Contraintes sur un domaine fini

- On a pour toute variable un *choix fini* de ses valeurs.
- Une classe importante de domaine de contraintes.
- Utilisée pour modéliser des problèmes avec des choix.
- Ordonnancement, Emploi du temps, routage, etc.
- Beaucoup d'applications industrielles.

Plan de ce cours

Contraintes sur un domaine fini.

- Solutionneur “génère et teste”
- Solutionneur par retour en arrière
- Consistance d’arc et de nœuds
- Heuristiques
- Consistance de bornes
- Consistance généralisée

Dans ce cours on parle seulement du *solutionneur*. Dans le cours suivant on parlera de la programmation.

Problème de satisfaction de contraintes

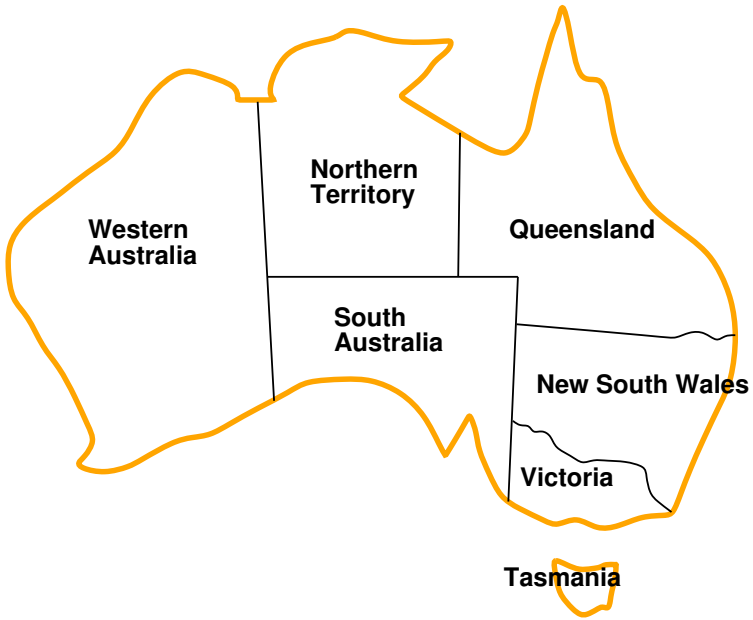
- Une contrainte C sur des variables $x_1, \ldots, x_n$
- Un domaine $D(x_i)$ pour chaque variable
- Une contrainte C est implicitement donnée par

$$C \wedge x_1 \in D(x_1) \wedge \cdots \wedge x_n \in D(x_n)$$

- Contrainte *binaire* : Ses contraintes simples contiennent au plus deux variables. Donne lieu à un *graphe de contraintes*.
- On écrit « $D(x) = \{c_1, \ldots, c_n\}$ » au lieu de « $x \in \{c_1, \ldots, c_n\}$ ».

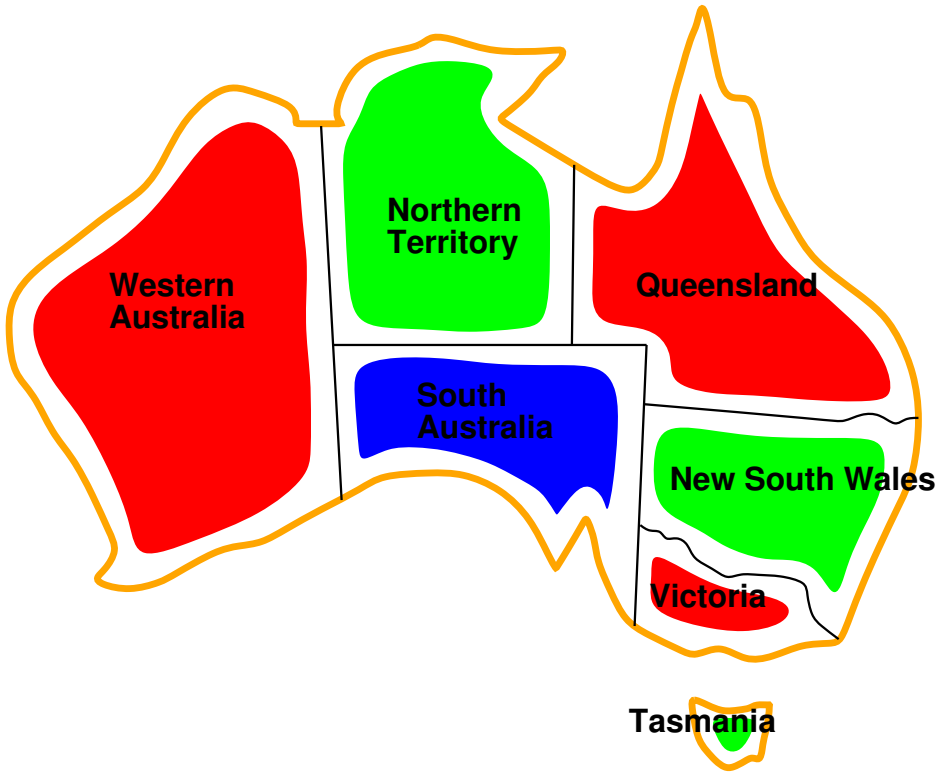
Exemple: Colorer une carte

Il y a trois couleurs. Des régions adjacentes doivent avoir des couleurs différentes.

