

PRÉSENTATIONS COHÉRENTES DES GROUPES D'ARTIN

Stéphane Gaussent¹

Yves Guiraud²

Philippe Malbos²

1 : Université de Saint-Étienne, Institut Camille Jordan

2 : INRIA, Laboratoire Preuves, Programmes et Systèmes

**Journées PPS
19 septembre 2013**

1. Contexte historique : le théorème de Squier

1.1. Le problème de Jantzen

Fait : Pour tout monoïde M ,

M admet une présentation convergente finie (PCF) $\implies M$ a un problème du mot décidable

Solution : algorithme de la forme normale : $u \Rightarrow \hat{u}$, $v \Rightarrow \hat{v}$, $\hat{u} \stackrel{?}{=} \hat{v}$

Question [Jantzen 82, 85] : si M de type fini décidable, alors M admet une PCF ?

1.1. Le problème de Jantzen

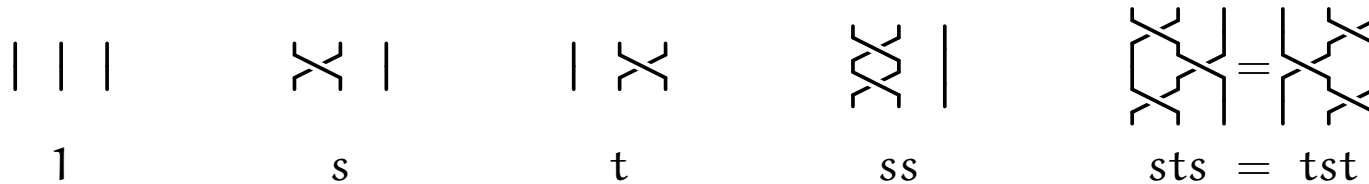
Fait : Pour tout monoïde M ,

M admet une présentation convergente finie (PCF) $\implies M$ a un problème du mot décidable

Solution : algorithme de la forme normale : $u \Rightarrow \hat{u}, v \Rightarrow \hat{v}, \hat{u} \stackrel{?}{=} \hat{v}$

Question [Jantzen 82, 85] : si M de type fini décidable, alors M admet une PCF ?

Exemple : monoïde $B_3^+ = \langle s, t \mid sts = tst \rangle$ des tresses sur trois brins



Théorème [Kapur-Narendran 85] : $\begin{cases} B_3^+ \text{ n'admet aucune PCF } (\{s, t\}, R) \\ B_3^+ \text{ admet une PCF} \end{cases}$

1.1. Le problème de Jantzen

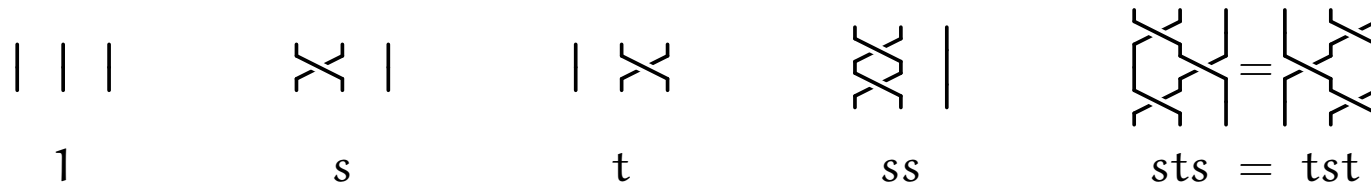
Fait : Pour tout monoïde M ,

M admet une présentation convergente finie (PCF) $\implies M$ a un problème du mot décidable

Solution : algorithme de la forme normale : $u \Rightarrow \hat{u}, v \Rightarrow \hat{v}, \hat{u} \stackrel{?}{=} \hat{v}$

Question [Jantzen 82, 85] : si M de type fini décidable, alors M admet une PCF ?

Exemple : monoïde $B_3^+ = \langle s, t \mid sts = tst \rangle$ des tresses sur trois brins



Théorème [Kapur-Narendran 85] : $\begin{cases} B_3^+ \text{ n'admet aucune PCF } (\{s, t\}, R) \\ B_3^+ \text{ admet une PCF} \end{cases}$

- toute PC $(\{s, t\}, R)$ doit contenir $stsst^n \Leftrightarrow ts^{n+1}ts$ pour tout $n \geq 1$
- la présentation $B_3^+ \simeq \langle s, t, a \mid as = ta, st = a \rangle$ se complète (Knuth-Bendix) en une PCF

Conclusion : l'existence ou non d'une PCF (X, R) dépend de $X...$ et pas uniquement de M .

1.2. Le théorème de Squier

Idée de Squier : montrer PCF \Rightarrow une propriété indépendante de la présentation (*invariant de M*)

Complexe d'une présentation $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2)$: graphe des dérivations de Σ

- sommets (1-cellules) : mots du monoïde libre Σ_1^*
- arêtes (2-cellules) : étapes de réduction $wuw' \xRightarrow{w\alpha w'} wvw'$ pour $\alpha : u \Rightarrow v$ dans Σ_2

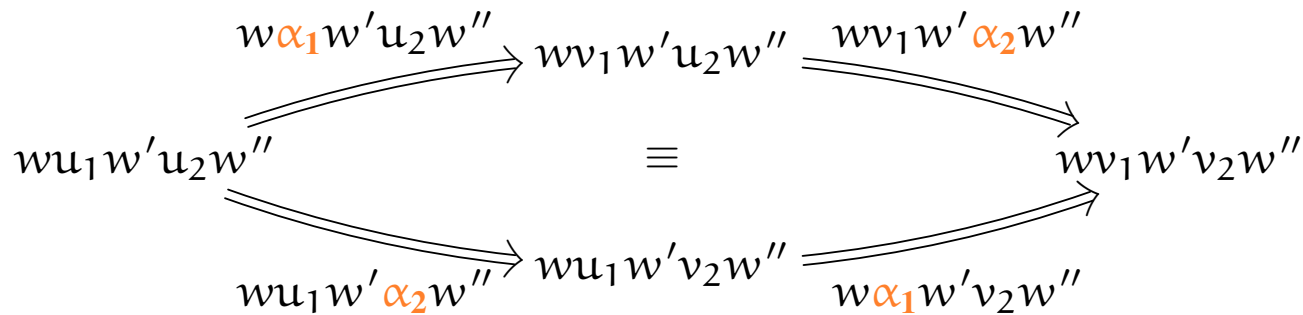
1.2. Le théorème de Squier

Idée de Squier : montrer PCF \Rightarrow une propriété indépendante de la présentation (*invariant de M*)

Complexe d'une présentation $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2)$: graphe des dérivations de Σ

- sommets (1-cellules) : mots du monoïde libre Σ_1^*
- arêtes (2-cellules) : étapes de réduction $wuw' \xrightarrow{w\alpha w'} wvw'$ pour $\alpha : u \Rightarrow v$ dans Σ_2

plus des 3-cellules pour les applications orthogonales de règles



On a $\bar{u} = \bar{v}$ dans M ssi il existe un chemin non orienté (zigzag) $u \xleftrightarrow{f} v$ dans le complexe

\rightsquigarrow f est une preuve de l'égalité $\bar{u} = \bar{v}$

\rightsquigarrow il peut en exister d'autres

1.2. Le théorème de Squier

Base d'homotopie de $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2)$: ensemble Σ_3 de 3-cellules supplémentaires tq

« toutes les preuves de $\bar{u} = \bar{v}$ sont égales modulo Σ_3 »

i.e., pour tous zigzags $u \begin{array}{c} \xleftarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} v$ il existe un pavage $u \begin{array}{c} \xleftarrow{f} \\ \boxed{\Sigma_3} \\ \xrightarrow{g} \end{array} v$ par des 3-cellules de Σ_3

Type de dérivation fini : Σ finie est *TDF* si elle admet une base d'homotopie *finie*

1.2. Le théorème de Squier

Base d'homotopie de $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2)$: ensemble Σ_3 de 3-cellules supplémentaires tq

« toutes les preuves de $\bar{u} = \bar{v}$ sont égales modulo Σ_3 »

i.e., pour tous zigzags $u \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} v$ il existe un pavage $u \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} \boxed{\Sigma_3} \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} v$ par des 3-cellules de Σ_3

Type de dérivation fini : Σ finie est *TDF* si elle admet une base d'homotopie *finie*

Théorème [Squier 94]:

1. Σ convergent fini $\Rightarrow \Sigma$ TDF
2. si Σ et Υ sont deux présentations finies d'un monoïde M , alors Σ TDF ssi Υ TDF
3. il existe M décidable avec une présentation finie non TDF

Corollaire : décidable $\not\Rightarrow$ PCF

Réf. : YG et PM, *A polygraphic survey on finiteness conditions for rewriting systems*, note, 2013

1.3. Calcul de bases d'homotopie

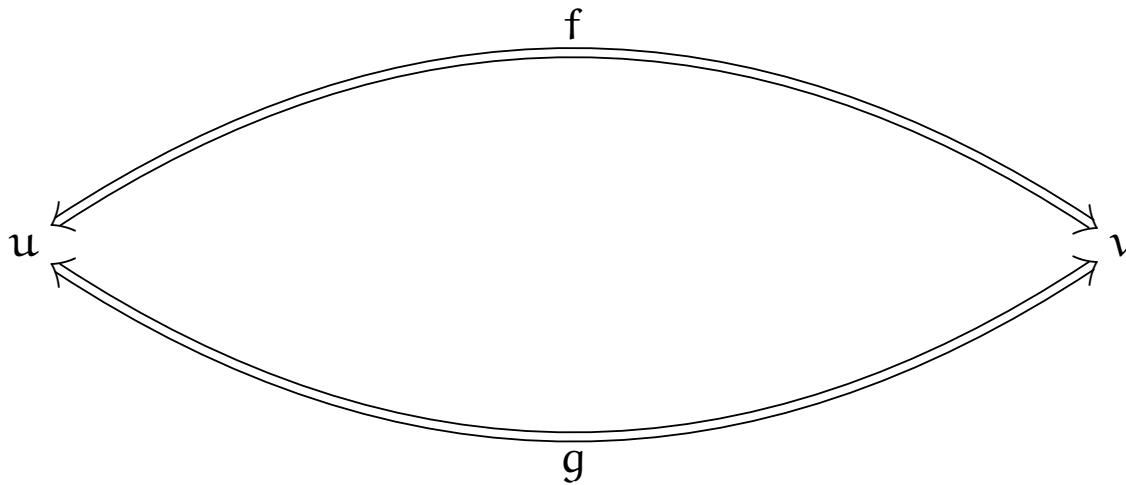
Preuve de convergent fini \Rightarrow TDF : (Σ_1, Σ_2) convergent $\rightsquigarrow \Sigma_3$ base d'homotopie de (Σ_1, Σ_2)

$$\Sigma_3 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & f & \\ u & \xrightarrow{\quad} & v \\ & \omega_{f,g} & \\ & g & \\ & \xrightarrow{\quad} & w \\ & & \xrightarrow{\quad} & u' \\ & & k & \end{array} & \left| \right. & (f, g) \text{ branchement critique de } (\Sigma_1, \Sigma_2) \end{array} \right\}$$

