

Théorème [Tits 81] : présentation cohérente $(\text{Art}(A), \Gamma_A)$, avec

$$\Gamma_A = \begin{cases} \emptyset & \text{pour } B_3^+, \mathbb{N}^{*n} \text{ et } \tilde{A}_2 \\ \text{toutes les 3-cellules} & \text{pour } B_4^+ \text{ et } \mathbb{N}^3 \end{cases}$$

3.1. Monoïdes d'Artin

Monoïde d'Artin : monoïde A admettant une présentation

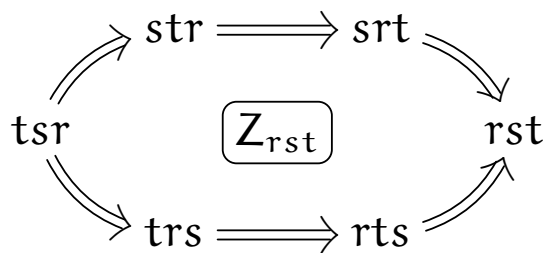
$$\text{Art}(A) = \langle S \text{ fini} \mid sts \cdots \xrightarrow{\gamma_{st}} tst \cdots \text{ pour certains } s, t \in S \rangle$$

Ex. : $\begin{cases} B_3^+ : tst \Rightarrow sts & \text{Libre } \mathbb{N}^{*n} : \text{pas de relation} \\ B_4^+ : srs \Rightarrow rsr, tst \Rightarrow sts, tr \Rightarrow rt & \text{Commutatif libre } \mathbb{N}^n : ts \Rightarrow st \text{ pour tous } s, t \\ \tilde{A}_2 : srs \Rightarrow rsr, tst \Rightarrow sts, trt \Rightarrow rtr \end{cases}$

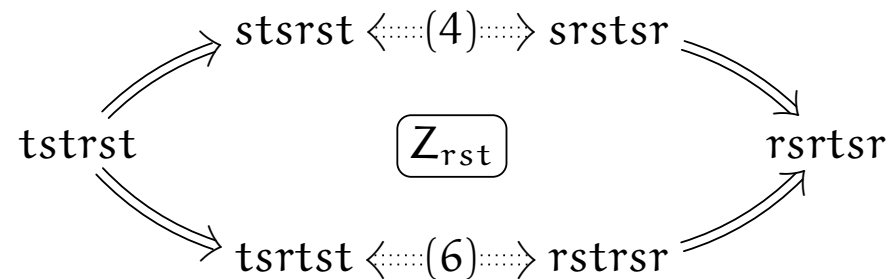
Théorème [Tits 81] : présentation cohérente $(\text{Art}(A), \Gamma_A)$, avec

$$\Gamma_A = \begin{cases} \emptyset & \text{pour } B_3^+, \mathbb{N}^{*n} \text{ et } \tilde{A}_2 \\ \text{toutes les 3-cellules} & \text{pour } B_4^+ \text{ et } \mathbb{N}^3 \end{cases}$$

Mais on sait que les 3-cellules suivantes suffisent :



(permutoèdre) pour \mathbb{N}^3 [Folklore]



(Zamolodchikov) pour B_4^+ [Deligne 97]

3.2. Présentations cohérentes minimales des monoïdes d'Artin

Théorème [Gaussent-G.-Malbos 14] : présentation cohérente $\text{Art}_+(\mathcal{A}) = (\text{Art}(\mathcal{A}), \Delta_{\mathcal{A}})$ avec une 3-cellule pour chaque « sous-monoïde sphérique de rang 3 » de \mathcal{A} , *i.e.* pour chaque copie de

\mathbb{N}^3

B_4^+

$I_2(p) \times A_1 : sr \cdots \Rightarrow rs \cdots, tr \Rightarrow rt, ts \Rightarrow st$

$B_3 : srsr \Rightarrow rsrs, tst \Rightarrow sts, tr \Rightarrow rt$

$H_3 : srsrs \Rightarrow rsrsr, tst \Rightarrow sts, tr \Rightarrow rt$

3.2. Présentations cohérentes minimales des monoïdes d'Artin

Théorème [Gaussent-G.-Malbos 14] : présentation cohérente $\text{Art}_+(\mathcal{A}) = (\text{Art}(\mathcal{A}), \Delta_{\mathcal{A}})$ avec une 3-cellule pour chaque « sous-monoïde sphérique de rang 3 » de \mathcal{A} , *i.e.* pour chaque copie de

$$\mathbb{N}^3 \quad B_4^+ \quad I_2(p) \times A_1 : sr \cdots \Rightarrow rs \cdots, tr \Rightarrow rt, ts \Rightarrow st$$

$$B_3 : srsr \Rightarrow rsrs, tst \Rightarrow sts, tr \Rightarrow rt$$

$$H_3 : srsrs \Rightarrow rsrsr, tst \Rightarrow sts, tr \Rightarrow rt$$

Démonstration : (<http://www.pps.univ-paris-diderot.fr/~guiraud/cox/cox.zip>)