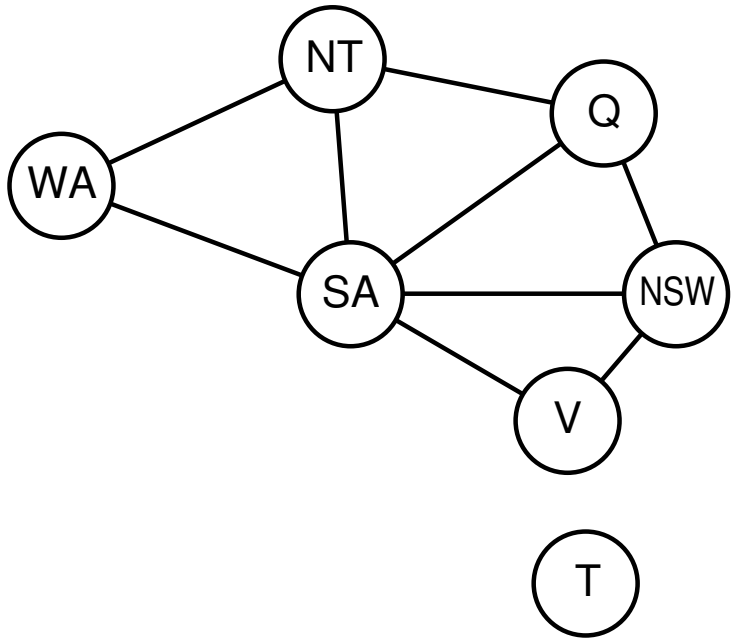


$WA \neq NT \wedge WA \neq SA \wedge NT \neq SA \wedge NT \neq Q \wedge SA \neq Q \wedge SA \neq V$
$\wedge NSW \neq SA \wedge NSW \neq Q \wedge NSW \neq V$
$D(WA) = D(NT) = D(SA) = D(Q) = D(V) = D(NSW) = D(T) =$
$\{rouge, jaune, bleu\}$

Exemple: Colorer une carte



Graphe de contraintes



Exemple: Les 4 reines

- Placer 4 reines sur un échiquier de taille 4x4 de sorte qu'aucune reine est en prise
- Quatre variables Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 qui représentent la ligne de la reine dans chaque colonne. Domaine de chaque variable: $\{1, 2, 3, 4\}$
- Les contraintes: $Q1 \neq Q2 \wedge Q1 \neq Q3 \wedge Q1 \neq Q4 \wedge$
  $Q2 \neq Q3 \wedge Q2 \neq Q4 \wedge Q3 \neq Q4$
- $Q1 \neq Q2 + 1 \wedge Q1 \neq Q3 + 2 \wedge Q1 \neq Q4 + 3 \wedge$
  $Q2 \neq Q3 + 1 \wedge Q2 \neq Q4 + 2 \wedge Q3 \neq Q4 + 1$
- $Q1 \neq Q2 - 1 \wedge Q1 \neq Q3 - 2 \wedge Q1 \neq Q4 - 3 \wedge$
  $Q2 \neq Q3 - 1 \wedge Q2 \neq Q4 - 2 \wedge Q3 \neq Q4 - 1$

Exemple: sac du contrebandier

- Contrebandier avec un sac de capacité 9.
- Il doit choisir des objets pour faire un profit d'au moins 30
objet	profit	poids
whisky	15	4
parfum	10	3
cigarettes	7	2

  $4W + 3P + 2C \leq 9 \wedge 15W + 10P + 7C \geq 30$
- Domaines des variables ?

Solutionneur génère et teste

- Le plus simple est d'énumérer les affectations possibles.
- Le solutionneur génère et teste :
  - Énumère une par une les valeurs des variables une par une
  - Quand *chaque* variable a une valeur, on teste si la contrainte est satisfaite ou pas.
- Très inefficace !
- On peut améliorer cette technique en testant à chaque fois, si l'affectation partielle entraîne déjà la non-satisfaisabilité : voir le transparent suivant.

Solutionneur simple par retour en arrière

- Le solutionneur simple par retour en arrière:
  - énumère une par une les valeurs des variables une par une
  - vérifie qu'aucune contrainte simple est fausse à chaque étape
  - On peut facilement tester la satisfaisabilité d'une contrainte simple sans variables.
  - *partsat*(C) retourne faux, si C n'est pas satisfaisable à cause d'une contrainte simple sans variables (close) qui n'est pas satisfaisable. Sinon *partsat*(C) retourne vrai.