1.3. Calcul de bases d'homotopie

Preuve de convergent fini \Rightarrow TDF : (Σ_1, Σ_2) convergent $\rightsquigarrow \Sigma_3$ base d'homotopie de (Σ_1, Σ_2)

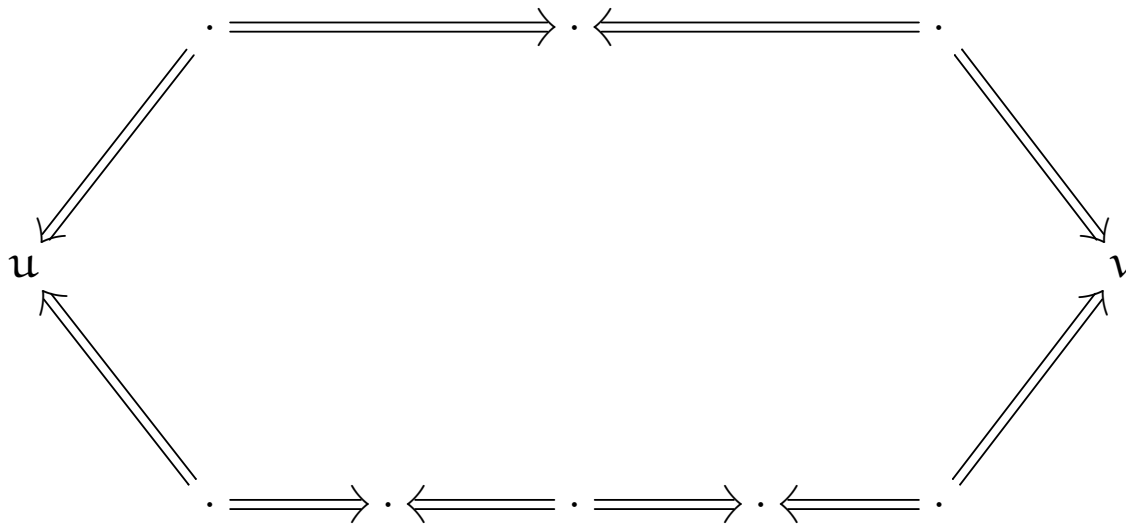
$$\Sigma_3 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & f & \rightarrow & v & & h & & \\ & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & & & \\ u & & & & & & & & u' \\ & & \omega_{f,g} & & & & & & \\ & & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & & & & \\ & & g & \rightarrow & w & & k & & \end{array} & \left| \right. & (f, g) \text{ branchement critique de } (\Sigma_1, \Sigma_2) & \right\}$$



1.3. Calcul de bases d'homotopie

Preuve de convergent fini \Rightarrow TDF : (Σ_1, Σ_2) convergent $\rightsquigarrow \Sigma_3$ base d'homotopie de (Σ_1, Σ_2)

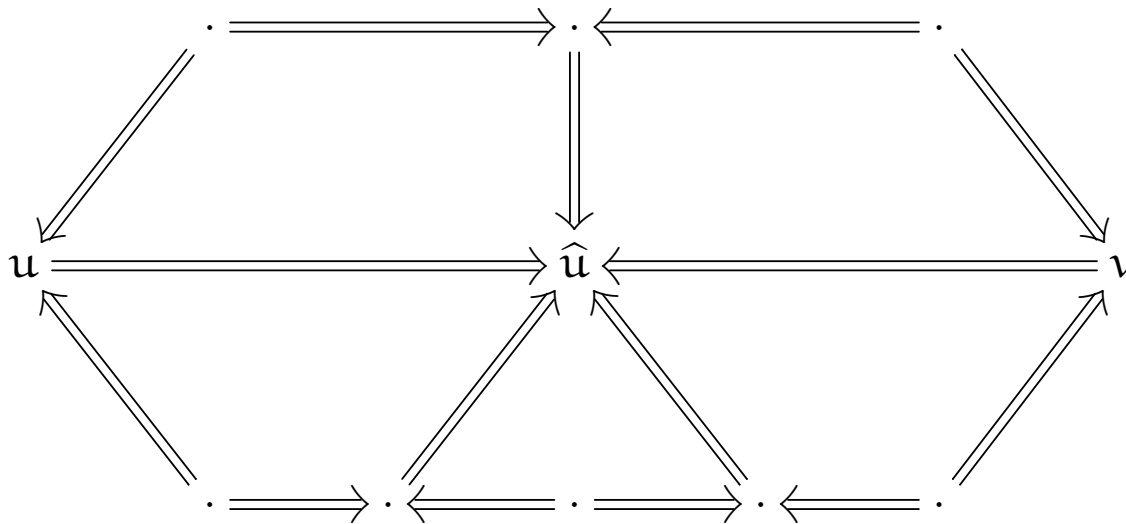
$$\Sigma_3 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & f & & v & & h & & \\ & & \curvearrowright & & & & \curvearrowright & & \\ u & & & & \omega_{f,g} & & & & u' \\ & & g & & w & & k & & \\ & & \curvearrowleft & & & & \curvearrowleft & & \end{array} \\ \left| \begin{array}{l} (f, g) \text{ branchement critique de } (\Sigma_1, \Sigma_2) \end{array} \right. \\ \end{array} \right\}$$



1.3. Calcul de bases d'homotopie

Preuve de convergent fini \Rightarrow TDF : (Σ_1, Σ_2) convergent $\rightsquigarrow \Sigma_3$ base d'homotopie de (Σ_1, Σ_2)

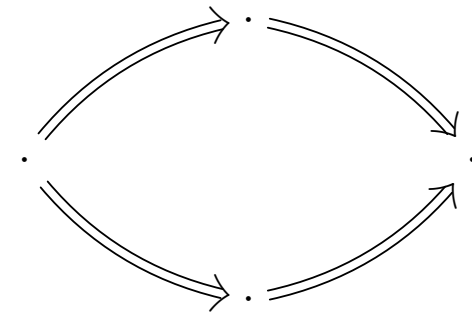
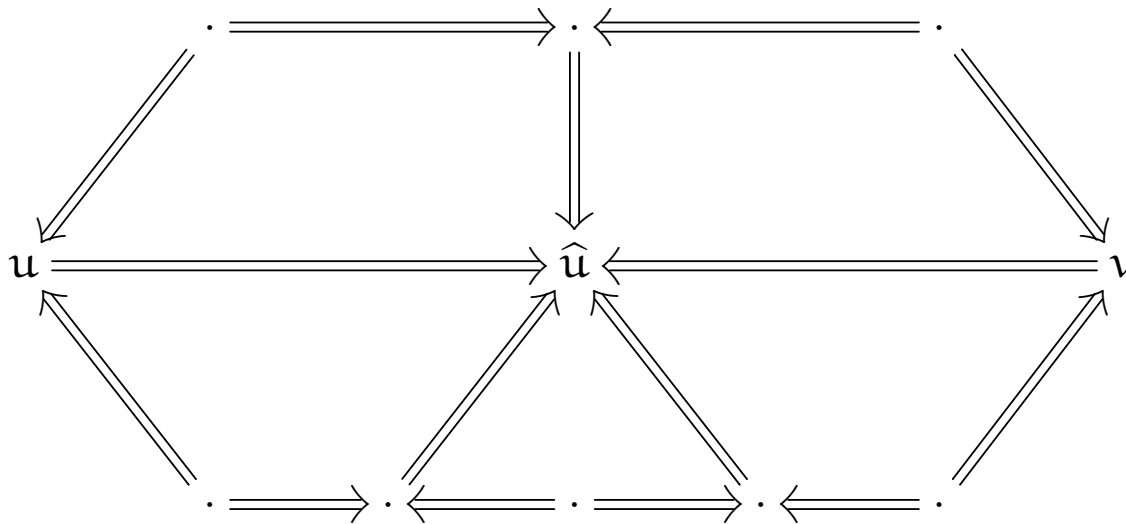
$$\Sigma_3 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & f & & v & & h & & \\ & & \curvearrowright & & & & \curvearrowleft & & \\ u & & & & \omega_{f,g} & & & & u' \\ & & \curvearrowleft & & & & \curvearrowright & & \\ & & g & & w & & k & & \end{array} \\ \left. \begin{array}{l} (f, g) \text{ branchement critique de } (\Sigma_1, \Sigma_2) \end{array} \right\} \end{array}$$



1.3. Calcul de bases d'homotopie

Preuve de convergent fini \Rightarrow TDF : (Σ_1, Σ_2) convergent $\rightsquigarrow \Sigma_3$ base d'homotopie de (Σ_1, Σ_2)

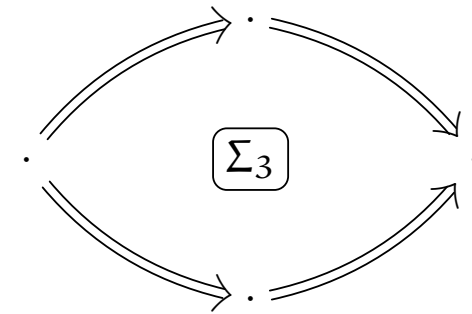
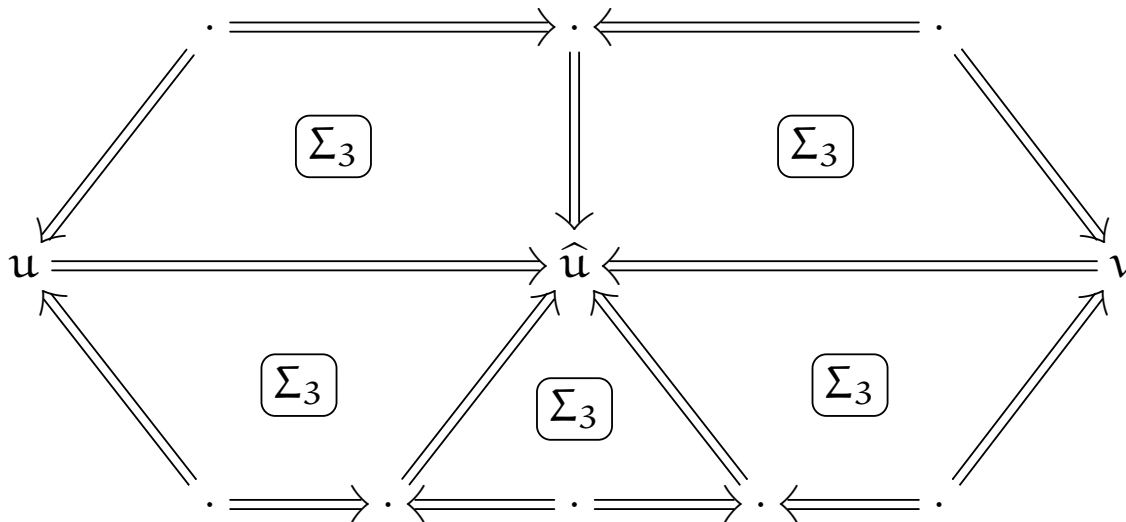
$$\Sigma_3 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & f & & \\ & & \curvearrowright & & \\ & & v & & h \\ & & \curvearrowleft & & \\ u & & \omega_{f,g} & & u' \\ & & \curvearrowright & & \\ & & w & & k \\ & & \curvearrowleft & & \end{array} \\ \left| \text{ (f, g) branchement critique de } (\Sigma_1, \Sigma_2) \right. \end{array} \right\}$$



