Graphes triangulés

Michel Habib
M1 Algo Avancé 2011

16 février 2011

Plan

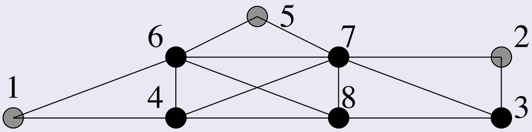
1. Reconnaissance des graphes triangulés ou chordaux
2. Applications

1 Reconnaissance des graphes triangulés ou chordaux

2 Applications

Sommets simpliciaux

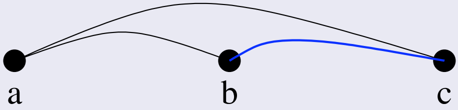
Definition



Un sommet est simplicial si son voisinage est une clique (graphe complet).

Ordre d'élimination simplicial

$\sigma = [x_1 \dots x_i \dots x_n]$ est un ordre d'élimination simplicial si x_i est simplicial dans le sous-graphe $G_i = G[\{x_i \dots x_n\}]$

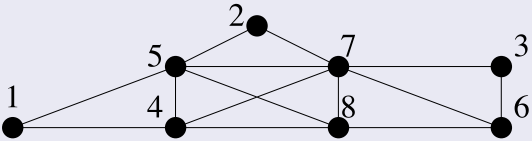


Propriétés des graphes chordaux

1. La classe des graphes triangulés est héréditaire.
2. Tout séparateur minimal est une clique
3. Si G n'est pas une clique, alors il admet au moins deux sommets simpliciaux non adjacents.
   (preuve à reprendre)

Caractérisation

Un graphe est triangulé ssi il possède un ordre d'élimination simplicial.



Théorème [Tarjan et Yannakakis, 1984]

G est un graphe chordal ssi tout parcours MNS fournit un schéma simplicial.

Preuve :

Soit c le premier sommet non simplicial à gauche. Il existe donc $a < b \in N(c)$ avec $ab \notin E$. D'après la caractérisation des ordres MNS, il existe $d < b$ vérifiant $db \in E$ et $dc \notin E$. Comme G est chordal, nécessairement $ad \notin E$.
Soit $d < a$, dans ce cas, en considérant le triplet d, a, b, il existe nécessairement $d' < a$ tel que $d'a \in E$ et $d'b \notin E$. En outre $d'd \notin E$.
Soit $a < d$, en considérant le triplet a, d, c, il existe nécessairement $d' < d$ tel que $d'd \in E$ et $d'c \notin E$. En outre $ad' \notin E$.
Dans les deux cas, une figure se propage strictement sur la gauche, d'où la contradiction.

Conséquences

Corollaire

G est un graphe chordal ssi tout parcours Maximal Cardinality Search (MCS) (resp LexBFS, LexDFS) fournit un schéma simplicial.

Corollaire

Il suffit d'un parcours pour reconnaître si un graphe est chordal.

Cliques de taille maximum

On peut calculer en temps linéaire la taille maximum d'une clique dans un graphe chordal.
Problème NP-difficile sur un graphe quelconque.

Cliques maximales

Un graphe chordal admet au plus n cliques maximales

Conséquences

Certificats

Quels certificats fournir ?

Coloration minimum

On peut calculer en temps linéaire le nombre chromatique d'un graphe chordal.
Problème NP-difficile sur un graphe quelconque.

1 Reconnaissance des graphes triangulés ou chordaux

2 Applications

Les pages suivantes font référence au texte : la tablette magique, disponible sur le même site.

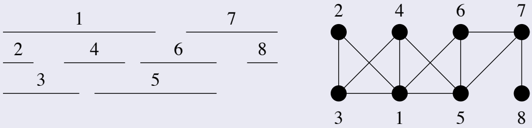
Les données

- M.L. Par contre il se souvenait d'y avoir vu C.P. et F. de M.
- C.P. Toutefois il n'était pas le seul et il pouvait donner des noms, en particulier ceux de M.L. et V. L.
- B.M.B.X se souvenait très bien ce matin là, avoir vu M.H. et V.L.
- M.H. reconnu avoir vu M.L. et V. L.
- F. de M., mais il avoua avoir vu C.P. et B.M.B.X.
- V. L. Toutefois il voulut bien se souvenir qu'il avait vu B.M.B.X et F. de M.

1. Comment modéliser ce problème ?
2. A l'aide d'un graphe
3. Les sommets sont :
4. les arcs ou arêtes sont :

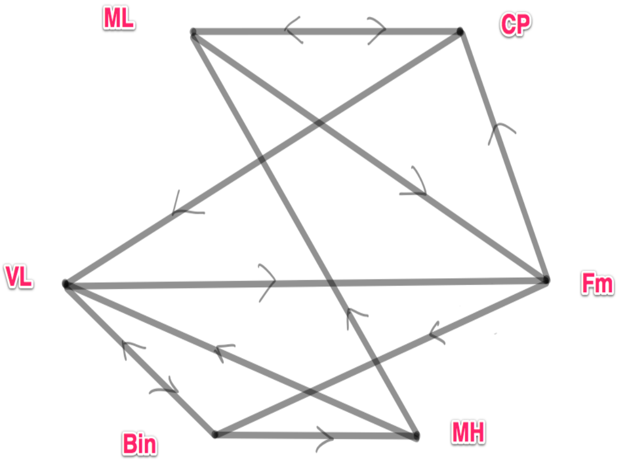
Graphes d'intervalles

Un graphe est un graphe d'intervalles ssi c'est le graphe d'intersection d'une famille d'intervalles sur la droite réelle.

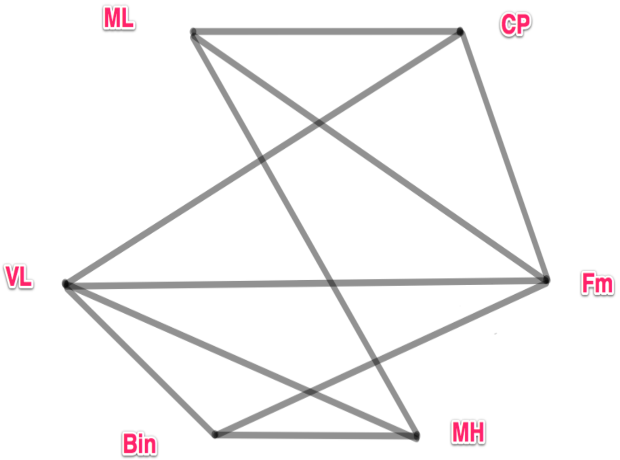


1. La classe des graphes d'intervalles est héréditaire.
2. Tout graphe d'intervalle est chordal
3. Les graphes d'intervalles se codent à l'aide de $O(logn)$ par sommets.

le graphe des aveux



le graphe non orienté sous-jacent



Ce graphe n'est pas chordal, il admet deux cycles de longueur 4 sans corde :
[MH., VL, FdeM, ML]
[MH, ML, CP, VL]

Diamètre [Corneil, Dragan, Khoëler 2003]

- Si v est le dernier sommet d'un ordre BFS sur un graphe d'intervalles G, alors $ecc(v) \geq Diam(G) - 1$.
- Il est possible de trouver dans la dernière couche, un sommet v tel que $ecc(v) = Diam(G)$