Solutionneur par retour en arrière

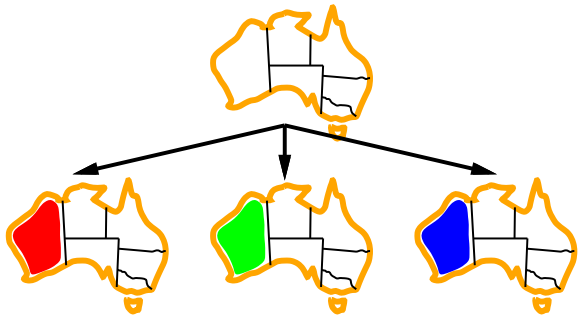
$partsat(C) = vrai$ ssi toute contrainte simple et close de C est vraie

$backsolve(C, D)$

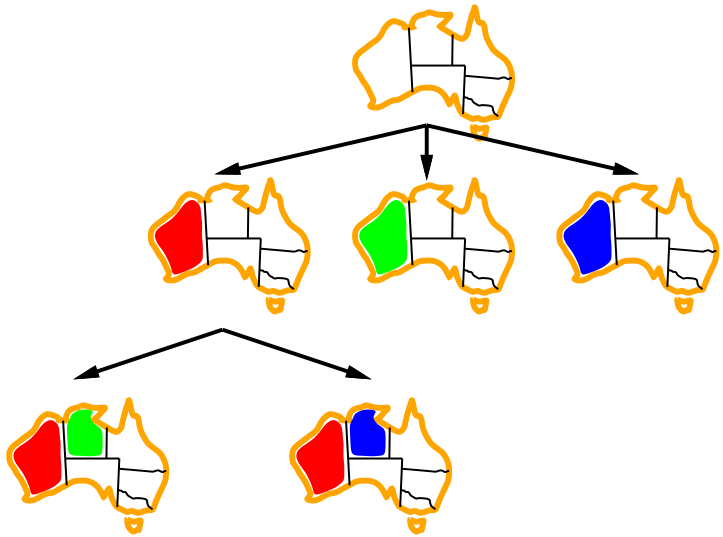
- Si $variables(C)$ est vide, alors retourne $partsat(C)$
- Choisir x dans $variables(C)$
- Pour chaque valeur d dans $D(x)$
  - Soit C_1 la contrainte C où x est remplacé par d
  - Si $partsat(C_1)$ alors
    si $backsolve(C_1, D)$ alors retourne *vraie*
- Retourne *faux*

Exemple retour en arrière

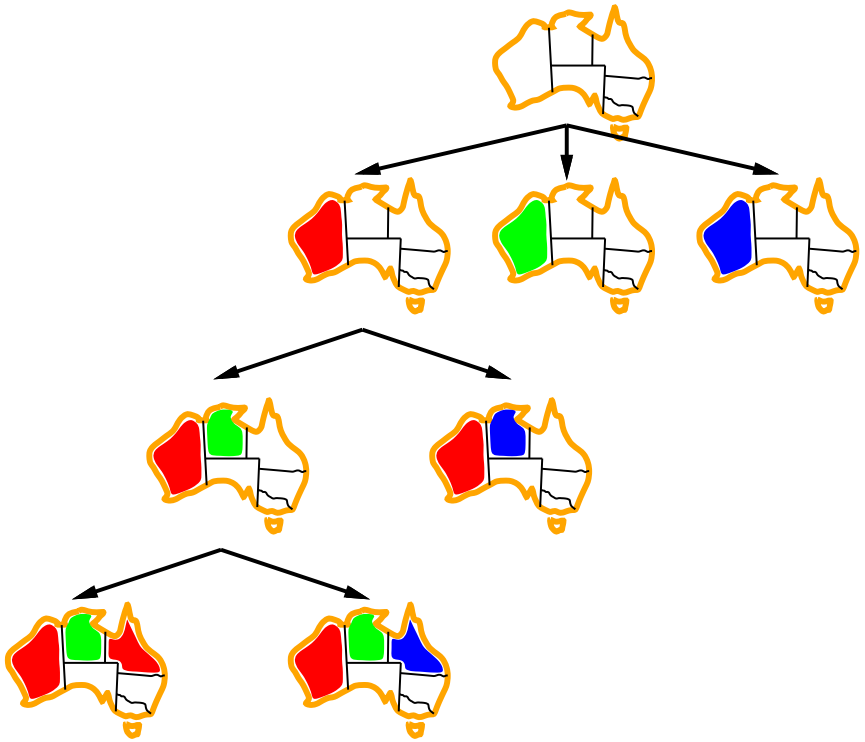
Exemple retour en arrière



Exemple retour en arrière



Exemple retour en arrière



Complexité des contraintes sur un domaine fini

- Satisfaisabilité de contraintes sur un domaine fini est NP-complet (même si on se restreint à des domaines de cardinalité 2, p.ex. satisfaisabilité de clauses propositionnelles: 3SAT).
- C'est-à-dire :
  - On ne connaît que des algorithmes avec complexité exponentielle au pire des cas.
  - Il est "fort probable" qu'il n'y a pas d'algorithme avec une meilleure complexité.
- Voir un cours de *algorithmique* ou *calculabilité et complexité*.