1.3. Calcul de bases d'homotopie

Preuve de convergent fini \Rightarrow TDF : (Σ_1, Σ_2) convergent $\rightsquigarrow \Sigma_3$ base d'homotopie de (Σ_1, Σ_2)

$$\Sigma_3 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & f & & v & & h & & \\ & & \curvearrowright & & & & \curvearrowleft & & \\ u & & & \omega_{f,g} & & & & & u' \\ & & g & & w & & k & & \\ & & \curvearrowleft & & & & \curvearrowright & & \end{array} \\ \left. \begin{array}{l} (f, g) \text{ branchement critique de } (\Sigma_1, \Sigma_2) \end{array} \right\} \end{array}$$



Lemme des paires critiques
Lemme de Newman

2. Présentations cohérentes des monoïdes et groupes d'Artin

2.1. Monoïdes et groupes d'Artin

Définition : monoïde/groupe A donné par une présentation $\mathbf{Art}(A)$

- un ensemble fini S de générateurs

($s \in S =$ réflexion par rapport à un hyperplan, mais $s^2 \neq 1$)

- au plus une relation *de tresse* $sts \cdots = tst \cdots$ pour tous $s \neq t$ dans S

(représente la configuration des hyperplans s et t)

2.1. Monoïdes et groupes d'Artin

Définition : monoïde/groupe A donné par une présentation $\mathbf{Art}(A)$

- un ensemble fini S de générateurs
($s \in S =$ réflexion par rapport à un hyperplan, mais $s^2 \neq 1$)
- au plus une relation *de tresse* $sts \cdots = tst \cdots$ pour tous $s \neq t$ dans S
(représente la configuration des hyperplans s et t)

Quelques exemples :

- B_3^+ : $sts = tst$
- B_4^+ : $rsr = srs, tst = sts, rt = tr$ ($r = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad | \quad | \quad s = | \quad \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad | \quad t = | \quad | \quad \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}$)
- Libre \mathbb{N}^{*n} : pas de relation
- Commutatif libre \mathbb{N}^n : $st = ts$ pour tous s, t

Réf. : M. Geck et G. Pfeiffer, *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras*, 2000

2.2. Présentations cohérentes

Présentation cohérente : présentation Σ + base d'homotopie de Σ

Théorème [Tits 81] : tout monoïde/groupe d'Artin A admet la présentation cohérente $(\mathbf{Art}(A), \Gamma_A)$

Γ_A : toutes les 3-cellules possibles pour chaque sous-monoïde/groupe sphérique de rang 3

Exemples :

- $B_3^+ = \langle s, t \mid sts = tst \mid \emptyset \rangle$

2.2. Présentations cohérentes

Présentation cohérente : présentation Σ + base d'homotopie de Σ

Théorème [Tits 81] : tout monoïde/groupe d'Artin A admet la présentation cohérente $(\mathbf{Art}(A), \Gamma_A)$

Γ_A : toutes les 3-cellules possibles pour chaque sous-monoïde/groupe sphérique de rang 3

Exemples :

- $B_3^+ = \langle s, t \mid sts = tst \mid \emptyset \rangle$
- $B_4^+ = \langle r, s, t \mid rsr = srs, tst = sts, rt = tr \mid \text{toutes les 3-cellules} \rangle$
[Deligne 97] Il suffit d'une seule 3-cellule (relation de Zamolodchikov)
- Pour $\mathbb{N}^3 = \langle r, s, t \mid rs = sr, st = ts, rt = tr \mid \text{toutes les 3-cellules} \rangle$
[Folklore] Il suffit d'une seule 3-cellule (permutoèdre)

2.2. Présentations cohérentes

Présentation cohérente : présentation Σ + base d'homotopie de Σ

Théorème [Tits 81] : tout monoïde/groupe d'Artin A admet la présentation cohérente $(\mathbf{Art}(A), \Gamma_A)$

Γ_A : toutes les 3-cellules possibles pour chaque sous-monoïde/groupe sphérique de rang 3

Exemples :

- $B_3^+ = \langle s, t \mid sts = tst \mid \emptyset \rangle$

- $B_4^+ = \langle r, s, t \mid rsr = srs, tst = sts, rt = tr \mid \text{toutes les 3-cellules} \rangle$

[Deligne 97] Il suffit d'une seule 3-cellule (relation de Zamolodchikov)

- Pour $\mathbb{N}^3 = \langle r, s, t \mid rs = sr, st = ts, rt = tr \mid \text{toutes les 3-cellules} \rangle$

[Folklore] Il suffit d'une seule 3-cellule (permutoèdre)

Théorème [GGM 13] : tout monoïde/groupe d'Artin A admet la présentation cohérente $(\mathbf{Art}(A), \Delta_A)$

Δ_A : une 3-cellule pour chaque sous-monoïde/groupe sphérique de rang 3 de A .

Méthode : *procédure de complétion-réduction homotopique* (extension de Squier)

Calcul : <http://www.pps.univ-paris-diderot.fr/~guiraud/cox/cox.zip>

3. La procédure de complétion-réduction homotopique

3.1. La procédure

Fonctionnement général :

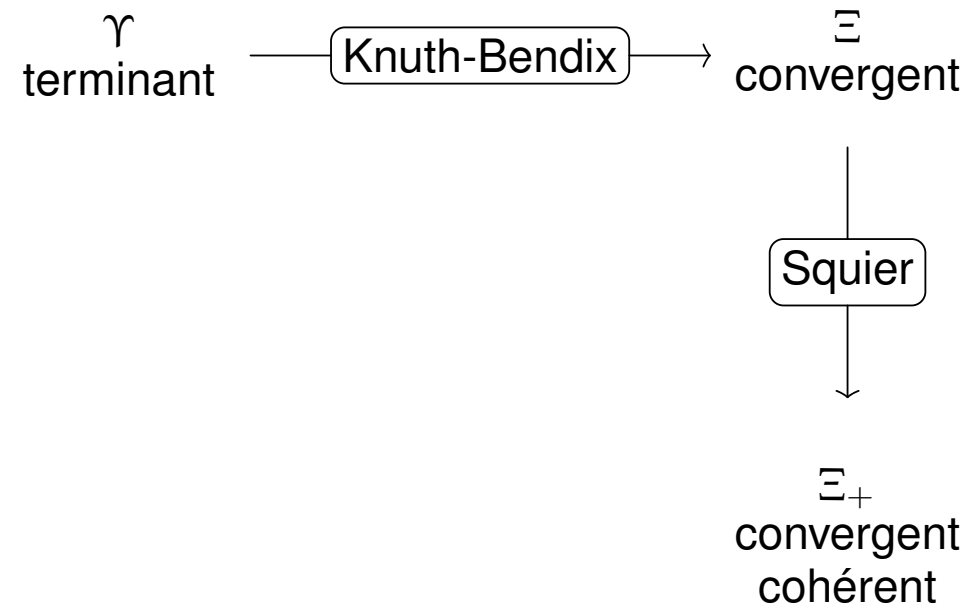
Ξ
convergent

Squier

Ξ_+
convergent
cohérent

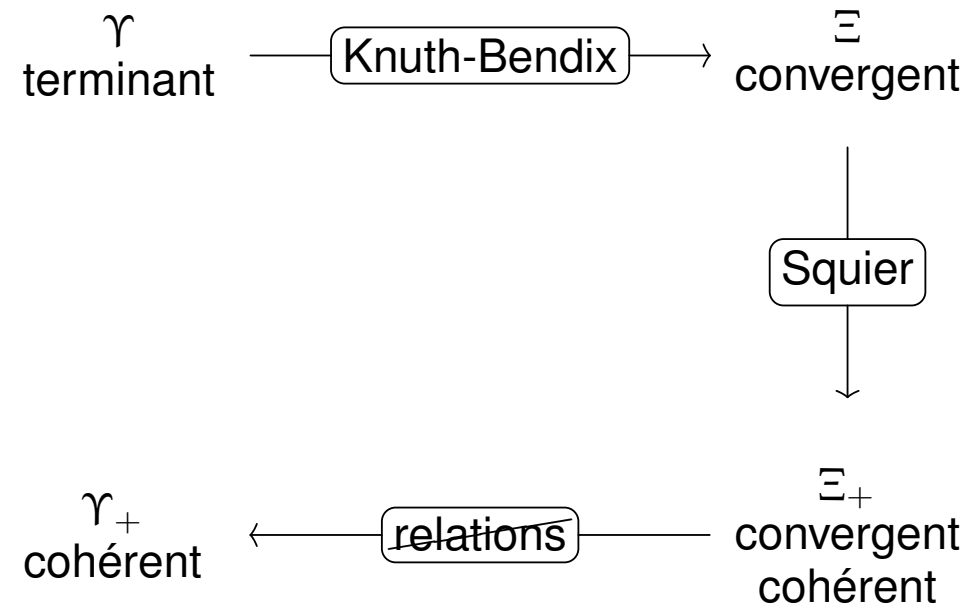
3.1. La procédure

Fonctionnement général :