Présentation de Garside $\text{Gar}(\mathcal{A})$
--

$$B_3^+ : \langle s, t, st, ts, sts \mid 6 \text{ rel.} \rangle$$

$$B_4^+ : \langle 23 \text{ gén.} \mid 104 \text{ rel.} \rangle$$

$$E_8 : \langle 696\,729\,600 \text{ gén.} \mid ??? \text{ rel.} \rangle$$

$$\tilde{A}_2 : \langle \infty \text{ gén.} \mid \infty \text{ rel.} \rangle$$

3.2. Présentations cohérentes minimales des monoïdes d'Artin

Théorème [Gaussent-G.-Malbos 14] : présentation cohérente $\text{Art}_+(A) = (\text{Art}(A), \Delta_A)$ avec une 3-cellule pour chaque « sous-monoïde sphérique de rang 3 » de A , *i.e.* pour chaque copie de

$$\mathbb{N}^3 \quad B_4^+ \quad I_2(p) \times A_1 : sr \cdots \Rightarrow rs \cdots, tr \Rightarrow rt, ts \Rightarrow st$$

$$B_3 : srsr \Rightarrow rsrs, tst \Rightarrow sts, tr \Rightarrow rt$$

$$H_3 : srsrs \Rightarrow rsrsr, tst \Rightarrow sts, tr \Rightarrow rt$$

Démonstration : (<http://www.pps.univ-paris-diderot.fr/~guiraud/cox/cox.zip>)

Présentation de
Garside $\text{Gar}(A)$

$$B_3^+ : \langle s, t, st, ts, sts \mid 6 \text{ rel.} \rangle$$

$$B_4^+ : \langle 23 \text{ gén.} \mid 104 \text{ rel.} \rangle$$

$$E_8 : \langle 696\,729\,600 \text{ gén.} \mid ??? \text{ rel.} \rangle$$

$$\tilde{A}_2 : \langle \infty \text{ gén.} \mid \infty \text{ rel.} \rangle$$

↙ *Complétion-réduction homotopique (A)*

Prés. coh. de
Garside $\text{Gar}_+(A)$
[Deligne 97]

$$B_3^+ : \langle 5 \text{ gén.} \mid 6 \text{ rel.} \mid 2 \times 3\text{-cell.} \rangle$$

$$B_4^+ : \langle 23 \text{ gén.} \mid 104 \text{ rel.} \mid 196 \times 3\text{-cell.} \rangle$$

3.2. Présentations cohérentes minimales des monoïdes d'Artin

Théorème [Gaussent-G.-Malbos 14] : présentation cohérente $\text{Art}_+(\mathcal{A}) = (\text{Art}(\mathcal{A}), \Delta_{\mathcal{A}})$ avec une 3-cellule pour chaque « sous-monoïde sphérique de rang 3 » de \mathcal{A} , *i.e.* pour chaque copie de

$$\mathbb{N}^3 \quad B_4^+ \quad I_2(p) \times A_1 : sr \cdots \Rightarrow rs \cdots, tr \Rightarrow rt, ts \Rightarrow st$$

$$B_3 : srsr \Rightarrow rsrs, tst \Rightarrow sts, tr \Rightarrow rt \quad H_3 : srsrs \Rightarrow rsrsr, tst \Rightarrow sts, tr \Rightarrow rt$$

Démonstration : (<http://www.pps.univ-paris-diderot.fr/~guiraud/cox/cox.zip>)

Présentation de
Garside $\text{Gar}(\mathcal{A})$

$$B_3^+ : \langle s, t, st, ts, sts \mid 6 \text{ rel.} \rangle \quad B_4^+ : \langle 23 \text{ gén.} \mid 104 \text{ rel.} \rangle$$

$$E_8 : \langle 696\,729\,600 \text{ gén.} \mid ??? \text{ rel.} \rangle \quad \tilde{A}_2 : \langle \infty \text{ gén.} \mid \infty \text{ rel.} \rangle$$

↙ *Complétion-réduction homotopique (A)*

Prés. coh. de
Garside $\text{Gar}_+(\mathcal{A})$
[Deligne 97]

$$B_3^+ : \langle 5 \text{ gén.} \mid 6 \text{ rel.} \mid 2 \times 3\text{-cell.} \rangle \quad B_4^+ : \langle 23 \text{ gén.} \mid 104 \text{ rel.} \mid 196 \times 3\text{-cell.} \rangle$$

↙ *Réduction homotopique (B)*

Prés. cohérente
d'Artin $\text{Art}_+(\mathcal{A})$

$$B_3^+ : \langle s, t \mid tst \Rightarrow sts \mid \emptyset \rangle \quad B_4^+ : \langle r, s, t \mid 3 \text{ rel.} \mid 1 \times 3\text{-cell.} \rangle$$

$$E_8 : \langle 8 \text{ gén.} \mid 28 \text{ rel.} \mid C_8^3 = 56 \times 3\text{-cell.} \rangle \quad \tilde{A}_2 : \langle r, s, t \mid 3 \text{ rel.} \mid \emptyset \rangle$$