Consistance de nœud et d'arc

- Idée: Trouver un CSP équivalent au CSP d'origine qui a des domaines de variables plus petits.
- C'est le principe de la *simplification de contraintes*, appliqué aux domaines des variables.
- **On considère les contraintes simples une par une.**
- Consistance de nœud : $(\mathit{variables}(c) = \{x\})$: enlever chaque valeur du domaine de x qui rend la contrainte simple c insatisfaisable.
- Consistance d'arc : $(\mathit{variables}(c) = \{x, y\})$: enlever chaque valeur de $D(x)$ pour laquelle il n'y a pas de valeur dans $D(y)$ qui satisfait la contrainte simple c et vice-versa.

Consistance de nœud

- Une contrainte simple c est nœud-consistante avec domaine D, si
  - soit $|\mathit{variables}(c)| \neq 1$;
  - soit $\mathit{variables}(c) = \{x\}$, et pour chaque d dans $D(x)$, $\{x \leftarrow d\}$ est une solution de c.
- Un CSP est nœud-consistant, si chaque contrainte simple est nœud-consistante.

Comment obtenir un CSP nœud-consistant ?

nœudcons(C, D)

- Pour chaque contrainte simple c dans C
  - $D :=$ *nœudconssimple*(c, D)
- retourne D

nœudconssimple(c, D)

- Si $|\mathit{variables}(c)| = 1$ alors
  - Soit $\{x\} = \mathit{variables}(c)$
    $D(x) := \{d \in D(x) | \{x \leftarrow d\}$ est une solution de $c\}$
- retourne D

Arc-consistance

- Une contrainte simple est arc-consistante avec domaine D, si
  - soit $|variables(c)| \neq 2$;
  - soit $variables(c) = \{x, y\}$ et
    - ★ pour chaque d dans $D(x)$, il y a $e \in D(y)$ tel que $\{x \leftarrow d, y \leftarrow e\}$ est une solution de c
    - ★ et analogue pour y.
- Un CSP est arc-consistant, si chaque contrainte simple est arc-consistante.

Comment obtenir un CSP arc-consistant ?

arcconssimple(c, D)

- si $|\mathit{variables}(c)| = 2$ alors
  - $D(x) := \{d \in D(x) | \exists e \in D(y)$ t.q. $\{x \leftarrow d, y \leftarrow e\}$ est une solution de $c\}$
  - $D(y) := \{e \in D(y) | \exists d \in D(x)$ t.q. $\{x \leftarrow d, y \leftarrow e\}$ est une solution de $c\}$
- retourne D

Enlève des valeurs non arc-consistantes avec c

Comment obtenir un CSP arc-consistant ?

$arccons(C, D)$

- Répète
  - $W := D$
  - Pour chaque contrainte simple c de C
    - ⋆ $D := arcconssimple(c, D)$
- jusqu'à $W = D$
- retourne D

Arc-consistance : calcul d'un point fixe

- Remarquer la boucle : le traitement d'une contrainte simple peut déclencher qu'une autre contrainte simple est à traiter de nouveau.
- Exemple:

$$X_1 < X_2 \wedge X_2 < X_3 \wedge X_3 < X_4$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

(sera fait au tableau)

Utiliser nœud et arc-consistance

- On peut définir des solutionneurs.
- Deux types de domaines importants :
  - domaine *faux* : une variable a un domaine vide
  - domaine *simple* : toutes les variables ont un domaine singleton (de taille un)
- On suppose qu'on a un test de satisfaisabilité ($satisfaisable(C, D)$) sur des CSPs avec des domaines simples.

Solutionneur nœud et arc-consistance

Solutionneur incomplet

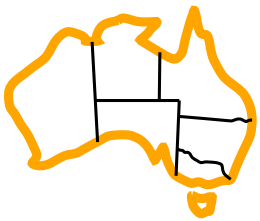
- $D := \mathit{nœudcons}(C, D)$
- $D := \mathit{arccons}(C, D)$
- Si D est un domaine faux, alors retourne *faux*
- Si D est un domaine simple, alors retourne $\mathit{satisfaisable}(C, D)$
- sinon retourne *inconnu*

Comment définir un solutionneur complet en utilisant arc et nœud-consistance ?