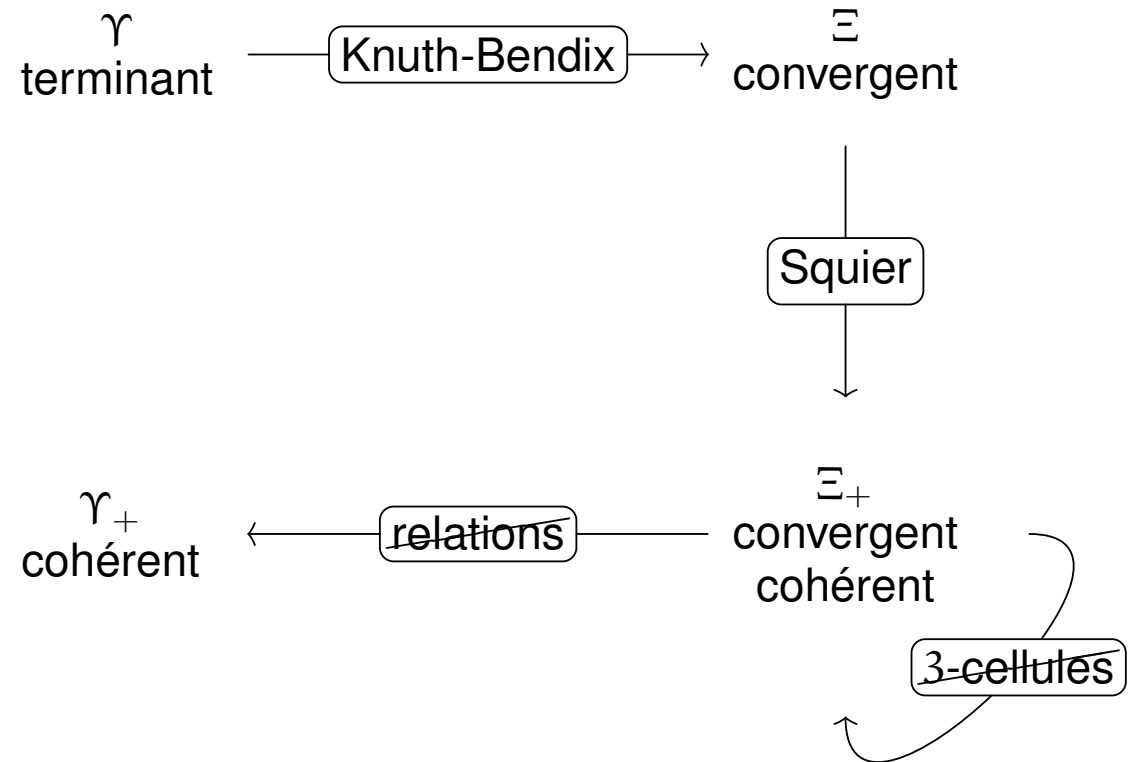
3.1. La procédure

Fonctionnement général :



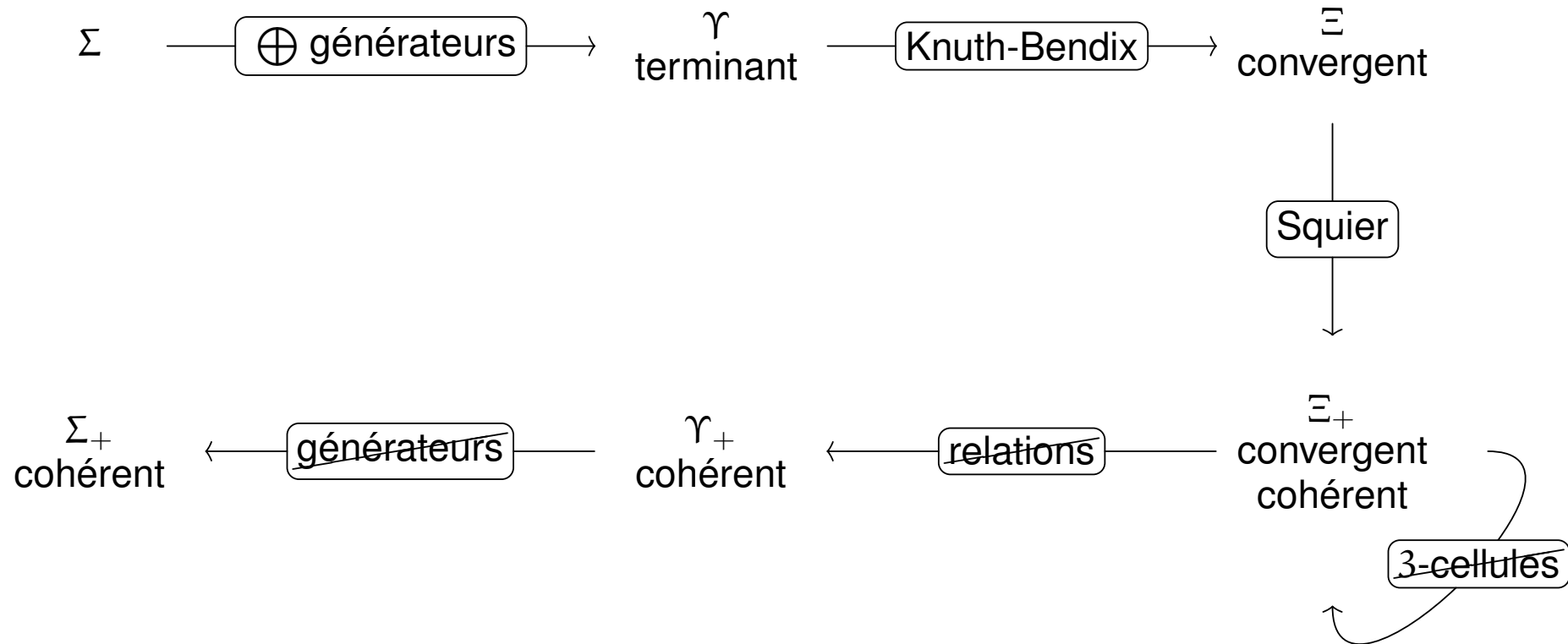
3.1. La procédure

Fonctionnement général :



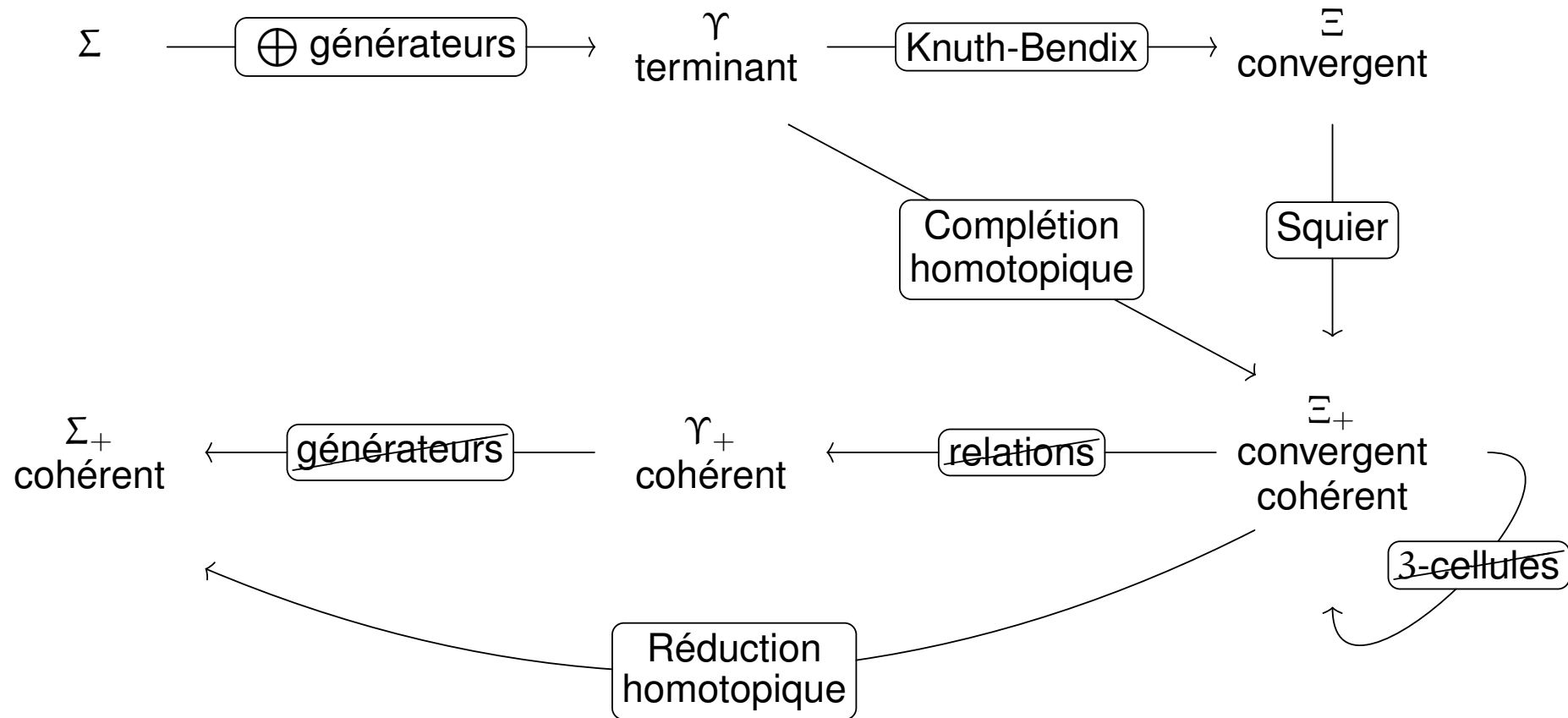
3.1. La procédure

Fonctionnement général :



3.1. La procédure

Fonctionnement général :



Réf. : $\left\{ \begin{array}{l} \text{SG, YG et PM, } \textit{Coherent presentations of Artin groups}, 2013 \\ \text{YG, PM et S. Mimram, } \textit{A homotopical completion procedure}, \text{RTA}, 2013 \end{array} \right.$

3.2. Complétion homotopique

Complétion homotopique : Σ terminant \longrightarrow Knuth-Bendix
+
Squier \longrightarrow $\mathcal{S}(\Sigma)$ convergent et cohérent

Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $\Sigma = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

3.2. Complétion homotopique

Complétion homotopique : Σ terminant \longrightarrow Knuth-Bendix
+
Squier \longrightarrow $\mathcal{S}(\Sigma)$ convergent et cohérent

Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $\Sigma = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

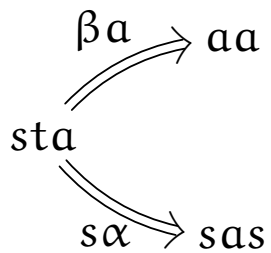
$$\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$$

3.2. Complétion homotopique

Complétion homotopique : Σ terminant \longrightarrow Knuth-Bendix
+
Squier \longrightarrow $\mathcal{S}(\Sigma)$ convergent et cohérent

Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $\Sigma = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$$

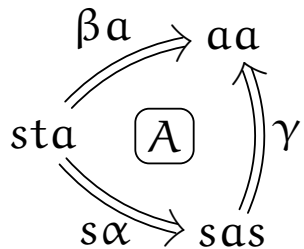


3.2. Complétion homotopique

Complétion homotopique : Σ terminant \longrightarrow Knuth-Bendix
+
Squier \longrightarrow $\mathcal{S}(\Sigma)$ convergent et cohérent

Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $\Sigma = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa \mid A \rangle$$

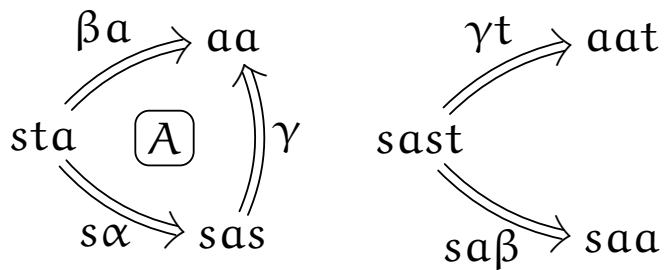


3.2. Complétion homotopique

Complétion homotopique : Σ terminant \longrightarrow Knuth-Bendix
+
Squier \longrightarrow $\mathcal{S}(\Sigma)$ convergent et cohérent

Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $\Sigma = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa \mid A \rangle$$

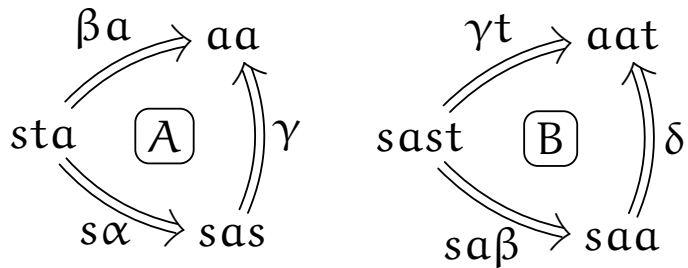


3.2. Complétion homotopique

Complétion homotopique : Σ terminant \longrightarrow Knuth-Bendix
+
Squier \longrightarrow $\mathcal{S}(\Sigma)$ convergent et cohérent

Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $\Sigma = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B \rangle$$

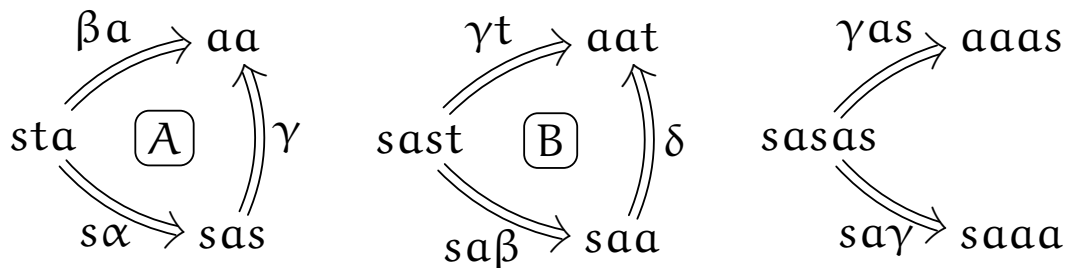


3.2. Complétion homotopique

Complétion homotopique : Σ terminant \longrightarrow Knuth-Bendix
+
Squier \longrightarrow $\mathcal{S}(\Sigma)$ convergent et cohérent

Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $\Sigma = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B \rangle$$

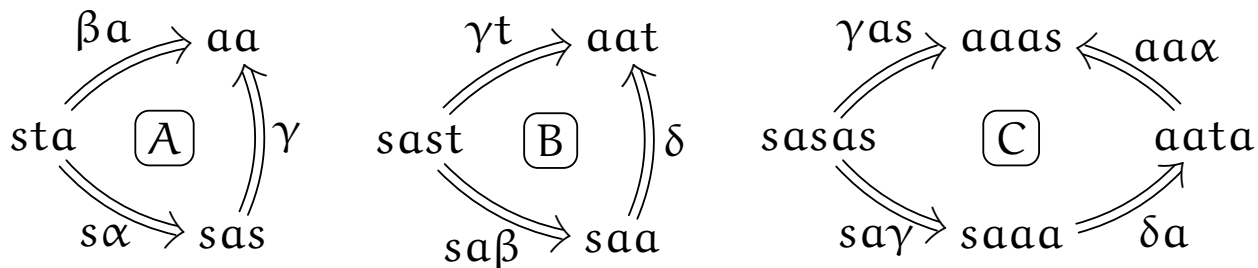


3.2. Complétion homotopique

Complétion homotopique : Σ terminant $\xrightarrow{\text{Knuth-Bendix} + \text{Squier}}$ $\mathcal{S}(\Sigma)$ convergent et cohérent

Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $\Sigma = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C \rangle$$

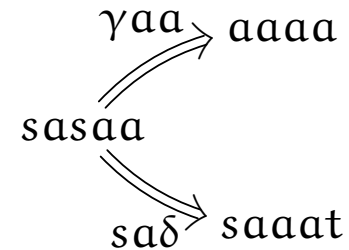
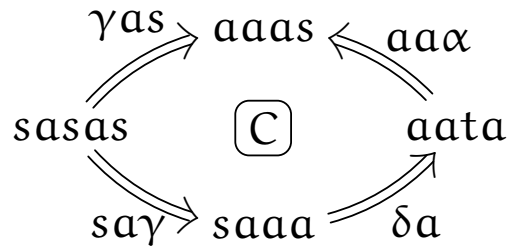
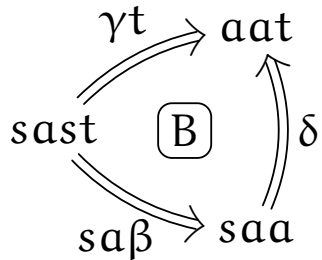
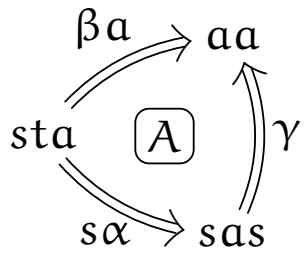


3.2. Complétion homotopique

Complétion homotopique : Σ terminant $\xrightarrow{\text{Knuth-Bendix} + \text{Squier}}$ $\mathcal{S}(\Sigma)$ convergent et cohérent

Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $\Sigma = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C$

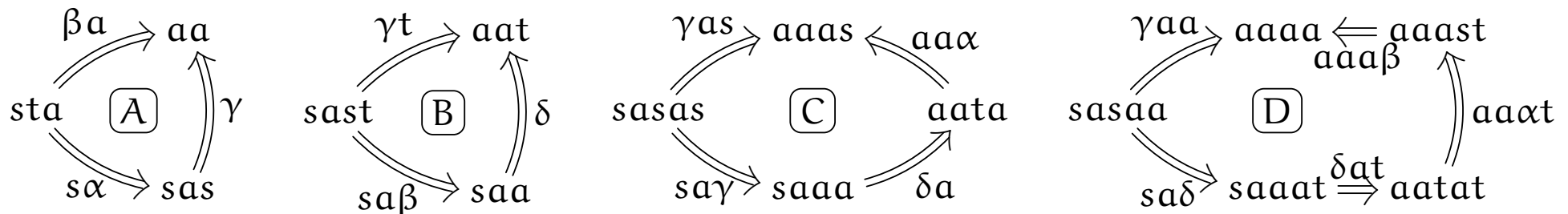


3.2. Complétion homotopique

Complétion homotopique : Σ terminant $\xrightarrow{\text{Knuth-Bendix} + \text{Squier}}$ $\mathcal{S}(\Sigma)$ convergent et cohérent

Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $\Sigma = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C, D$

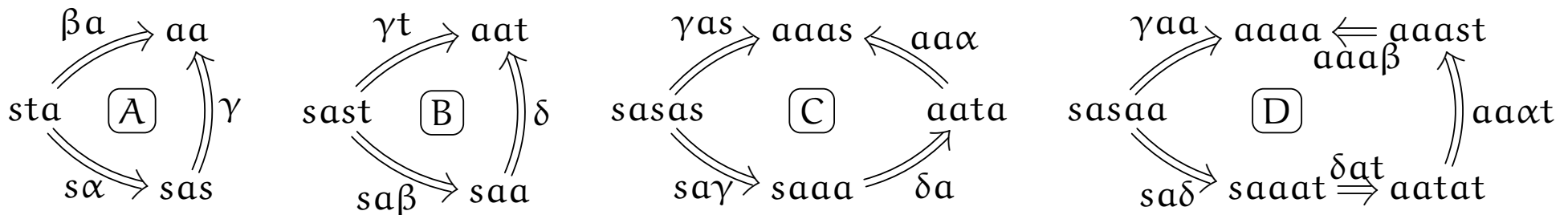


3.2. Complétion homotopique

Complétion homotopique : Σ terminant $\xrightarrow{\text{Knuth-Bendix} + \text{Squier}}$ $\mathcal{S}(\Sigma)$ convergent et cohérent

Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $\Sigma = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C, D \rangle$$



Proposition [G-M-Mimram 13] : $\mathcal{S}(\Sigma)$ est une présentation cohérente de B_3^+ .

