Méthode de Fourier-Motzkin

- Solutionneur pour les inéquations linéaires sur les rationnels/réels
- du à Joseph Fourier et Theodore Motzkin

Problème

- Donnée: une contrainte d'inéquations (non-strictes) sur les rationnels ou réels (conjonction d'inéquations)
- Question: Est-ce que la contrainte est satisfaisable ?
- Exemple: Construction de la maison
- Autre exemple:

$$
\begin{array}{rcl}
3y - 2 & \leq & -2x \\
-y & \geq & -x - 1 \\
x & \leq & 5 \\
y & \geq & 1
\end{array}
$$

Exemple

- Idée: Transformer la contrainte en une contrainte équi-satisfaisable avec une variable en moins
- On choisit x et réécrit les contraintes de sorte que x apparaisse seule et on regroupe les $\leq$ et les $\geq$ pour x:

$$\begin{array}{lcl} x & \leq & -\frac{3}{2}y+1 \\ x & \leq & 5 \\ x & \geq & y-1 \\ y & \geq & 1 \end{array}$$

- Donc on doit avoir $y-1 \leq min(-\frac{3}{2}y+1, 5)$
- On élimine x en combinant tous les termes plus petits que x avec ceux plus grands.
- On garde les inéquations sans x.

Exemple

$$
\begin{aligned}
x &\leq -\frac{3}{2}y + 1 \\
x &\leq 5 \\
x &\geq y - 1 \\
y &\geq 1
\end{aligned}
$$

devient

$$
\begin{aligned}
y - 1 &\leq -\frac{3}{2}y + 1 \\
y - 1 &\leq 5 \\
y &\geq 1
\end{aligned}
$$

Exemple

$$\begin{aligned} y-1 &\leq -\frac{3}{2}y+1 \\ y-1 &\leq 5 \\ y &\geq 1 \end{aligned}$$

- On continue avec y:

$$\begin{aligned} y &\leq \frac{4}{5} \\ y &\leq 6 \\ y &\geq 1 \end{aligned}$$

Exemple

$$
\begin{aligned}
y &\leq \frac{4}{5} \\
y &\leq 6 \\
y &\geq 1
\end{aligned}
$$

- On élimine y:

$$
\begin{aligned}
1 &\leq \frac{4}{5} \\
1 &\leq 6
\end{aligned}
$$

- C'est faux. Donc, la contrainte d'origine n'est pas satisfaisable.

En général

- Deux contraintes c_1 et c_2 sont dites équi-satisfaisables si:
  si c_1 est satisfaisable, alors aussi c_2 et vice-versa.
  ATTENTION: équi-satisfaisables n'est pas équivalentes
- Soit c une contrainte linéaire d'inéquations non-strictes et x une variable de c
- On réécrit c dans la forme $c_1 \wedge \cdots \wedge c_k \wedge c'_1 \wedge \cdots \wedge c'_{k'} \wedge c''_1 \wedge \cdots \wedge c''_{k''}$ (k, k' et k'' peuvent être 0) de sorte que
  - les c_i soient de la forme $x \leq t$ (avec $x \notin \mathcal{V}(t)$)
  - les c'_i soient de la forme $x \geq t'$ (avec $x \notin \mathcal{V}(t')$)
  - les c''_i ne contiennent pas x
- On obtient une contrainte c' à partir de c en prenant toutes les inéquations c''_i et toutes les inéquations $t' \leq t$ ou t est un terme des c_i et t' un terme des c'_i.
  - S'il n'y a pas de c_i ou de c'_i, on n'obtient que les c''_i
- c et c' sont equi-satisfaisables et c' contient une variable de moins que c

En général

- Il est facile de décider si une contrainte d'inéquations sans variable est satisfaisable.
- Étant donné une contrainte d'inéquations c on la transforme en contrainte equi-satisfaisable avec une variable de moins.
- On itère ce processus jusqu'à-ce qu'on obtienne une contrainte c_v sans variables
- La contrainte c d'origine est satisfaisable si et seulement si c_v est satisfaisable.

Remarques

- Est-ce que cette méthode est efficace ?
- Comment traiter des contraintes avec équations et inéquations ?
- Comment traiter des inéquations strictes ($<$) ?
- Comment récupérer une solution, si la contrainte est satisfaisable ?
- Comment faire sur les entiers ?
  - Est-ce que $3x \leq 2 \wedge 3x \geq 1$ est satisfaisable sur les rationnelles ? sur les entiers ?

Exercice

Considérer la contrainte (conjonction) d'inéquations suivante:

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & x \\ 0 & \leq & y \\ -x-y & \leq & 2 \\ -x+y & \geq & 3 \\ x+2y & \leq & 8 \end{array}$$

- Visualiser la contrainte en dessinant un plan avec chaque demi-plan correspondant à une contrainte simple
- Est-ce que la contrainte est satisfaisable ?
- Appliquer la méthode de Fourier-Motzkin

Exercice

Considérer la contrainte (conjonction) d'inéquations suivante:

$$\begin{aligned} x + y &\leq 3z \\ y - z &\leq 5 \\ -x - y &\leq 0 \\ -x + z &\geq -3 \\ x &\leq 8 \\ u &\leq -10 + 2x + 3y + 5z \end{aligned}$$

- Appliquer la méthode de Fourier-Motzkin (Attention à l'ordre des variables)
- Donner une solution