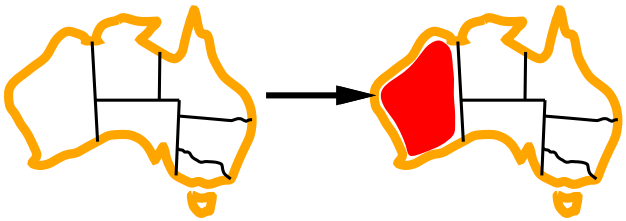
Retour en arrière avec consistance

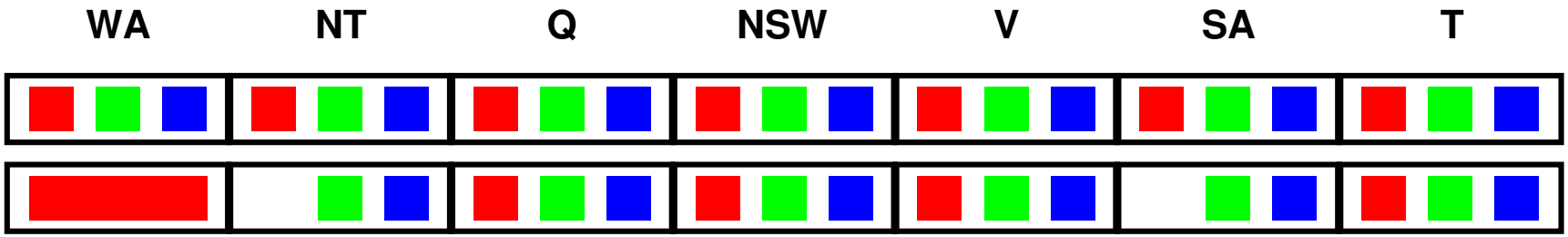
- Combiner le solutionneur par retour en arrière avec consistance.
- Appliquer nœud (et/ou) arc-consistance avant de lancer le solutionneur par retour en arrière et après chaque fois qu'une variable est affectée par le solutionneur.