3.3. Réduction homotopique (1)

Réduction homotopique en dimension 3 :

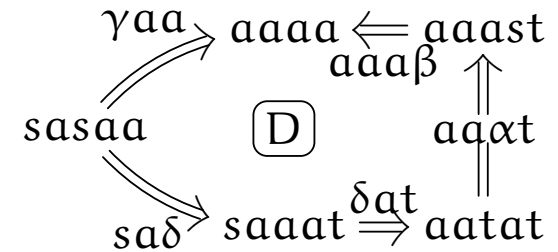
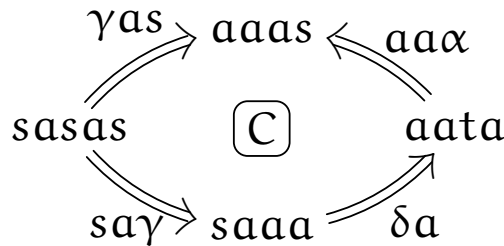
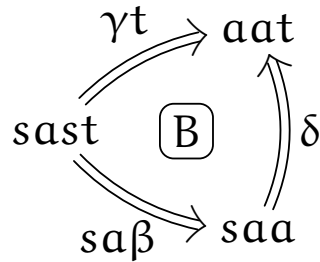
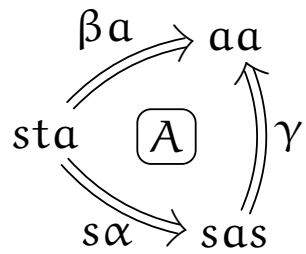
triples branchements critiques \rightsquigarrow relations entre les 3-cellules

3.3. Réduction homotopique (1)

Réduction homotopique en dimension 3 :

triples branchements critiques \rightsquigarrow relations entre les 3-cellules

Exemple : $\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C, D \rangle$

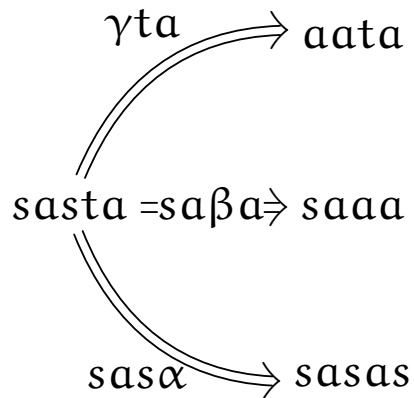
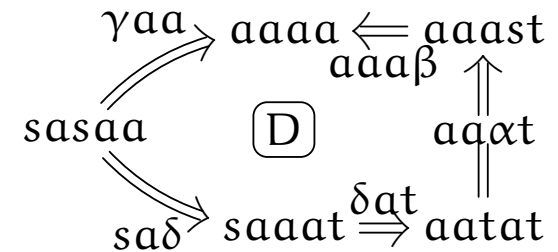
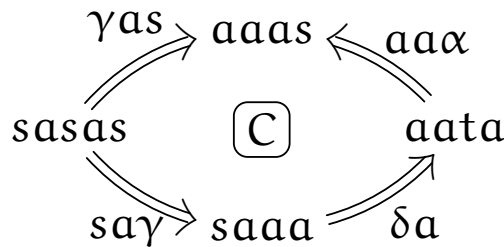
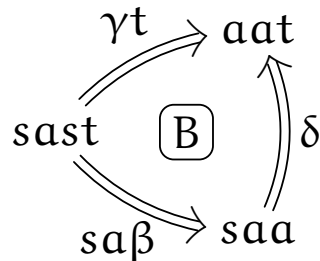
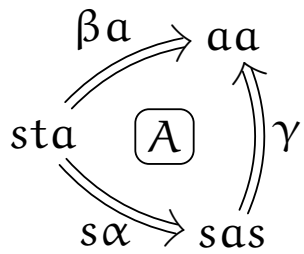


3.3. Réduction homotopique (1)

Réduction homotopique en dimension 3 :

triples branchements critiques \rightsquigarrow relations entre les 3-cellules

Exemple : $\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C, D \rangle$

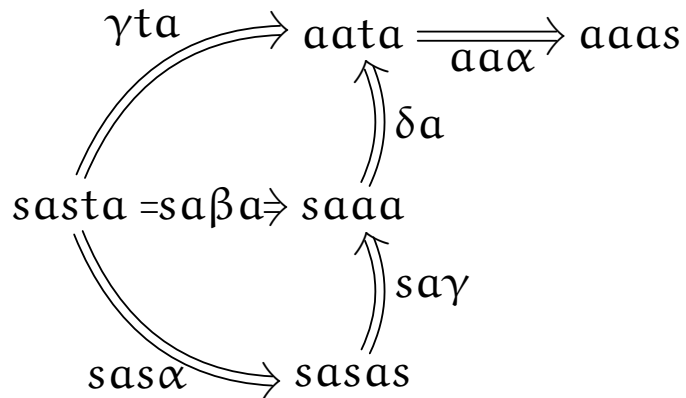
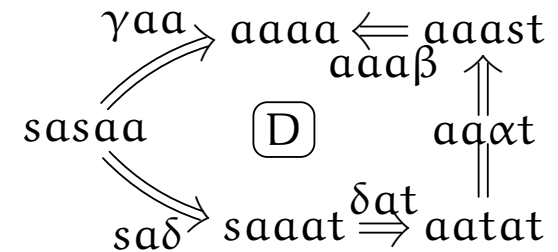
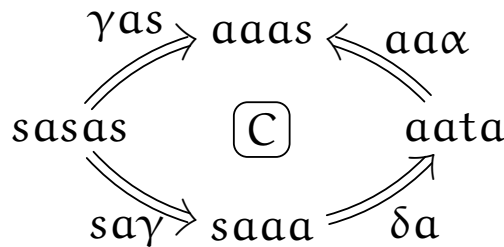
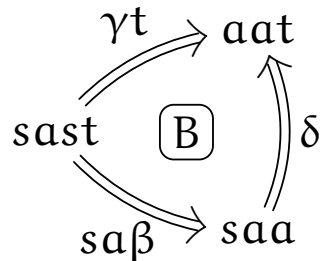
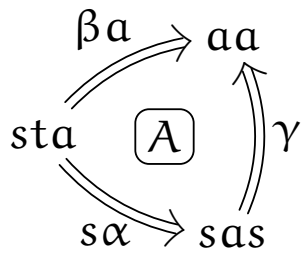


3.3. Réduction homotopique (1)

Réduction homotopique en dimension 3 :

triples branchements critiques \rightsquigarrow relations entre les 3-cellules

Exemple : $\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C, D \rangle$

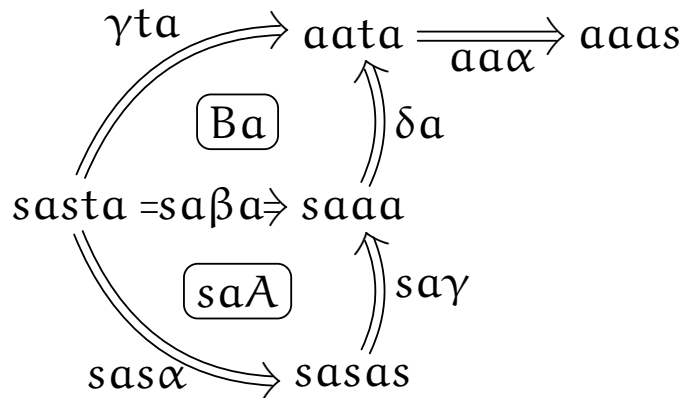
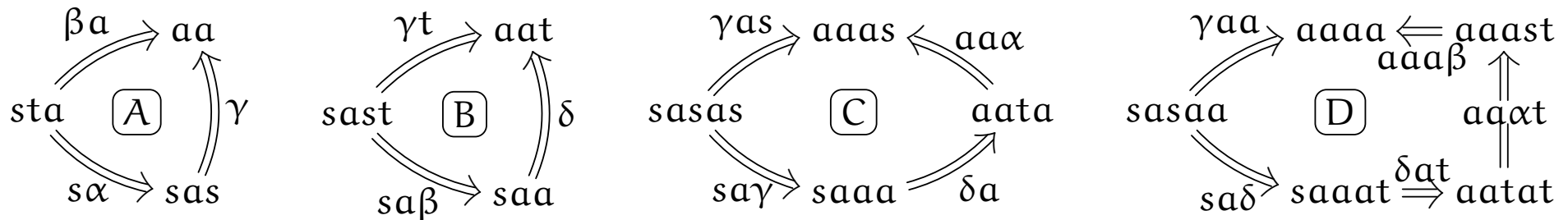


3.3. Réduction homotopique (1)

Réduction homotopique en dimension 3 :

triples branchements critiques \rightsquigarrow relations entre les 3-cellules

Exemple : $\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C, D \rangle$

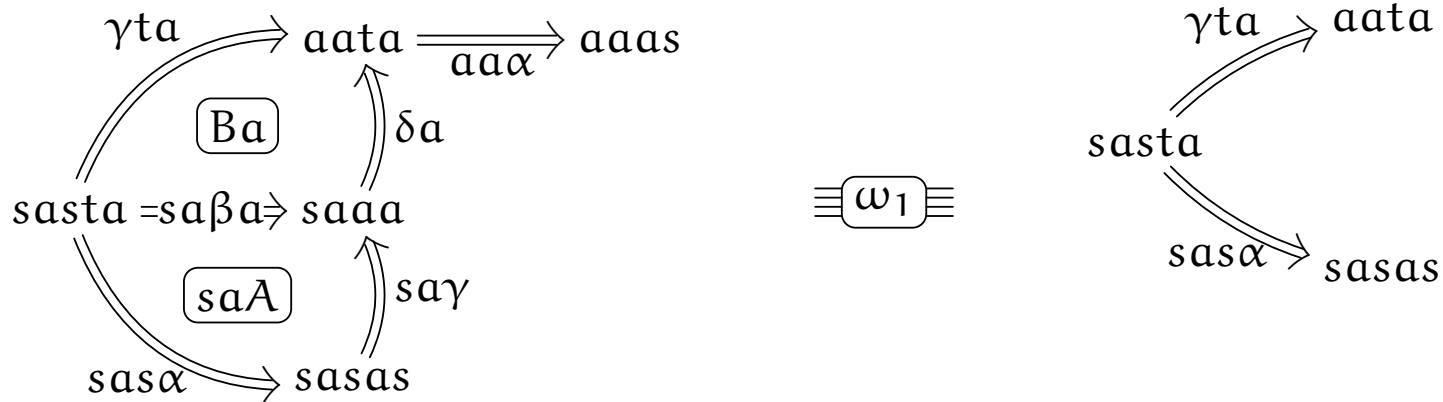
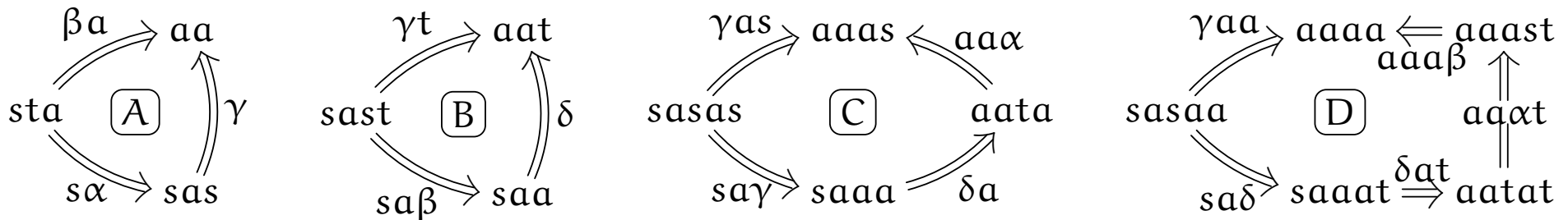