Exemple avec nœud-consistance uniquement

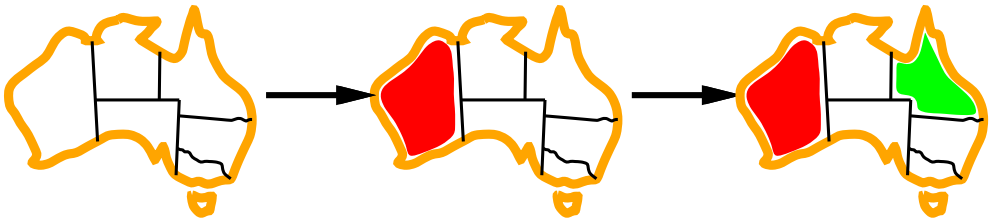


Exemple avec nœud-consistance



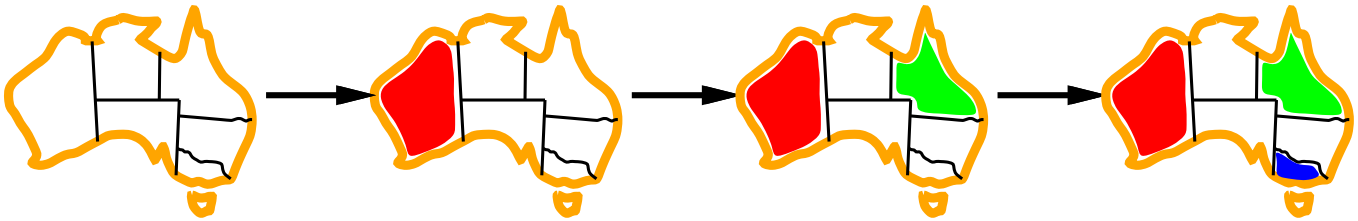


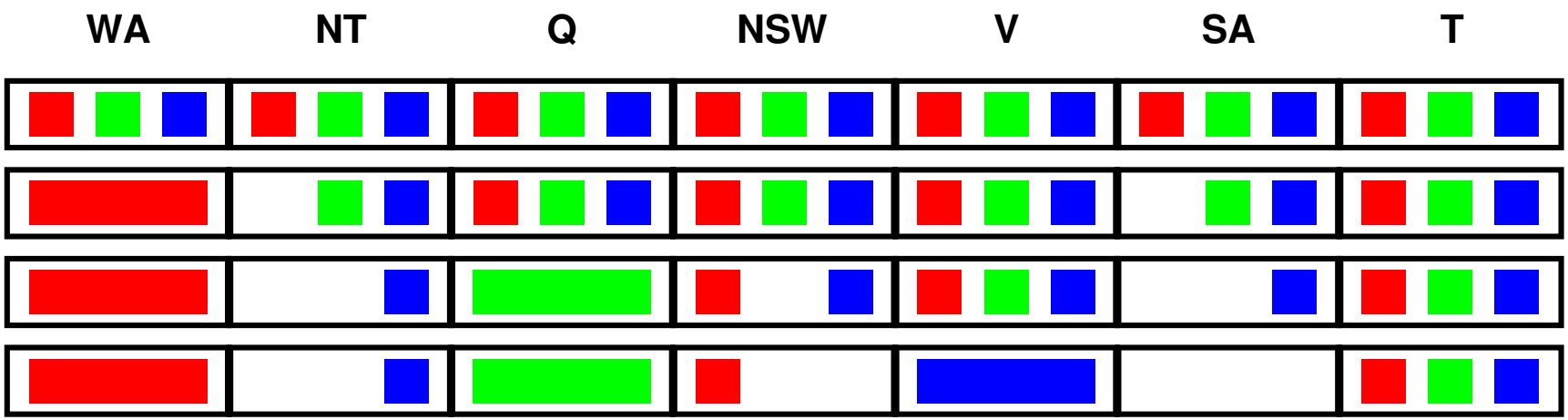
Exemple avec nœud-consistance



Ce problème est-il arc-consistant ?

Exemple avec nœud-consistance



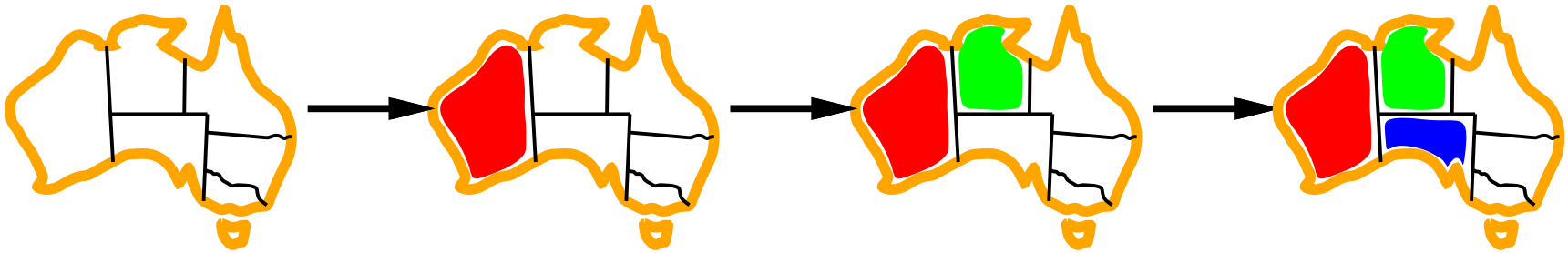


Heuristiques

- On peut utiliser des heuristiques pour choisir la variable à affecter et la valeur affectée.
- statique/dynamique

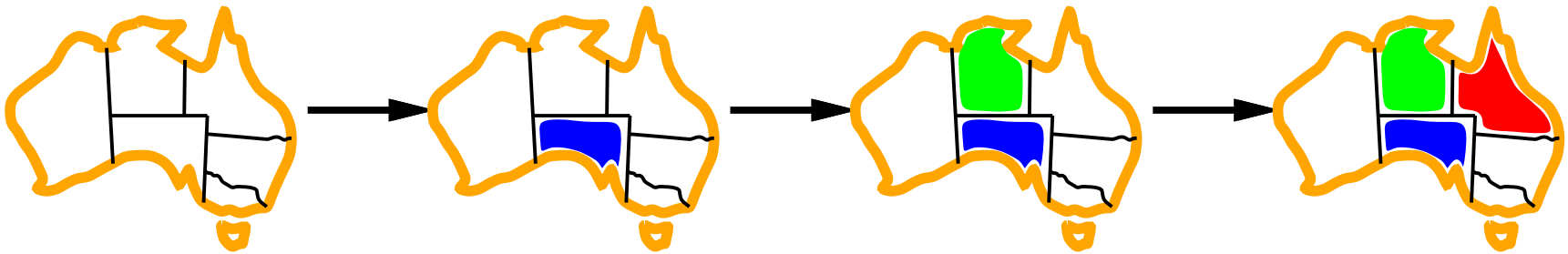
La variable la plus contrainte

- Choisir la variable avec le plus petit nombre de valeurs légales



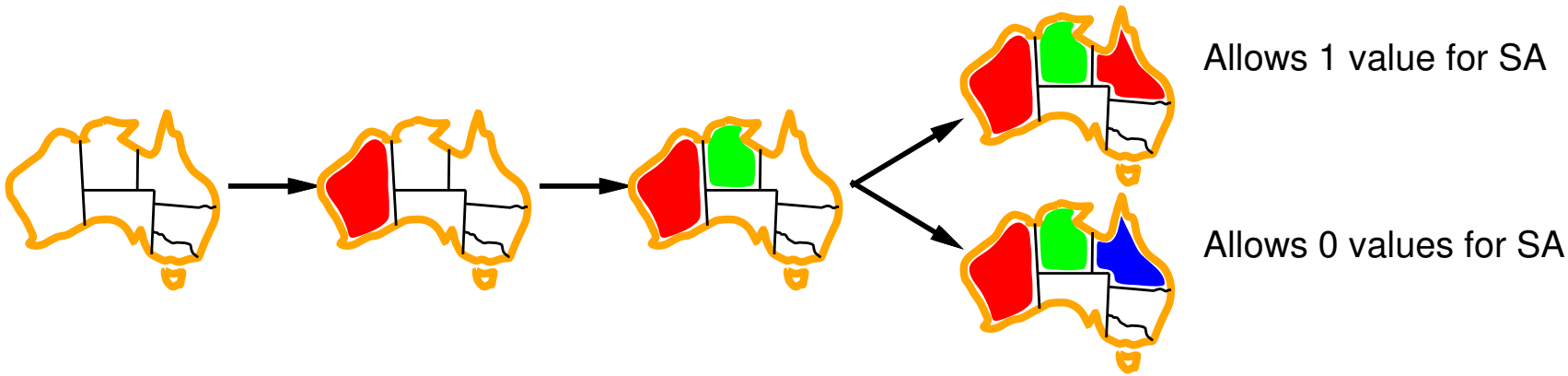
La variable la plus contraignante

- En cas d'égalité pour la variable la plus contrainte
- Choisir la variable qui a le plus de contraintes avec les variables qui restent



La valeur la moins contraignante

- Pour une variable, choisir la valeur qui contraint le moins possible les variables qui restent



Consistance pour des contraintes avec plus de 2 variables

- Quoi faire avec des contraintes avec plus de 2 variables ?
- Consistance d'hyper-arc: étendre l'arc-consistance à un nombre arbitraire de variables
- Déterminer la hyper-arc-consistance est NP-difficile

Consistance de bornes

- CSP arithmétique: les contraintes sont sur des entiers
- intervalles: $[l..u]$ représente l'ensemble $\{l, l+1, \ldots, u\}$
- Idée: Utiliser la consistance sur les réels et examiner seulement les bornes (inférieurs et supérieurs) du domaine de chaque variable
- Définir $min(D, x)$ comme l'élément minimum dans le domaine de x, pareil $max(D, x)$

Consistance de bornes

- Une contrainte simple c est bornes-consistante avec domaine D, si pour chaque variable x dans $variables(c)$
  - ils existent des réels $d_1, \ldots, d_k$ pour les autres variables $x_1, \ldots, x_k$ tel que
    - $min(D, x_j) \leq d_j \leq max(D, x_j)$ pour tout j et
    - $\{x \leftarrow min(D, x), x_1 \leftarrow d_1, \ldots, x_k \leftarrow d_k\}$ est une solution de c
  - ils existent des réels $d'_1, \ldots, d'_k$ pour les autres variables $x_1, \ldots, x_k$ tel que
    - $min(D, x_j) \leq d'_j \leq max(D, x_j)$ pour tout j et
    - $\{x \leftarrow max(D, x), x_1 \leftarrow d'_1, \ldots, x_k \leftarrow d'_k\}$ est une solution de c
- Un CSP arithmétique est bornes-consistant, si toutes ses contraintes simples le sont

Comment obtenir un CSP bornes-consistant ?

- Étant donné un domaine D, on doit modifier les bornes, de sorte que le résultat est bornes-consistant
- Utilisation de règles de propagation
- Exemple:
  - $X = Y + Z$ équivalent à $Y = X - Z$ et $Z = X - Y$
  - Raisonner avec *max* et *min*
  - $X \geq min(D, Y) + min(D, Z)$, $X \leq max(D, Y) + max(D, Z)$
  - $Y \geq min(D, X) - max(D, Z)$, $Y \leq max(D, X) - min(D, Z)$
  - $Z \geq min(D, X) - max(D, Y)$, $Z \leq max(D, X) - min(D, Y)$
  - permettent d'ajuster les domaines

Exemple

- $X = Y + Z$, $D(X) = [4..8]$, $D(Y) = [0..3]$, $D(Z) = [2..2]$
- Les règles de propagation donnent:
  - $(0 + 2 =)2 \leq X \leq 5 (= 3 + 2)$
  - $(4 - 2 =)2 \leq Y \leq 6 (= 8 - 2)$
  - $(4 - 3 =)1 \leq Z \leq 8 (= 8 - 0)$
- Les domaines peuvent être réduits:
  $D(X) = [4..5]$, $D(Y) = [2..3]$, $D(Z) = [2..2]$

Autres règles de propagation

- $4W + 3P + 2C \leq 9$
- $W \leq \frac{9}{4} - \frac{3}{4}min(D, P) - \frac{2}{4}min(D, C)$
- $P \leq \frac{9}{3} - \frac{4}{3}min(D, W) - \frac{2}{3}min(D, C)$
- $C \leq \frac{9}{2} - \frac{4}{2}min(D, W) - \frac{3}{2}min(D, P)$
- Étant donné un domaine initial $D(W) = [0..9], D(P) = [0..9], D(C) = [0..9]$ on détermine que $W \leq \frac{9}{4}$, $P \leq \frac{9}{3}, C \leq \frac{9}{2}$,
- nouveau domaine: $D(W) = [0..2], D(P) = [0..3], D(C) = [0..4]$