3.3. Réduction homotopique (1)

Réduction homotopique en dimension 3 :

triples branchements critiques \rightsquigarrow relations entre les 3-cellules

Exemple : $\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C, D \rangle$

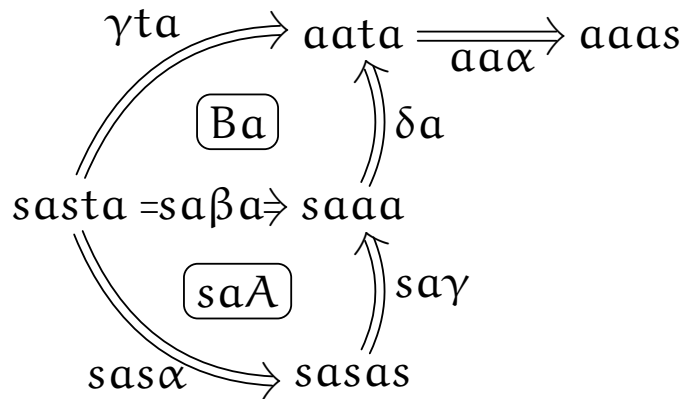
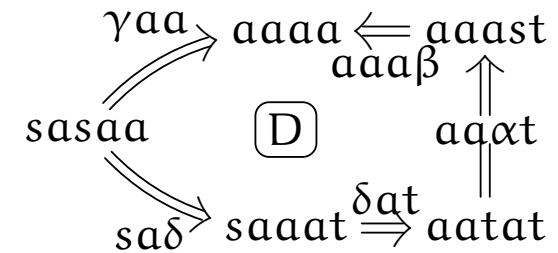
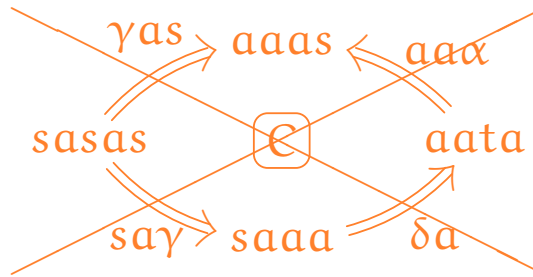
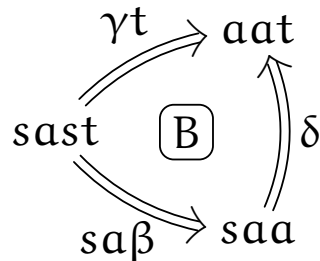
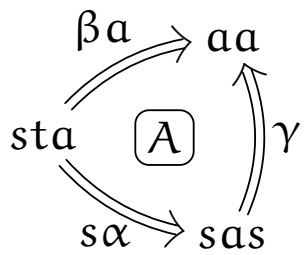


3.3. Réduction homotopique (1)

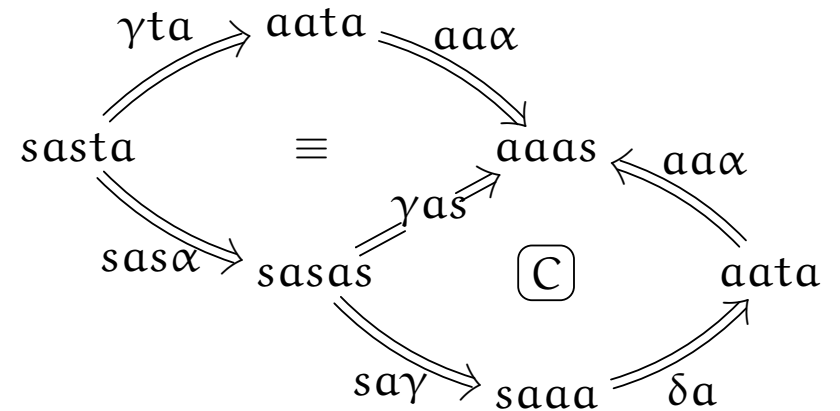
Réduction homotopique en dimension 3 :

triples branchements critiques \rightsquigarrow relations entre les 3-cellules

Exemple : $\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, \cancel{C}, D \rangle$



$\equiv \omega_1 \equiv$

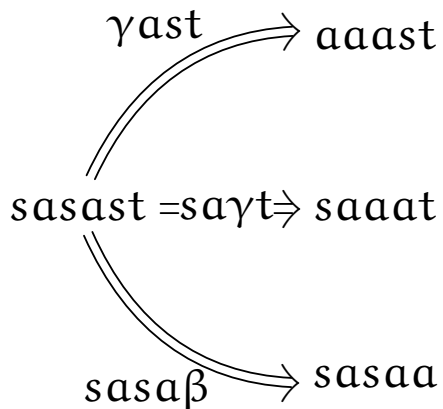
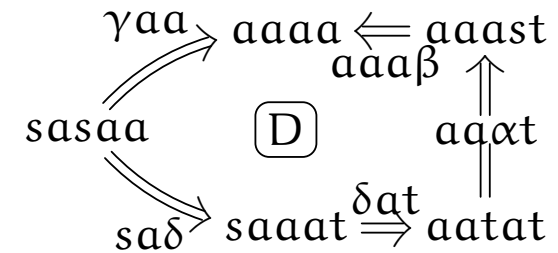
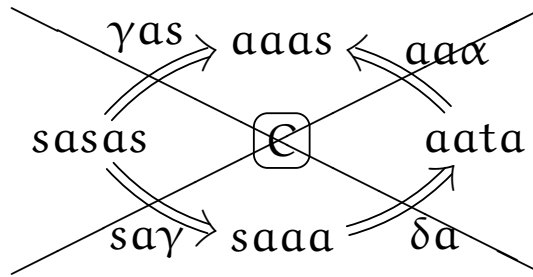
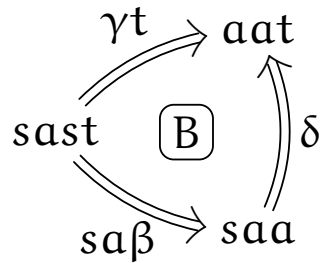
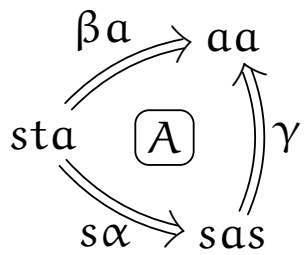


3.3. Réduction homotopique (1)

Réduction homotopique en dimension 3 :

triples branchements critiques \rightsquigarrow relations entre les 3-cellules

Exemple : $\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, \cancel{C}, D \rangle$

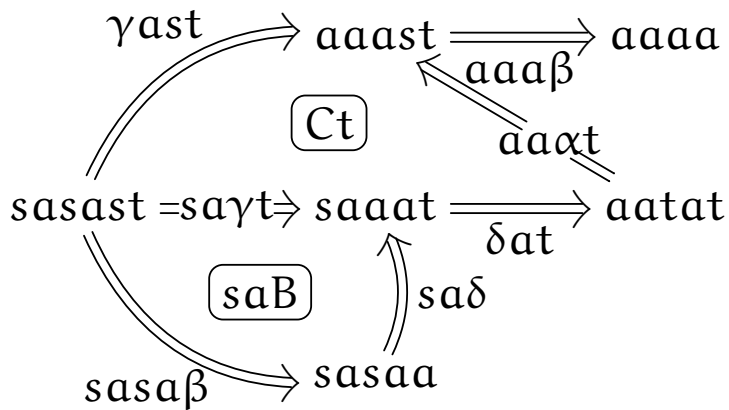
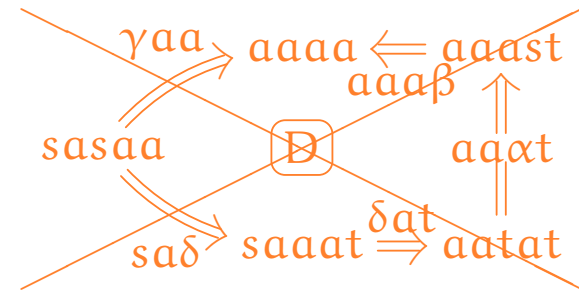
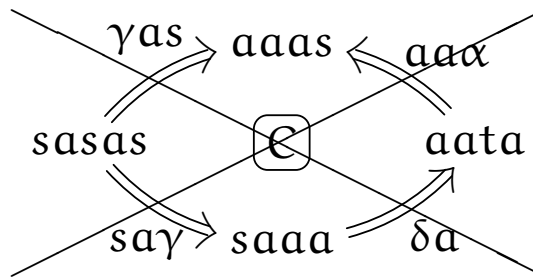
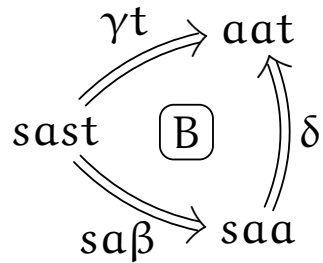
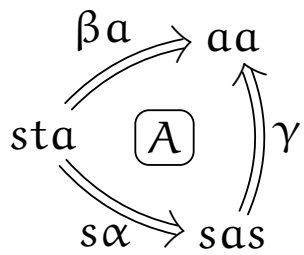


3.3. Réduction homotopique (1)

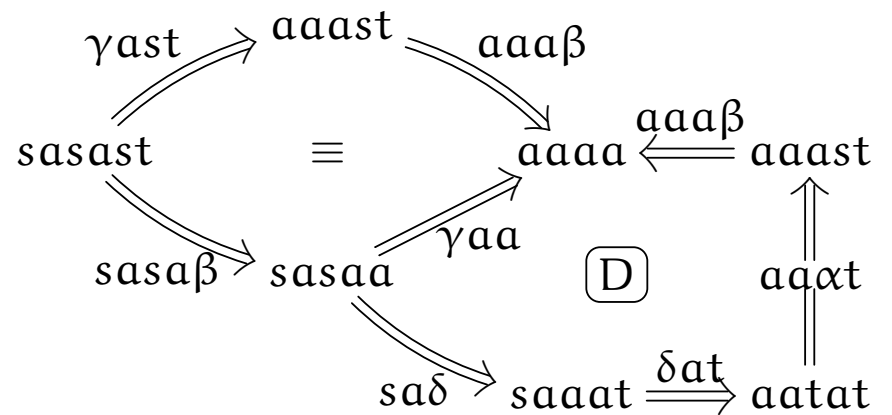
Réduction homotopique en dimension 3 :

triples branchements critiques \rightsquigarrow relations entre les 3-cellules

Exemple : $\mathcal{S}(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, \cancel{C}, \cancel{D} \rangle$