Inégalités $Y \neq Z$

- Contrairement à l'arc-consistance, Les inégalités donnent des règles de propagation très faibles
- cela est du au fait qu'on considère uniquement les bornes des intervals
- Seulement si une de deux côtés prend une valeur fixe qui est égale au minimum ou maximum de l'autre il y a propagation
- $D(Y) = [2..4], D(Z) = [2..3]$ pas de propagation
- $D(Y) = [2..4], D(Z) = [3..3]$ pas de propagation
- $D(Y) = [2..4], D(Z) = [2..2]$ propagation
  $D(Y) = [3..4], D(Z) = [2..2]$

Algorithme de bornes consistance

- Rendre une seule contrainte simple borne consistante peut déjà entraîner plusieurs applications de règles de propagation
  - Exemple (au tableau):
    $3X = 2Y$ avec $D(X) = [0..5]$ et $D(Y) = [0..8]$
- *bornescons*(C, D): Appliquer les règles de propagation pour chaque contrainte simple de C, jusqu'a ce qu'il n'y a plus de changement dans les domaines D.
- On ne réexamine pas une contrainte simple, si les domaines de ses variables n'ont pas changé.

Solutionneur bornes consistance

- $D := \mathit{bornescons}(C, D)$
- Si D est un domaine faux, alors retourne *false*
- Si D est un domaine simple, alors retourne $\mathit{satisfaisable}(C, D)$
- sinon retourne *inconnu*

Solutionneur par retour en arrière avec bornes consistance

- Appliquer bornes consistance avant de lancer le solutionneur par retour en arrière et à chaque fois qu'une variable est affectée par le solutionneur retour en arrière.

Exemple retour en arrière avec bornes consistance

- Problème du sac du contrebandier
- $4W + 3P + 2C \leq 9 \wedge 15W + 10P + 7C \geq 30$
- Domaines initiaux : $D(W) = [0..9]$, $D(P) = [0..9]$, $D(C) = [0..9]$
- Bornes consistance sur la première contrainte donne: $D(W) = [0..2]$, $D(P) = [0..3]$, $D(C) = [0..4]$
- On essaie $W = 0$. Ça donne : $D(W) = [0..0]$, $D(P) = [1..3]$, $D(C) = [0..3]$
- On essaie $P = 1$. Ça donne : $D(W) = [0..0]$, $D(P) = [1..1]$, $D(C) = [3..3]$ et on a trouvé une solution.
- On peut aussi chercher les autres solutions

Consistance généralisée

- On peut combiner les trois consistances (nœud, arc, bornes) vues jusqu'à présent.
- Toutes ses méthodes utilisent les contraintes simples une par une.
- On peut considérer des contraintes simples "complexes" qui sont une conjonction de contraintes simples avec un mécanisme de propagation spécial.
- Exemple: $\mathit{alldifferent}(\{V_1, \ldots, V_n\})$
- $\mathit{alldifferent}(\{X, Y, Z\})$ signifie $X \neq Y \wedge Y \neq Z \wedge X \neq Z$
- Arc-consistant avec $D(X) = \{1, 2\}$, $D(Y) = \{1, 2\}$, $D(Z) = \{1, 2\}$
- Mais il n'y a pas de solution.

Consistance pour alldifferent

- Soit c de la forme $\mathit{alldifferent}(V)$
- Tant qu'il existe $v \in V$ avec $D(V) = \{d\}$
  - $V := V - \{v\}$
  - Pour chaque $v' \in V$
    - $D(v') := D(v') - \{d\}$
- $DV := \bigcup_{v \in V} D(v)$
- Si $|V| > |DV|$ alors retourne *domaine faux*
- retourne D

Exemples alldifferent

- *alldifferent*$(\{X, Y, Z\})$ avec $D(X) = \{1, 2\}$, $D(Y) = \{1, 2\}$, $D(Z) = \{1, 2\}$
- L'algorithme retourne *faux*
- *alldifferent*$(\{X, Y, Z, T\})$ avec $D(X) = \{1, 2\}$, $D(Y) = \{1, 2\}$, $D(Z) = \{1, 2\}$, $D(T) = \{2, 3, 4, 5\}$
- L'algorithme ne détecte pas le problème
- On peut utiliser des algorithmes plus compliqués pour cela.

Exemple d'utilisation de alldifferent

		9			1	6	2	
5	7			2	8		3	
3			7					4
8	9			7		4		
	6		5		3		9	
		1		9			7	6
6					7			8
	4		1	3			6	5
	2	7	6			9		

Sudoku

- Le problème du Sudoku consiste à remplir une grille de sorte que chaque ligne, chaque colonne et chaque carré contiennent les chiffres 1 à 9.
- Pour modéliser ce problème on peut utiliser alldifferent. Comment ?