$\equiv \omega_2$

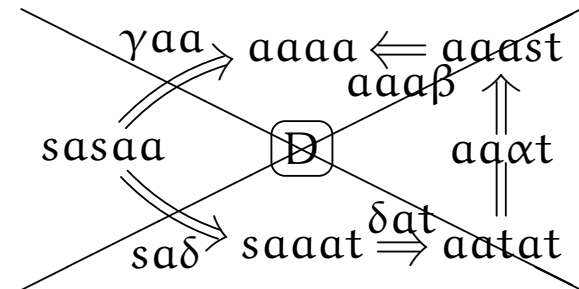
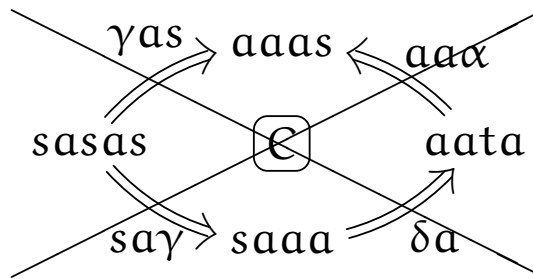
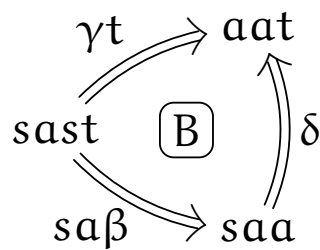
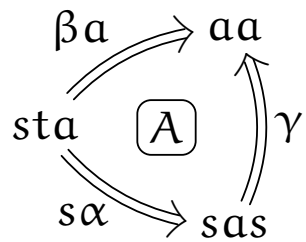


3.4. Réduction homotopique (2)

Réduction homotopique :

- dimension 2 : élimination des relations ajoutées par la complétion
- dimension 1 : élimination des générateurs redondants

Exemple : $S(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, \cancel{C}, \cancel{D} \rangle$

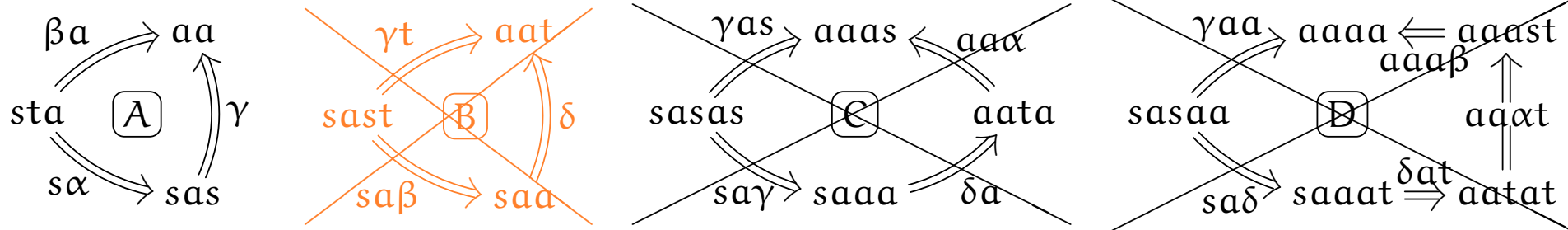


3.4. Réduction homotopique (2)

Réduction homotopique :

- dimension 2 : élimination des relations ajoutées par la complétion
- dimension 1 : élimination des générateurs redondants

Exemple : $S(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, \cancel{saa \xrightarrow{\delta} aat} \mid A, \cancel{B}, \cancel{C}, \cancel{D} \rangle$

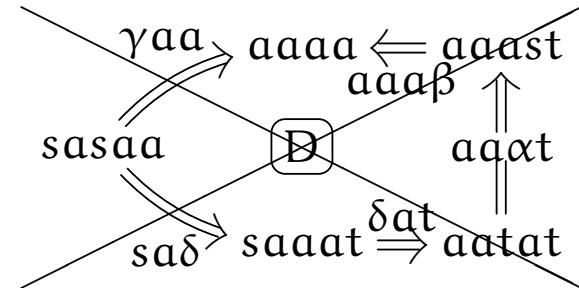
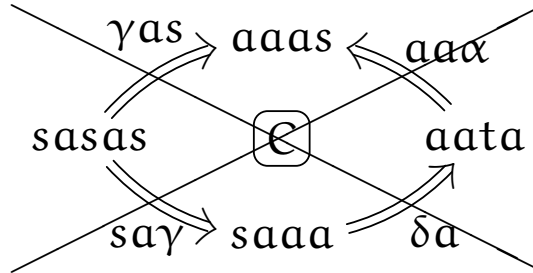
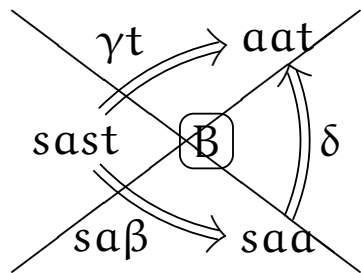
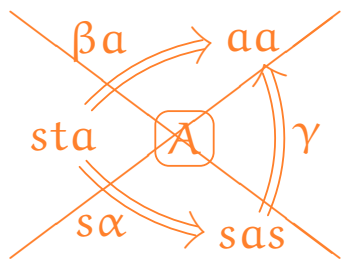


3.4. Réduction homotopique (2)

Réduction homotopique :

- dimension 2 : élimination des relations ajoutées par la complétion
- dimension 1 : élimination des générateurs redondants

Exemple : $S(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, \cancel{sas \xrightarrow{\gamma} aa}, \cancel{saa \xrightarrow{\delta} aat} \mid \cancel{A}, \cancel{B}, \cancel{C}, \cancel{D} \rangle$

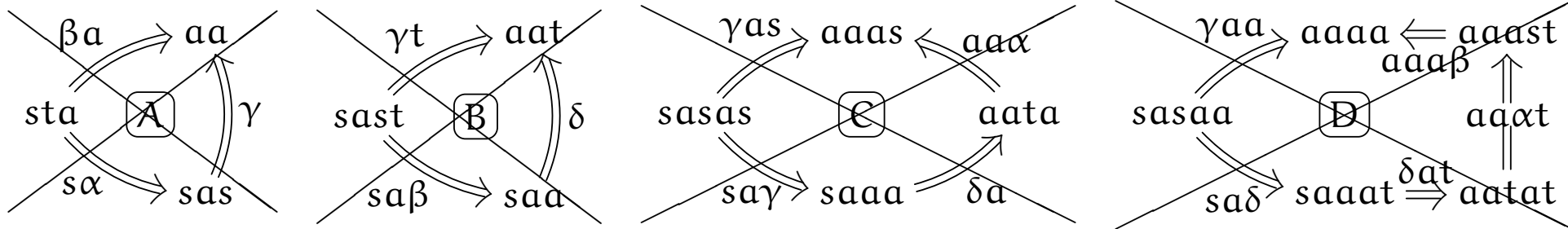


3.4. Réduction homotopique (2)

Réduction homotopique :

- dimension 2 : élimination des relations ajoutées par la complétion
- dimension 1 : élimination des générateurs redondants

Exemple : $S(\Sigma) = \langle s, t, \cancel{x} \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, \cancel{st} \xrightarrow{\beta} a, \cancel{sas} \xrightarrow{\gamma} aa, \cancel{saa} \xrightarrow{\delta} aat \mid \cancel{A}, \cancel{B}, \cancel{C}, \cancel{D} \rangle$

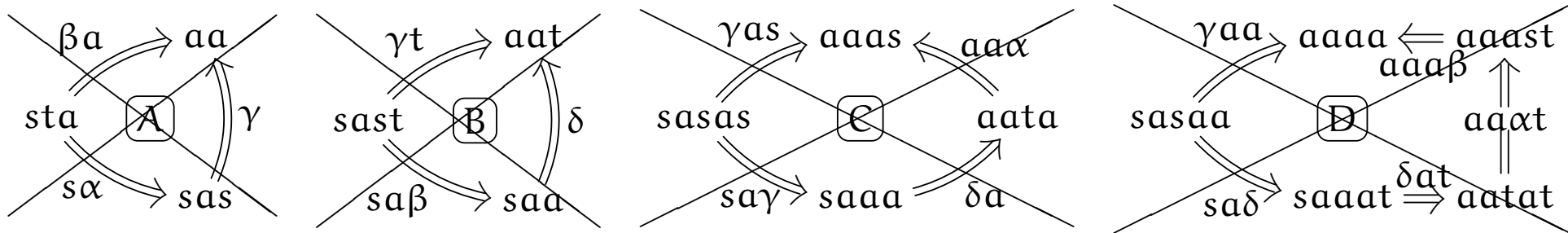


3.4. Réduction homotopique (2)

Réduction homotopique :

- dimension 2 : élimination des relations ajoutées par la complétion
- dimension 1 : élimination des générateurs redondants

Exemple : $S(\Sigma) = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid \cancel{A}, \cancel{B}, \cancel{C}, \cancel{D} \rangle$



$\mathbf{Art}_+(B_3^+) = \langle s, t \mid tst \xrightarrow{\alpha} sts \mid \emptyset \rangle$ présentation cohérente de B_3^+

Calcul : <http://www.pps.univ-paris-diderot.fr/~smimram/rewr>

- complétion-réduction homotopique
- heuristiques d'ajout automatique de générateurs en cours de complétion

3.5. Retour aux monoïdes et groupes d'Artin

Présentation de départ : présentation de Garside $\mathbf{Gar}(\mathcal{A})$

- $B_3^+ = \langle s, t, st, ts, sts \mid 6 \text{ relations} \rangle$
- $B_4^+ = \langle 23 \text{ générateurs} \mid 104 \text{ relations} \rangle$
- $E_8 = \langle 696729600 \text{ générateurs} \mid ??? \text{ relations} \rangle$

Complétion homotopique : $B_3^+ = \langle s, t, st, ts, sts \mid 14 \text{ relations} \mid 24 \text{ cellules} \rangle$

Réduction homotopique (1) : présentation cohérente de Garside $\mathbf{Gar}_+(\mathcal{A})$ [Digne 97]

- $B_3^+ = \langle s, t, st, ts, sts \mid 6 \text{ relations} \mid 2 \text{ cellules} \rangle$
- $B_4^+ = \langle 23 \text{ générateurs} \mid 104 \text{ relations} \mid 196 \text{ cellules} \rangle$

Réduction homotopique (2) : présentation cohérente d'Artin $\mathbf{Art}_+(\mathcal{A})$ [GGM 13]

- $B_3^+ = \langle s, t \mid sts = tst \mid \emptyset \rangle$
- $B_4^+ = \langle r, s, t \mid 3 \text{ relations} \mid \text{une seule 3-cellule} \rangle$
- $E_8 = \langle 8 \text{ générateurs} \mid 28 \text{ relations} \mid C_8^3 = 56 \text{ cellules} \rangle$